

SYSTEMES ASSERVIS ECHANTILLONNES

Mohammed M'SAAD

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

Bureau: FA 314

Téléphone: 02 31 45 27 08

Courriel: mohammed.msaad@ensicaen.fr

UNE APPROCHE SYSTEME

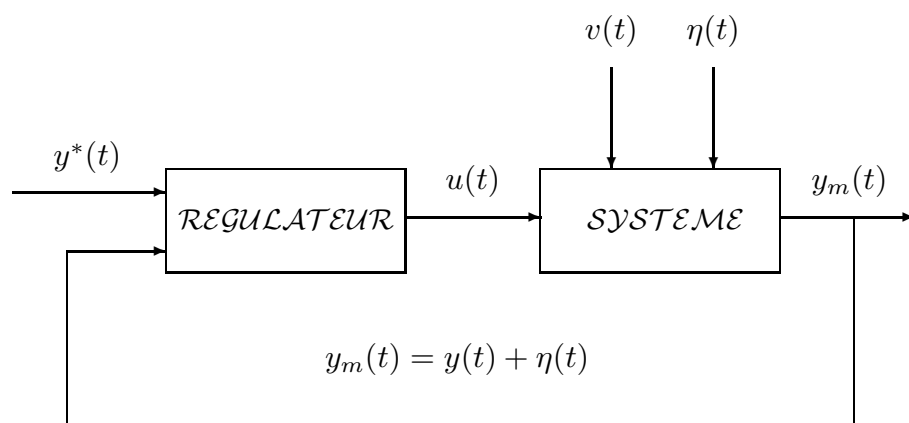
DANS

UN CONTEXTE POLYNOMIAL

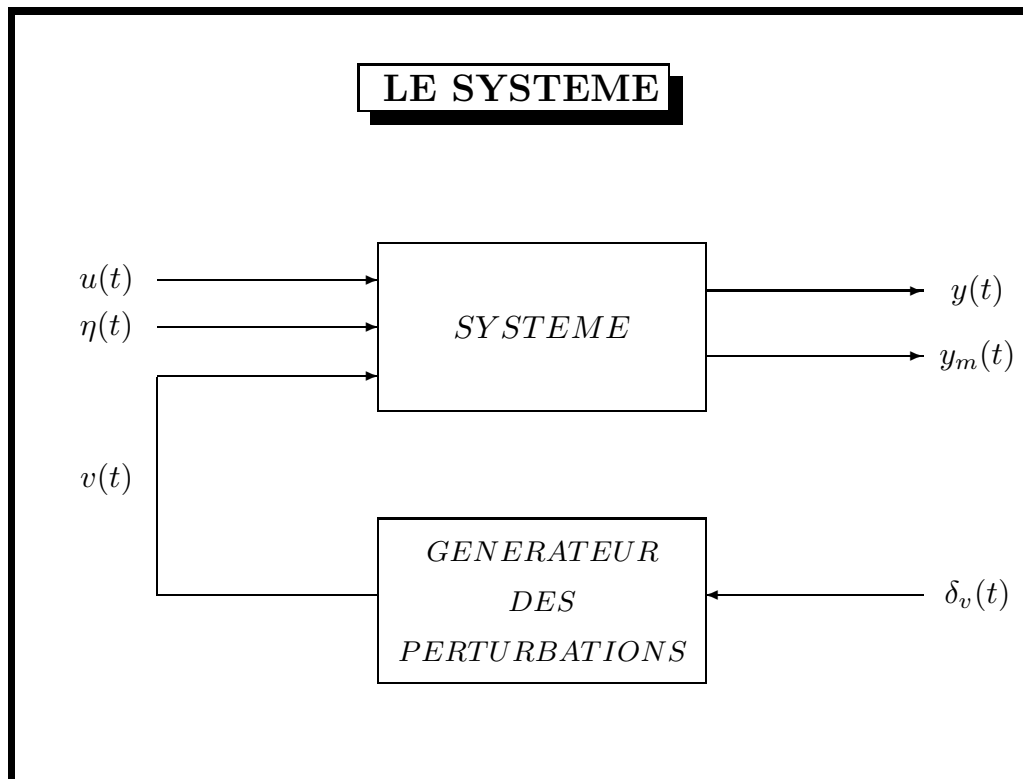
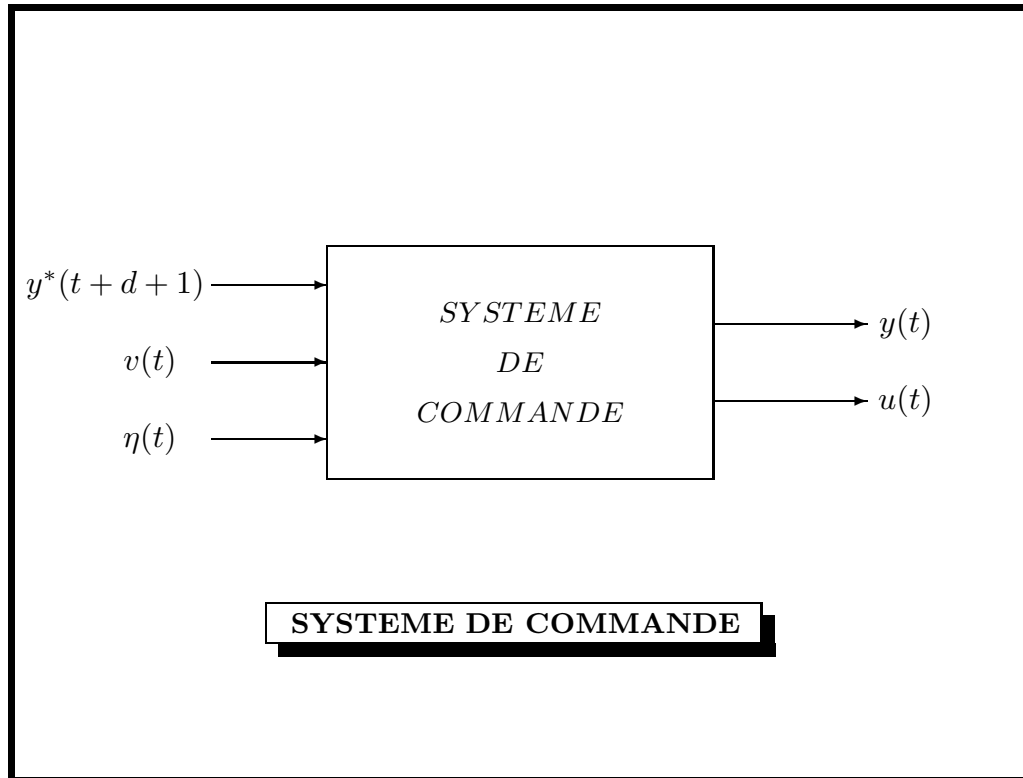
PLAN

