Solution de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – Partiel, mercredi 10 novembre 2021

Exercice 1.

L'espace étant muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on étudie le mouvement d'une particule qui se déplace dans le plan Oxy. Elle possède une masse de 1 kg et une charge $q > 0$. Elle est soumise au champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$, au champ magnétique uniforme $\vec{H} = H\vec{u}_z$ et à la force de frottement fluide de coefficient γ. $E > 0$, $H > 0$ et $\gamma \geq 0$ sont des constantes. Son vecteur vitesse dans le plan $V(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$ vérifie alors le système différentiel

$$V'(t) = AV(t) + B$$

où $A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$ avec $\omega = qH$, et $B = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les solutions **réelles** du système différentiel.

b. Pour $\gamma = 0$, calculer les vitesses moyennes $\langle v_x \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v_x(t)\,dt$ et $\langle v_y \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v_y(t)\,dt$, avec $T = \frac{2n\pi}{\omega}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 1.

a. • *Solutions du système homogène :*

— Valeurs propres de A :

Le polynôme caractéristique est $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\gamma - \lambda & \omega \\ -\omega & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \gamma)^2 + \omega^2$.

Alors $\chi(\lambda) = 0 \iff (\lambda + \gamma)^2 = -\omega^2 \iff \lambda + \gamma = \pm \mathrm{i}\,\omega \iff \lambda = -\gamma \pm \mathrm{i}\,\omega$.

Les valeurs propres de A sont donc les nombres complexes conjugués $\lambda_1 = -\gamma + \mathrm{i}\,\omega$ et $\lambda_2 = -\gamma - \mathrm{i}\,\omega$.

— Vecteur propre associé à λ_1 :

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\,\omega & \omega \\ -\omega & -\mathrm{i}\,\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \beta = \mathrm{i}\,\alpha \quad (\text{car } \omega \neq 0)$$

donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

— Vecteur propre associé à λ_2 :

Un vecteur propre associé à $\lambda_2 = \lambda_1^*$ est $U_2 = U_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ car la matrice A est réelle.

— Une base des solutions réelles s'obtient en prenant les parties réelle et imaginaire de la solution complexe

$$V_1(t) = e^{\lambda_1 t} U_1 = e^{(-\gamma + \mathrm{i}\,\omega)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \mathrm{i}\,\sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) + \mathrm{i}\,\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale du système homogène est

$$V_H(t) = K_1 e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} + K_2 e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Solution particulère du système avec second membre :*

Le second membre est constant, donc on peut chercher une solution particulière sous la forme d'un vecteur constant $V_P(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} V_P'(t) = AV_P(t) + B &\iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = -\gamma\alpha + \omega\beta + qE \\ 0 = -\omega\alpha - \gamma\beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -\frac{\gamma}{\omega}\beta \\ \frac{\gamma^2}{\omega}\beta + \omega\beta = -qE \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \frac{\gamma}{\gamma^2+\omega^2} qE \\ \beta = -\frac{\omega}{\gamma^2+\omega^2} qE \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $V_P(t) = \frac{qE}{\gamma^2+\omega^2} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\omega \end{pmatrix}$.

- *Solution générale du système avec second membre :*

$$V(t) = K_1 e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} + K_2 e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \frac{qE}{\gamma^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\omega \end{pmatrix} \quad \text{avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

b. Pour $\gamma = 0$,

$$V(t) = K_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{H} \end{pmatrix} \quad \text{avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par ailleurs, avec $T = \frac{2n\pi}{\omega}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^T \cos(\omega t)\, dt = \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = \frac{\sin(2n\pi) - \sin(0)}{\omega} = 0$$

et

$$\int_0^T \sin(\omega t)\, dt = \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = \frac{-\cos(2n\pi) + \cos(0)}{\omega} = 0.$$

Donc

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_x(t)\, dt = 0$$

et

$$\langle v_y \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_y(t)\, dt = -\frac{E}{H}.$$

Exercice 2.

On souhaite trouver les extrema locaux de la fonction $f\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) \;=\; \cos(x) \;+\; \cos(y)\cos(z).$$

a. Déterminer les points critiques de f qui appartiennent au cube $K = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.

b. Calculer la matrice hessienne $H_f(x,y,z)$ de la fonction au point (x,y,z).

c. Etudier la nature (maximum, minimum...) des points critiques se trouvant dans K à l'abscisse $x = 0$.

Solution 2.

a.

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \vec{0} \iff \begin{cases} -\sin(x) = 0 \\ -\sin(y)\cos(z) = 0 \\ -\cos(y)\sin(z) = 0 \end{cases}$$

Si $\sin(y) = 0$ alors $\cos(y) \neq 0$, donc nécessairement $\sin(z) = 0$. De même, si $\cos(y) = 0$ alors $\sin(y) \neq 0$ donc forcément $\cos(z) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \sin(y) = \sin(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(y) = \cos(z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0\ [\pi] \\ \begin{cases} y \equiv 0\ [\pi] \\ z \equiv 0\ [\pi] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ z \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases} \end{cases}$$

Dans le cube $[0,\pi]^3$, les points critiques sont donc :

— à l'abscisse $x = 0$: $(0,0,0)$, $(0,\pi,0)$, $(0,0,\pi)$, $(0,\pi,\pi)$ et $(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

— à l'abscisse $x = \pi$: $(\pi,0,0)$, $(\pi,\pi,0)$, $(\pi,0,\pi)$, (π,π,π) et $(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

b. La matrice hessienne est

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(y)\cos(z) & \sin(y)\sin(z) \\ 0 & \sin(y)\sin(z) & -\cos(y)\cos(z) \end{pmatrix}.$$

c. Nature des points critiques à l'abscisse $x = 0$:

— En $(0,0,0)$:

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont toutes égales à $-1 < 0$, donc il y a un maximum.

