

SYSTEMES ASSERVIS ECHANTILLONNES

Mohammed M'SAAD

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

6 Boulevard du Maréchal Juin

F-14050 Caen cedex

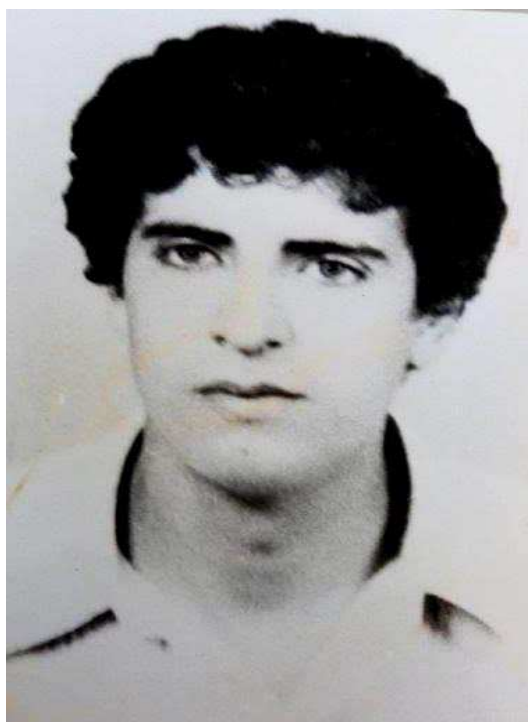
Tel : 02 31 45 27 08

Courriel : mohammed.msaad@ensicaen.fr

©Mohammed M'SAAD

Version octobre 2019

*A LA MEMOIRE
DE
AMINE TAHANI*



- *Si tu chantes la beauté, même dans la solitude du désert, tu trouveras une oreille attentive.*
- *L'espace n'est point ce qui sépare la terre du soleil aux yeux de celui qui se penche pour regarder par les fenêtres de la voie lactée.*

Gibran Khalil Gibran

Avant-propos

L'essence de l'art et la manière d'enseigner est une symbiose entre une équipe pédagogique passionnée avec des élèves dévoués. Une telle symbiose peut être réalisée naturellement en adoptant une approche pédagogique collective où l'élève ingénieur est plutôt un acteur responsable et dynamique qu'un simple apprenant. Le concept de rétroaction peut être exploité judicieusement pour mieux appréhender cette symbiose comme le montre la figure 1 où les blocs $\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}\mathcal{Q}\mathcal{P}$ sont respectivement constitués par les élèves et l'équipe pédagogique en charge de l'enseignement, alors que les blocs $\mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{P}\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}\mathcal{V}\mathcal{C}$ sont respectivement constitués des supports pédagogiques et des outils adoptés pour l'enseignement et l'évaluation des connaissances acquises par les élèves. La séquence $\{c^*(t)\}$ (resp. $\{c(t)\}$) représente les connaissances spécifiques à l'enseignement considéré (resp. les connaissances acquises par les élèves). La séquence $\{v_e(t)\}$ (resp. $\{v_a(t)\}$) englobe toutes les causes réductrices des degrés d'attention et de concentration des élèves (resp. les éventuelles incompétences de l'équipe pédagogique). Quant à la séquence $\{\eta(t)\}$, elle est intrinsèque aux imperfections inéluctables d'une évaluation des connaissances et d'un échange relativement faible entre les élèves et l'équipe pédagogique en charge de l'enseignement.