- ♠ Asservissements
- ♠ Le système
- ♠ Le régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systématique
- ♠ Structure du régulateur
- ♠ Synthèse modale

ASSERVISSEMENTS



? $\mathcal{REG} \rightarrow \{u(t)\} / \{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$



$$MCOM \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{array} \right.$$

$$\uparrow$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_{ne}q^{-ne}$$

$$\uparrow$$

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

MODELE DE COMMANDE

$$MODC \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \mathcal{G}_\sigma(q^{-1}) u(t) + \mathcal{G}_p(q^{-1}) v(t) \\ v(t) = \mathcal{H}(q^{-1}) \delta_v(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{array} \right.$$

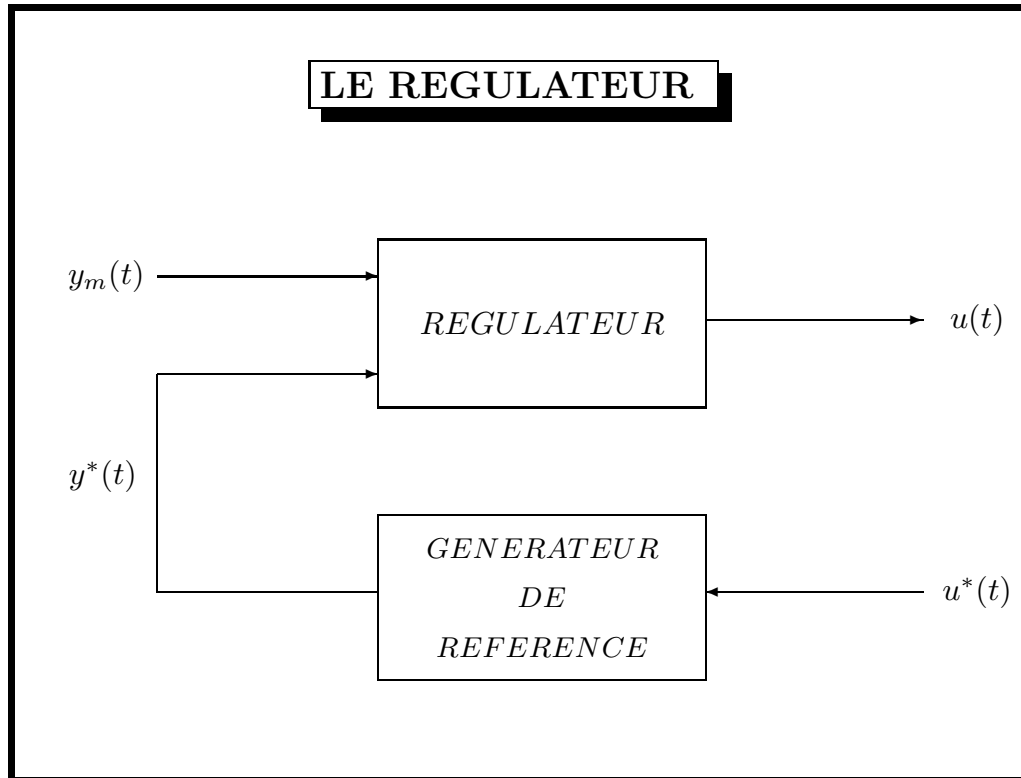
$$\downarrow$$

$$\delta_v(t) = v\delta(t)$$

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) \triangleq z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_p(z^{-1}) \triangleq \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\mathcal{H}(z^{-1}) \triangleq \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$



$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}_{reg}(q^{-1}) y_m(t) + \mathcal{R}_{tra}(q^{-1}) y^*(t + d + 1) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

↑

$$\mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) \triangleq \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \quad \mathcal{R}_{tra}(z^{-1}) \triangleq \frac{R_p(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}$$

et

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) \triangleq z^{-d-1} \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$$

COMMANDE AVEC RETOUR UNITAIRE

$$T_r(q^{-1}) = q^{-d-1} R_n(q^{-1})$$

↓

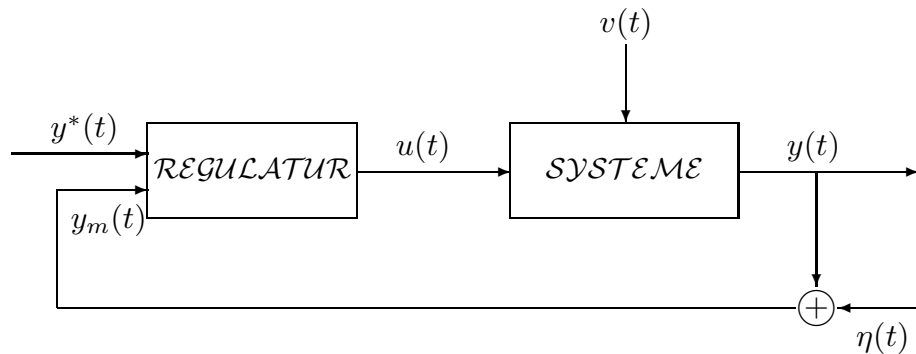
$$\mathcal{REGRU} \left\{ \begin{array}{l} u(t) = -\mathcal{R}_{reg}(q^{-1}) (y^*(t) - y_m(t)) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{array} \right.$$