— En $(0,\pi,0)$:

$$H_f(0,\pi,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $-1 < 0$ et $1 > 0$, donc il y a un point-selle.

— En $(0,0,\pi)$: la matrice hessienne est la même qu'en $(0,\pi,0)$, donc il y a un point-selle.

— En $(0,\pi,\pi)$: la matrice hessienne est la même qu'en $(0,0,0)$, donc il y a un maximum.

— En $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$H_f\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 1)$.

Ses valeurs propres sont donc égales à $-1 < 0$ et $1 > 0$. Et donc il y a un point-selle.

Exercice 3.

On cherche les fonctions f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^1$ sur le demi-plan $\mathscr{P}_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, + \, (1+y^2)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pour cela, on introduit la fonction F définie par $F(a,b) = f(X,Y)$ avec $X = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ et $Y = \dfrac{a}{b}$ pour tout $(a,b) \in \mathscr{P}_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

a. Pour un couple donné $(x,y) \in \mathscr{P}_1$, déterminer $(A,B) \in \mathscr{P}_2$ qui vérifient $\dfrac{A^2+B^2}{2} = x$ et $\dfrac{A}{B} = y$.

b. Exprimer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

c. En déduire que $\forall (a,b) \in \mathscr{P}_2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \, + \, b\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right).$$

d. Déterminer une expression similaire pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(X,Y)$.

e. En déduire les solutions f de l'équation (E).

Solution 3.

a. Pour $(x,y) \in \mathscr{P}_1$ et $(A,B) \in \mathscr{P}_2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{A^2+B^2}{2} = x \\ \frac{A}{B} = y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = yB \\ \frac{(y^2+1)B^2}{2} = x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = yB \\ B^2 = \frac{2x}{y^2+1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = y\sqrt{\frac{2x}{y^2+1}} \\ B = \sqrt{\frac{2x}{y^2+1}} \end{array}\right.$$

puisque $x > 0$ et $B > 0$.

Remarque : on a donc $F\left(y\sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}, \sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}\right) = f(x,y)$.

b. Avec $X = \frac{a^2+b^2}{2}$ et $Y = \frac{a}{b}$,

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(X,Y)\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)\frac{\partial Y}{\partial a} = a\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) + \frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(X,Y)\frac{\partial X}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)\frac{\partial Y}{\partial b} = b\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) - \frac{a}{b^2}\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)$$

c. $\forall (a,b) \in \mathscr{P}_2$,

$$
\begin{aligned}
a\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,+\, b\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) &= a^2\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) + \frac{a}{b}\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y) + b^2\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) - \frac{a}{b}\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)\\
&= \left(a^2+b^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y)
\end{aligned}
$$

donc

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,+\, b\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right).
$$

d. $\forall (a,b) \in \mathscr{P}_2$,

$$
\begin{aligned}
b\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,-\, a\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) &= ab\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) + \frac{\partial f}{\partial y}(X,Y) - ab\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) + \frac{a^2}{b^2}\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)\\
&= \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)
\end{aligned}
$$

donc

$$
\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y) = \frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}}\left(b\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,-\, a\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right).
$$

e. En remplaçant x et y dans l'équation (E) par $X = \frac{a^2+b^2}{2}$ et $Y = \frac{a}{b}$, et en utilisant les relations obtenues aux questions **c.** et **d.**, on trouve que

$$
\begin{aligned}
\forall (a,b) \in \mathscr{P}_2, \qquad & 2XY\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) \,+\, (1+Y^2)\,\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y) = 0\\
\iff\quad & 2\times\frac{a^2+b^2}{2}\times\frac{a}{b}\times\frac{1}{a^2+b^2}\left(a\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,+\, b\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right)\\
& +\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\times\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}}\left(b\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,-\, a\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right) = 0\\
\iff\quad & \frac{a^2}{b}\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,+\, a\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) + b\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \,-\, a\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 0\\
\iff\quad & \frac{a^2+b^2}{b}\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = 0.
\end{aligned}
$$

Puisque $a^2+b^2 \neq 0$, on en déduit que

$$
(E) \iff \forall (a,b) \in \mathscr{P}_2, \quad \frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = 0.
$$

Donc F est une fonction uniquement de la variable b :

$$
\forall (a,b) \in \mathscr{P}_2, \quad F(a,b) = g(b)
$$

avec g une fonction classe $\mathscr{C}^1$, et

$$
\forall (x,y) \in \mathscr{P}_1, \quad f(x,y) = F\left(y\sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}, \sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}\right).
$$