

**TD1 - Systèmes différentiels linéaires**

**Exercice 1. Système homogène : solutions complexes et réelles**

En posant  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , réécrire les systèmes différentiels suivants sous forme matricielle, puis déterminer leurs solutions réelles :

$$(i) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

**Exercice 2. Système homogène**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$(i) \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

On posera  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3. Système avec second membre**

Trouver les solutions réelles  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  du système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 3e^{2t} \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) + 9t \end{cases}$$

- 1) Déterminer la solution générale  $X_h(t)$  du système homogène associé.
- 2) Déterminer une solution particulière  $X_p(t)$  (on pourra choisir une solution sous la forme de polynômes de degré 1 et d'exponentielles).

**Exercice 4. Système avec second membre**

Déterminer les solutions réelles du système différentiel  $X'(t) = AX(t) + B(t)$  où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5. Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 3**

Le but de l'exercice est de trouver les solutions réelles  $f(t)$  de l'EDL d'ordre 3

$$f^{(3)}(t) + f''(t) - 10f'(t) + 8f(t) = 4\exp(2t)$$

- 1) Préciser  $X(t)$  et le système différentiel d'ordre 1 associé à cette équation différentielle.
- 2) Déterminer la solution générale  $X(t)$ .
- 3) En déduire la solution générale  $f(t)$  de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3.