↓

$$\mathcal{R}_{tra}(z^{-1}) = z^{-d-1} \mathcal{R}_{reg}(z^{-1})$$

Be always with us

SYSTEME DE COMMANDE



? $\mathcal{REG} \rightarrow \{u(t)\} / \{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$

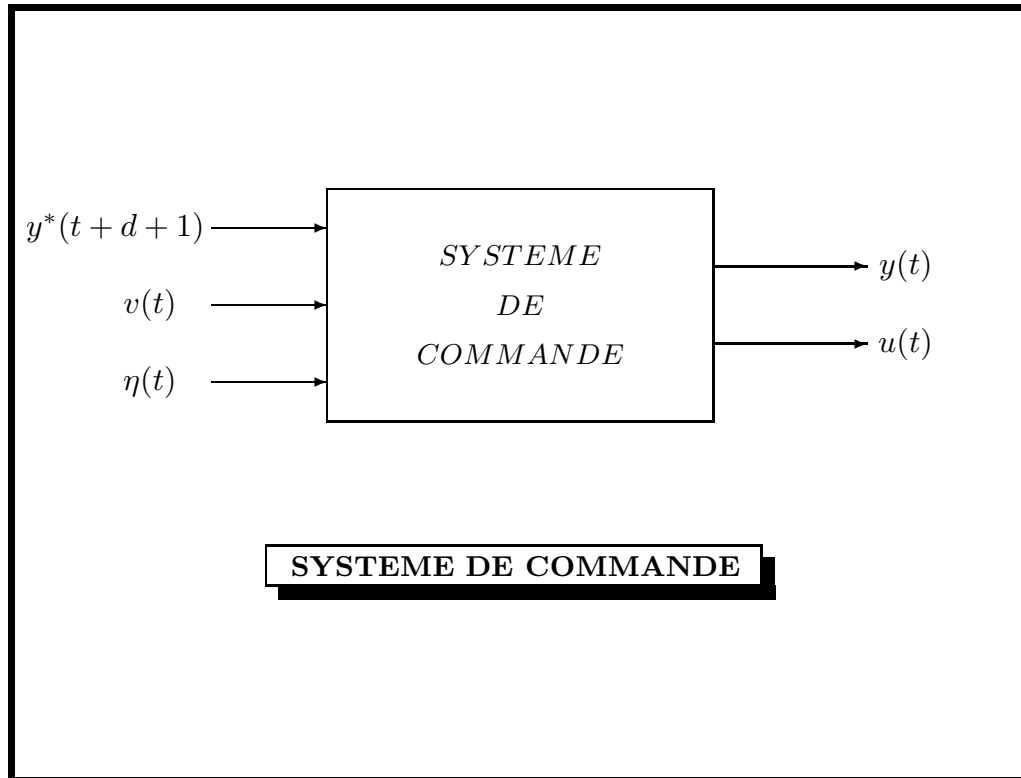
EQUATIONS FONDAMENTALES

♠ *Le système*

$$MCOM \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{cases}$$

♠ *Le régulateur*

$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})v(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \end{cases}$$



SYSTEME DE COMMANDE NOMINAL

$$\begin{cases}
 y(t) = \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\
 \quad + \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t) \\
 u(t) = \frac{A(q^{-1})T_r(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\
 \quad - \frac{E(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t)
 \end{cases}$$

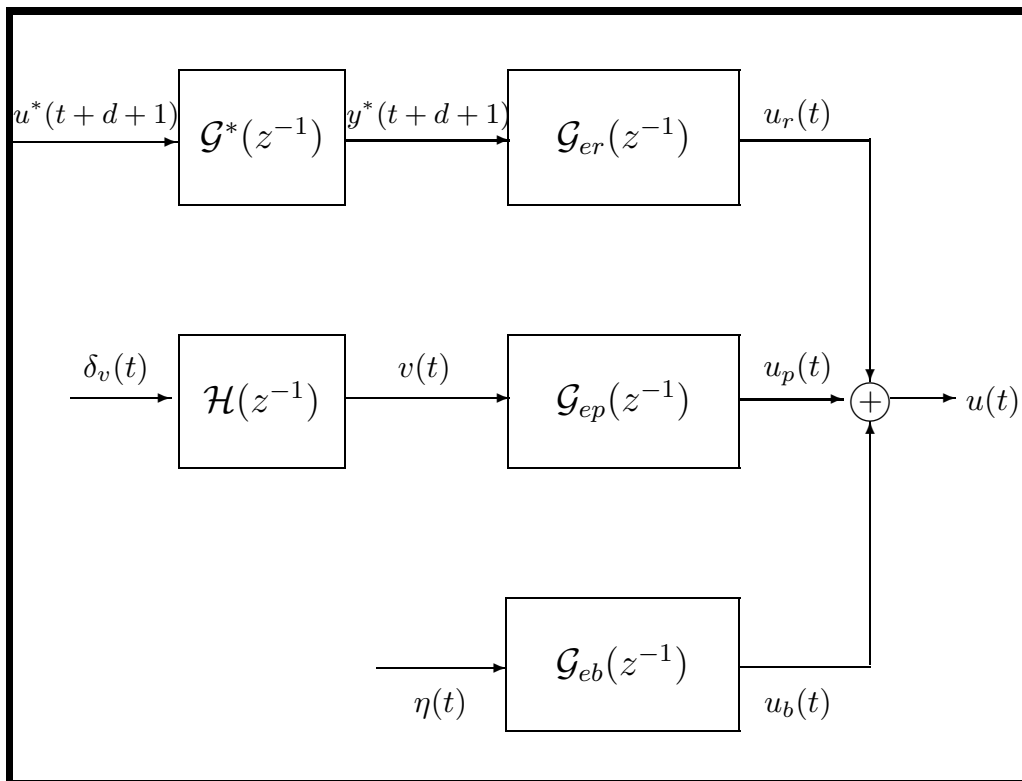
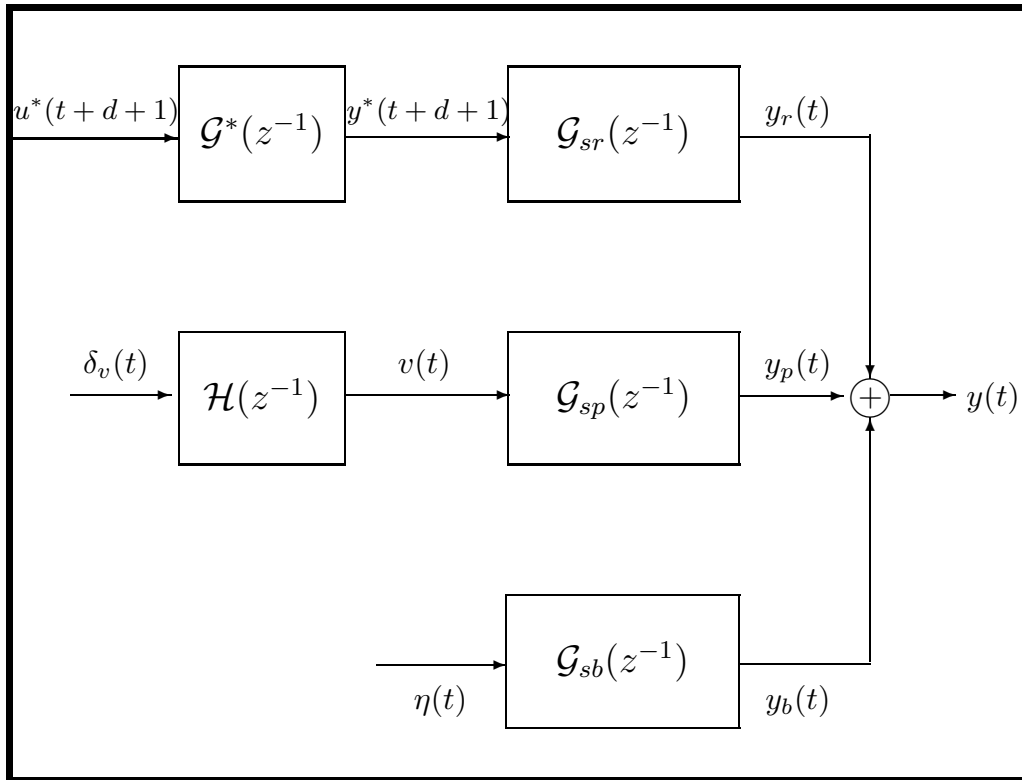
↑

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

FONCTIONS DE TRANSFERT DU SYSTEME ASSERVI

$$\mathcal{FTR} \left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) \triangleq \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) \triangleq -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}
 \end{array} \right.$$

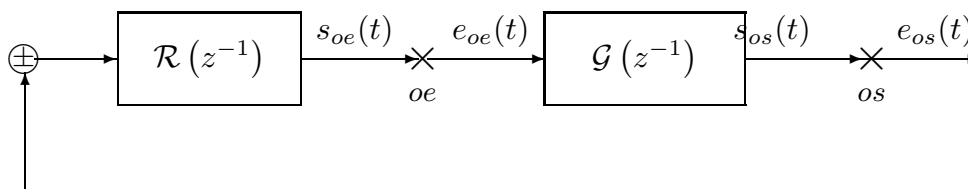
PERFORMANCES NOMINALES



ANALYSE SYSTEMIQUE

- Fonctions de transfert essentielles
- Stabilité nominale
- Marge de stabilité
- Dynamique de poursuite
- Dynamique de régulation
- Sensibilité aux bruits de mesure

FONCTIONS DE TRANSFERT ESSENTIELLES



TRANSFERTS VITAUX

- Gain en boucle ouverte

$$\mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{R}(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{R}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_o(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{os}(z^{-1})$$

- Différence de retour

$$\mathcal{DR}_e(z^{-1}) \triangleq 1 + \mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{DR}_s(z^{-1}) \triangleq 1 + \mathcal{G}_{os}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{DR}_e(z^{-1}) = \mathcal{DR}_s(z^{-1})$$

- ♠ Fonction de sensibilité

$$\mathcal{S}_e(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_e(z^{-1}))^{-1} \text{ et } \mathcal{S}_s(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_s(z^{-1}))^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}(z^{-1}))^{-1}$$

- ♠ Fonction de sensibilité complémentaire

$$\mathcal{T}_e(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_e(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_{oe}(z^{-1})$$

et

$$\mathcal{T}_s(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_s(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_{os}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_o(z^{-1})$$

PROPRIETES ESSENTIELLES

♠ Relation essentielle

$$\mathcal{S}(z) + \mathcal{T}(z) = 1 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{C}$$

♠ Fonction de sensibilité

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPH}$$

♠ Fonction de sensibilité complémentaire

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

FONCTIONS DE SENSIBILITE USUELLES

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPH}$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

$$\mathcal{GS}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

$$\mathcal{RS}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{FPH} \\ \text{?FPB} \end{cases}$$

STABILITE NOMINALE

Le système asservi est stable si et seulement si tous ses modes sont situés dans le domaine de stabilité, soit

$$\mathcal{SAS} \text{ est stable} \iff \mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) \subset \mathcal{D}_{saz}$$

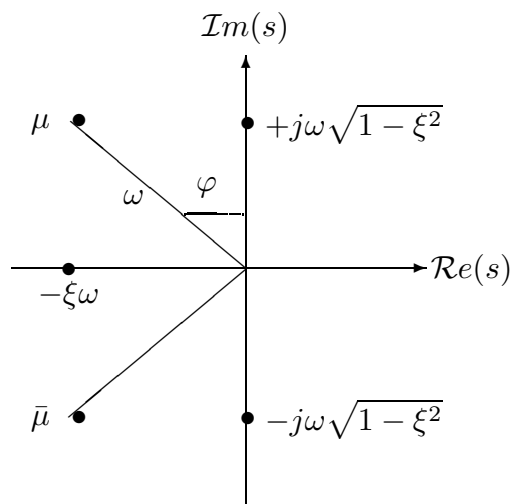
ou d'une manière équivalente

$$(\mathcal{SAS} \text{ est stable}) \iff (P_c(z^{-1}) = 0 \implies |z| < 1)$$

↑

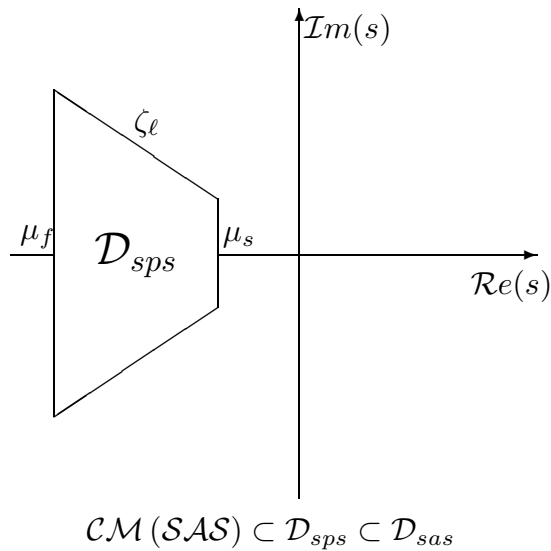
$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})$$

PAPPEL



$$\text{Mode } (\xi, \omega) \rightarrow s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2$$

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES



$$\mathcal{D}_{sps} = \left\{ s \in \mathcal{C} / \begin{array}{l} \mathcal{R}e(s) \in [-\mu\xi_r\omega_r, -\xi_r\omega_r] \text{ avec } \mu > 1 \\ \text{et } |\mathcal{I}m(s)| \leq |\mathcal{R}e(s)| \frac{\sqrt{1-\xi_r^2}}{\xi_r} \end{array} \right\}$$

↓

$$\mu_{ps} \in \mathcal{D}_{sps} \longrightarrow \mu_{pz} = e^{\mu_s T_e} \in \mathcal{D}_{spz}$$

$$\text{Mode } (\xi, \omega) \longrightarrow 1 - 2e^{-\xi\omega T_e} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega T_e\right) z^{-1} + e^{-2\xi\omega T_e} z^{-2}$$

MARGES DE STABILITE

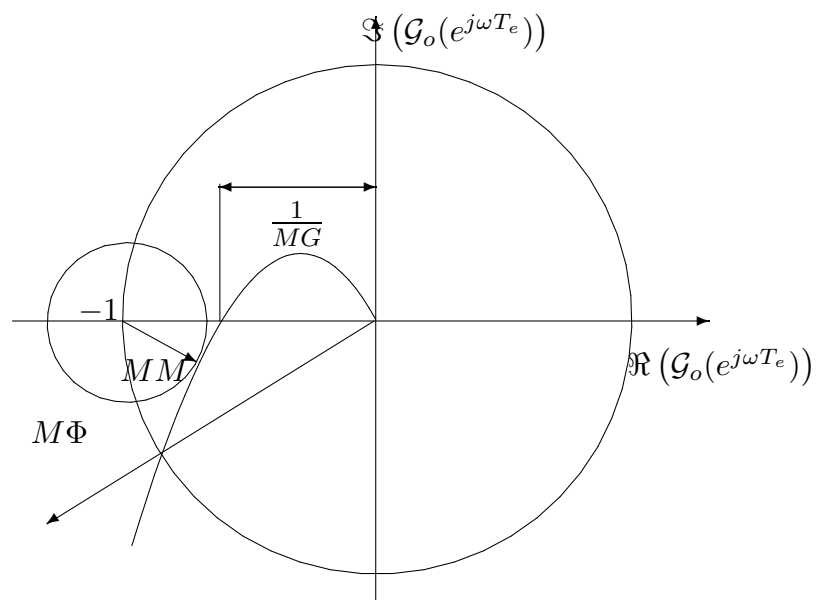


MARGE DE GAIN (MG)

MARGES DE PHASE (MP)

MARGES DE MODULE (MM)

MARGES DE RETARD (MR)



DYNAMIQUE DE POURSUITE

$$Y_r(z) = \mathcal{DP}(z^{-1}) U^*(z)$$

↓

$$\begin{aligned} \mathcal{DP}(z^{-1}) &= \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) z^{d+1} \mathcal{G}^*(z^{-1}) \\ &= \frac{B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) \end{aligned}$$

↓

*Le retard et les zéros du système
sont invariants par rétroaction*

CAS D'UN RETOUR UNITAIRE

$$\begin{aligned} \mathcal{DP}(z^{-1}) &= \frac{z^{-d-1} B(z^{-1}) R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) \\ &= \mathcal{T}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1}) \end{aligned}$$

↓

*La poursuite parfaite
n'est réalisable avec un retour unitaire*

DYNAMIQUE DE REGULATION

$$Y_p(z) = \mathcal{DR}(z^{-1}) V(z)$$

↓

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}$$

↓

*Les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_p(z^{-1})$
sont invariants par rétroaction*

SENSIBILITE AUX BRUITS DE MESURE

$$SBM : \{\eta(t)\} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_{sb}(t) \\ y_{eb}(t) \end{pmatrix}$$

$$SBM(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{T}(z^{-1}) \\ -\mathcal{RS}(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

REGULATEURS ADMISSIBLES

- Composantes temporelles du système asservi
- Erreurs de poursuite
- Classe des régulateurs admissibles
- Performances dynamiques
- Insensibilité aux bruits de mesure
- Compensation parfaite des perturbations
- Dépollution du signal de commande
- Poursuite admissible
- Precision maximale
- Structure canonique d'un régulateur
- Synthèse modale

COMPOSANTES TEMPORELLES DU SYSTEME ASSERVI

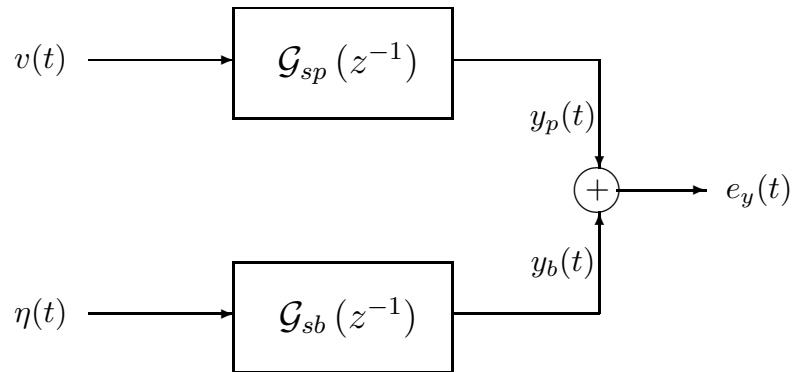
$$SAS \left\{ \begin{array}{l} y(t) = y_r(t) + y_p(t) + y_b(t) \\ u(t) = u_r(t) + u_p(t) + u_b(t) \end{array} \right.$$

↑

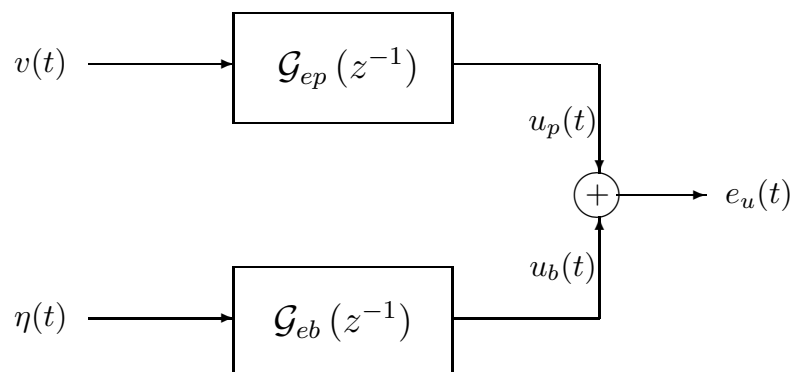
$$CSAS \left\{ \begin{array}{l} y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ y_p(t) = \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \\ y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) \\ u_r(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ u_p(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})v(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) \end{array} \right.$$

ERREUR DE POURSUITE EN SORTIE

$$e_y(t) \triangleq y(t) - y_r(t) = y_p(t) + y_b(t)$$

**ERREUR DE POURSUITE EN ENTREE**

$$e_u(t) \triangleq u(t) - u_r(t) = u_p(t) + u_b(t)$$



ERREUR DE POURSUITE

$$e_{\sigma}(t) \triangleq y^*(t) - y(t) = e_r(t) - y_p(t) - y_b(t)$$

avec

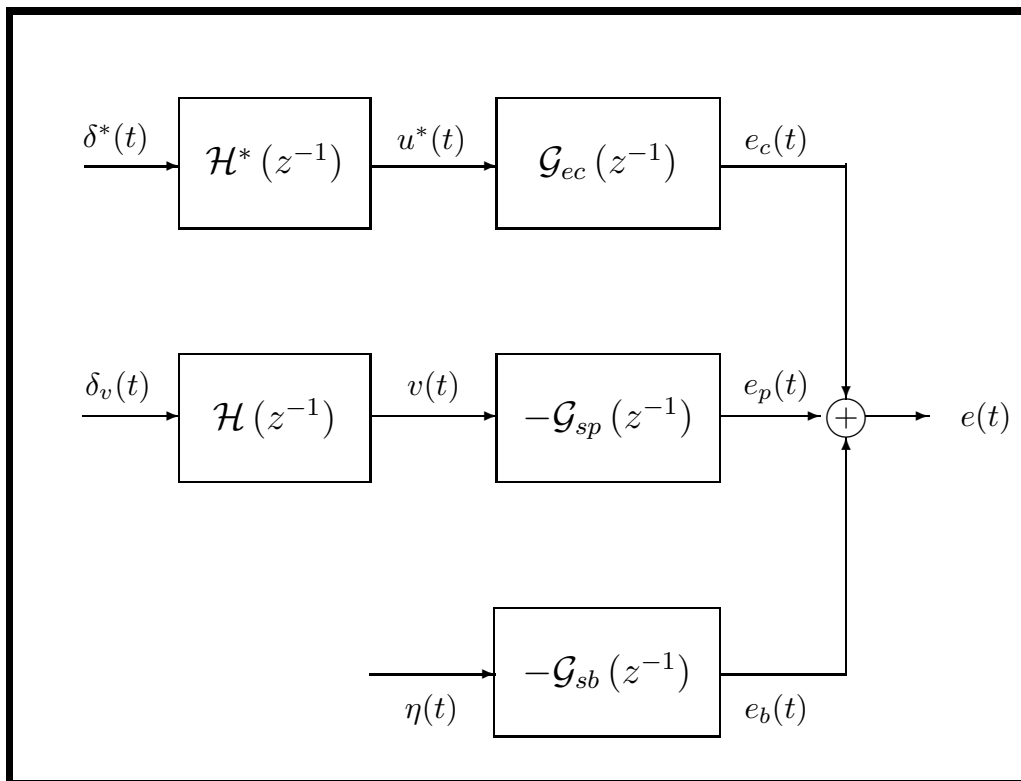
$$e_r(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})u^*(t)$$

↓

$$\mathcal{G}_{ec}(q^{-1})$$

≡

$$\frac{A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + B(q^{-1})(q^{-d-1}R_n(q^{-1}) - T_r(q^{-1}))}{P_c(q^{-1})} \mathcal{G}^*(q^{-1})$$



CLASSE DES REGULATEURS ADMISSIBLES

- C1. Le système de commande réalise les performances dynamiques requises

$$\mathcal{RPD} \left\{ \mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{spz} \right.$$

- C2. Le système de commande est insensible aux bruits de mesures inéluctables

$$\mathcal{IBM} \left\{ \{y_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \text{ et } \{u_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \right.$$

- C3. Le système de commande réalise une compensation parfaite des perturbations qui affectent ses performances en sortie

$$\mathcal{CPP} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) = 0 \right.$$

- C4. Le système de commande réalise une poursuite admissible (resp. une précision maximale)

$$\mathcal{PA} \left\{ \{e_y(t)\} \in \mathcal{SAZI} \left(\text{resp. } \mathcal{PM} \left\{ \{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI} \right\} \right) \right.$$

- C5. Le système de commande réalise, si besoin est, une dépollution du signal de commande des composantes indésirables en sortie

$$\mathcal{DSEC} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \text{ avec } u_{ind}(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})y_{ind}(t) \right.$$

REALISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES

$$\mathcal{RPD} \left\{ \mathcal{CM}(\text{SAS}) \subset \mathcal{D}_{spz} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$? \mathcal{R}_r(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} \quad / \quad P_c(z^{-1}) \in \mathcal{D}_{spz}[z^{-1}]$$

INSENSIBILITE AUX BRUITS DE MESURE

$$\begin{cases} y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) = -\mathcal{T}(q^{-1})\eta(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})\eta(t) \end{cases}$$

et

$\mathcal{T}(z^{-1})$ est un filtre passe bas

$$\Downarrow$$

SAS est IBM ssi $\mathcal{RS}(z^{-1})$ est un filtre passe bas

COMPENSATION DES PERTURBATIONS

$$y_p(t) = \mathcal{G}_{spz}(q^{-1})v(t) \text{ et } v(t) = \mathcal{H}(q^{-1})\delta_v(t)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$D(q^{-1}) \text{ divise } E(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

$$\uparrow$$

$$R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1}) \text{ avec } D_r(q^{-1}) \triangleq \frac{D(q^{-1})}{\text{pgcd}(E(q^{-1}), D(q^{-1}))}$$

DEPOLLUTION DU SIGNAL D'ENTREE

$$y_m(t) = y_a(t) + y_{ind}(t) \text{ avec } D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta_{ind}(t)$$

$$\downarrow$$

$$u_{ind}(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})y_{ind}(t) \text{ avec } \mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) = -\frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\downarrow$$

$$\text{SAS réalise une DSE} / \{y_{ind}(t)\} \text{ ssi } \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \text{ ssi } D_{ind}(q^{-1}) \text{ divise } A(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

$$\uparrow$$

$$R_n(q^{-1}) = R(q^{-1})D_c(q^{-1}) \text{ puisque } \text{pgcd}(D_{ind}(q^{-1}), A(q^{-1})) = 1$$

POURSUITE PARFAITE

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$z^{d+1}\mathcal{G}_{rs}(z^{-1}) = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + B(z^{-1})R_n(z^{-1}) = B(z^{-1})T_r(z^{-1}) \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\spadesuit$$

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(z^{-1})) \subset \mathcal{D}_{spz} \subset \mathcal{D}_{saz}$$

POURSUITE SEMI PARFAITE

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \beta B(z^{-1})\mathcal{G}^*(z^{-1}) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \beta B(z^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$T_r(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1})$$

$$\spadesuit$$

$$0 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS})$$

PRECISION MAXIMALE

$$e_\sigma(t) = e_r(t) + e_p(t) + e_b(t)$$

avec

$$e_r(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})y^*(t)$$

$$e_p(t) = -\mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \quad \text{et} \quad e_b(t) = -\mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)$$

⇕

SAS réalise une *PM ssi* $\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$

⇕

SAS réalise une *PM ssi* $\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D(q^{-1}) \text{ divise } E(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

↓

$$T_r(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1}) \quad \text{et} \quad D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D^*(q^{-1}) \text{ divise } A(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

SAS réalise une *PM ssi* $R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1})$

↑

$$D_r(q^{-1}) = \text{ppcm} \left(\frac{D(q^{-1})}{\text{pgcd}(D(q^{-1}), E(q^{-1}))}, \frac{D^*(q^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(q^{-1}), A(q^{-1}))} \right)$$

STRUCTURE USUELLE DU REULATEUR

$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{array} \right.$$

↓

$$R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1})$$

$$R_n(q^{-1}) = R(q^{-1})D_c(q^{-1})$$

$$T_r(q^{-1}) = T(q^{-1})$$

↑

$$pgcd(D_r(q^{-1}), B(q^{-1})) = pgcd(D_c(q^{-1}), A(q^{-1})) = 1$$

ZEROS FIXES DU REGULATEUR

$$D_c(q^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{DSE} \\ D_{apa}(q^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

↑

$$D_{apa}(q^{-1}) = 1 + q^{-1} \text{ est un choix judicieux}$$

SYNTHESE MODALE

$$? (R(z^{-1}), R(z^{-1})) /$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$=$$

$$M(q^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})\bar{M}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\bar{M}(q^{-1}) = \begin{cases} B(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$M_d(z^{-1}) = 1 - 2e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$\longrightarrow \text{Mode } (\omega_r, \zeta_r)$$
RESULTAT FUNDAMENTAL

Soient $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ deux polynômes de degrés respectifs $n\bar{a}$ et $n\bar{b}$ et $\bar{C}(z^{-1})$ un polynôme arbitraire de degré $n\bar{c}$ tels que

$$C1. \quad \text{pgcd}(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1})) = 1$$

$$C2. \quad n\bar{c} \leq n\bar{a} + n\bar{b} - 1$$

Alors, l'équation polynomiale

$$\mathcal{EQP} \left\{ \bar{A}(z^{-1})X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})Y(z^{-1}) = \bar{C}(z^{-1}) \right.$$

admet une solution unique pourvu que les degrés des polynômes $X(z^{-1})$ et $Y(z^{-1})$ soient spécifiés comme suit

$$nx = n\bar{b} - 1 \quad \text{et} \quad ny = n\bar{a} - 1$$

La solution unique de l'équation polynomiale \mathcal{EQP} n'est autre que celle du système d'équations linéaires sous-jacent, soit

$$\mathcal{A} \mathcal{X} = \mathcal{B}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_o & 0 & 0 & \bar{b}_o & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \bar{a}_o & \vdots & & \bar{b}_o \\ \bar{a}_{n\bar{a}} & & \vdots & \bar{b}_{n\bar{b}} & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n\bar{a}} & 0 & 0 & \bar{b}_{n\bar{b}} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n\bar{b}-1} \\ y_o \\ \vdots \\ y_{n\bar{a}-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{c}_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{c}_{n\bar{a}+n\bar{b}-1} \end{bmatrix}$$

↑

\mathcal{A} est la matrice de Sylvester associée à $(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1}))$

$\bar{c}_i = 0$ pour tout $i \geq n\bar{c}$

REMARQUES

$\mathcal{R}1$. La matrice de Sylvester associée aux polynômes $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ est inversible si et seulement si ces polynômes sont premiers entre eux.

$\mathcal{R}12$. Une équation polynomiale admet une infinité de solutions si aucune contrainte n'est imposée sur la structure de la solution recherchée. En effet, on peut vérifier que si

$$(X(z^{-1}), Y(z^{-1}))$$

est une solution, alors

$$(X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})W(z^{-1}), Y(z^{-1}) - \bar{A}(z^{-1})W(z^{-1}))$$

est une solution pour tout polynôme arbitraire $W(z^{-1})$.

POLYNOME $T(q^{-1})$

$$T(q^{-1}) = \begin{cases} M_d(q^{-1})M_a(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ \beta M(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PSP} \\ q^{-d-1}R(q^{-1})D_c(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

GENERATEUR DE LA SEQUENCE DE REFERENCE

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} \left(1 - 2e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} \right)}{1 - 2e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) z^{-1} + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} z^{-2}}$$

→ **Mode** (ω_p, ζ_p)

POURSUITE PARFAITE

- La propriété fondamentale

$$y_r(t) = y^*(t) \text{ pour tout } t$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{M}(z^{-1}) = B(z^{-1})$$

- La condition requise

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{spz}$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$y_m(t) = y(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$\Downarrow$$

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DSE} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

$$S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nd_r + nd_c + d$$

$$ng = nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

POURSUITE SEMI PARFAITE

- La propriété fondamentale

$$y_r(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

⇕

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \beta z^{-d-1} B(z^{-1})$$

- La condition requise

$$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \iff B(1) \neq 0$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$y_m(t) = y(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

↓

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DS}\mathcal{E} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = \beta M(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

PRECISION MAXIMALE

- La propriété fondamentale

$$\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$$

$$\uparrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \text{ avec } \delta^*(t) = u^*\delta(t)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) = D_c(q^{-1})R(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t))$$

$$y_m(t) = y(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

$$\downarrow$$

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm}(D_{rp}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DS}\mathcal{E} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

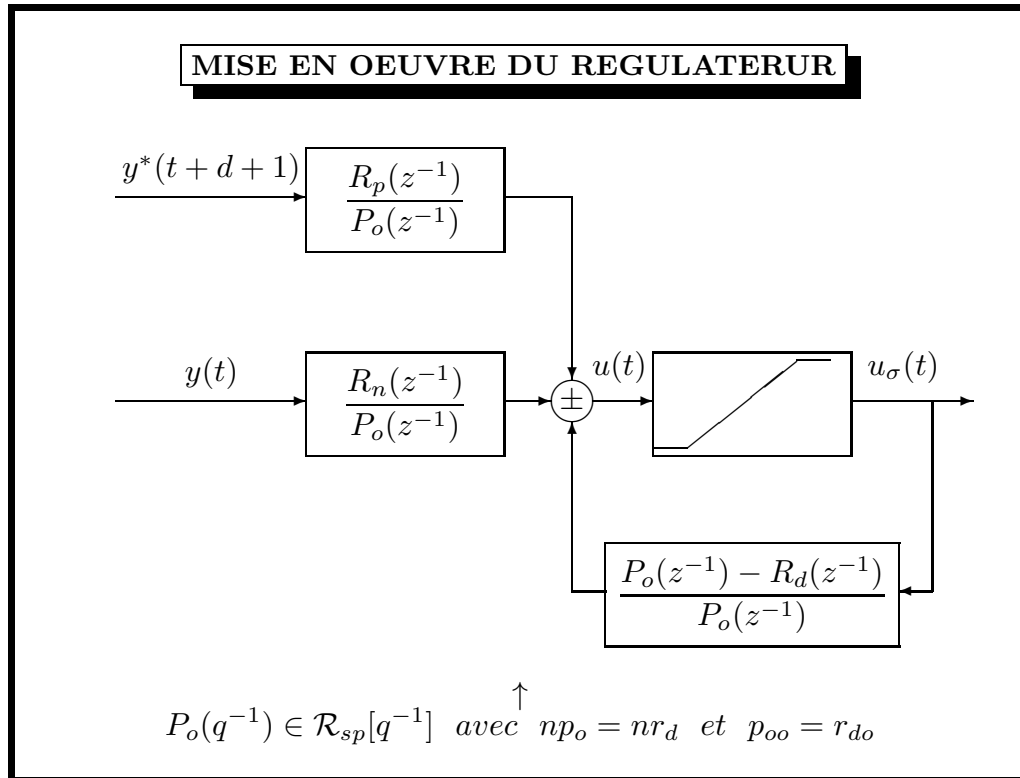
↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

How to properly implement the regulator?



$$u(t) - u(t) + \frac{R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) + \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y(t) = \frac{T_r(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t+d+1)$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \frac{P_o(q^{-1}) - R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) - \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y(t) + \frac{T_r(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t+d+1)$$

comme $P_o(q^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[q^{-1}]$ et $np_o = nr_d$ et $p_{oo} = r_{do}$, toutes les composantes du régulateur sont stables et la composante relative à l'entrée, soit la fonction de transfert

$$\frac{R_d(q^{-1}) - P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})}$$

exhibe un retard pur d'une période d'échantillonnage; et donc sa sortie ne dépend que du passé de la commande.

CONCLUSION

- ♠ Asservissement standard
- ♠ Une démarche rationnelle
- ♠ Analyse systémique
- ♠ Structure usuelle du régulateur
- ♠ Synthèse modale
- ♠ Mise en oeuvre du régulateur

UNE APPROCHE SYSTEME

DANS

UN CONTEXTE POLYNOMIAL