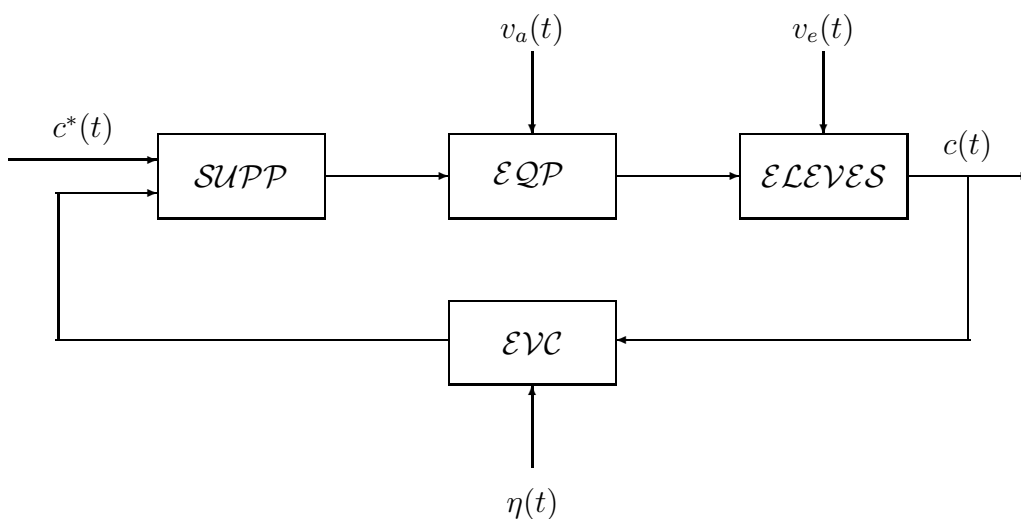


FIGURE 1 – Diagramme fonctionnel d'un enseignement rétroactif

On notera que les composantes dominantes de la séquence $\{v_e(t)\}$ sont essentiellement dues aux lacunes en matière des connaissances préalables et/ou au manque de motivation par rapport à la nature de l'enseignement considéré, qui se manifestent par des absences et des bavardages soutenus. Alors que les composantes dominantes de la séquence $\{v_a(t)\}$ sont principalement dues à un manque de maturité de l'équipe pédagogique et/ou à une divergence de conception de l'enseignement et/ou à une éventuelle défaillance d'une partie de ses membres.

L'ultime motivation d'un enseignement est de doter les élèves des connaissances qui lui sont intrinsèques, indépendamment de toutes les causes susceptibles d'entraver son bon déroulement, soit

$$\{c(t)\} \in \mathcal{V}(\{c^*(t)\}) / \left(\{v_e(t)\}, \{v_a(t)\}, \{\eta(t)\} \right)$$

Un tel objectif est réalisable modulo une appréciation des connaissances préalables des élèves, des causes susceptibles de réduire leur attention et concentration durant toutes les activités associées à l'enseignement considéré et des limites de l'efficacité des supports pédagogiques adoptés. Compte tenu de toutes ces considérations, la viabilité d'un enseignement rétroactif est essentiellement caractérisée par les deux exigences suivantes.

- Une équipe pédagogique mature et soucieuse de l'émancipation de ses élèves qui se distingue par des supports pédagogiques d'excellente qualité, une démarche méthodologique efficace et rationnelle et une écoute continue de ses élèves. Ainsi, elle peut définir d'une manière claire, concise et précise les connaissances spécifiques à l'enseignement considéré, i.e. la séquence $\{c^*(t)\}$, soutenir les élèves qui ont des lacunes ou des difficultés, élaborer bureaux d'étude et des examens qui permettent de réaliser toutes les motivations de l'enseignement tout en appréciant les connaissances acquises par les élèves, i.e. la séquence $\{c(t)\}$, et émerveiller les élèves par la rigueur de la partie fondamentale de l'enseignement et ses retombées sur l'ingénierie des systèmes.
- Des élèves motivés et conscients de la pluralité des compétences requises pour relever les défis d'une ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée indépendamment de leur spécialité. Ils se distinguent par une curiosité scientifique remarquable et un travail méthodique et acharné conformément aux exigences d'un environnement privilégié pour un apprentissage rétroactif.

Un investissement pédagogique doit susciter naturellement la curiosité scientifique des élèves pour mieux les accompagner dans l'acquisition du potentiel disponible sur l'enseignement considéré. Il requiert un engagement pour une veille pédagogique exigeante et un attachement indéfectible à la qualité de l'enseignement. Ce document est une introduction rigoureuse et compréhensive aux problématiques d'analyse et de synthèse des asservissements dans le cas des systèmes linéaires échantillonnés invariants dans le temps. Elle permet d'acquérir le langage, les bases et les limites des systèmes de commande échantillonnés à partir d'une approche système pragmatique. Une attention particulière est réservée aux quantificateurs de performances nominales et de robustesse en stabilité d'un asservissement et à la synthèse modale. Les problèmes et devoirs proposés permettent de développer et conforter les connaissances acquises sur l'analyse et la conception des systèmes asservis.

Aux élèves motivés, ce document offre une belle promenade à cheval dans les champs du potentiel de de l'approche système adoptée pour mieux apprécier le concept d'échantillonnage, le génie de la rétroaction qui est au coeur des sciences de l'ingénieur et les possibilités offertes par le concept de prédiction.



Notations utilisées

$(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$	Ensemble des entiers naturels et ensemble des entiers relatifs.
$(\mathcal{R}, \mathcal{C})$	Ensemble des nombres réels et ensemble des nombres complexes.
$(\mathcal{R}_e(a), \mathcal{I}_m(a))$	Parties réelle et imaginaire du nombre complexe a .
(I_n, \mathcal{I}_{0n})	Matrice identité et matrice nulle de dimension n .
(A^T, A^*)	Transposée et conjuguée transposée de la matrice A .
$\ \cdot \ $	Norme euclidienne.
$\mathcal{E}\{ \cdot \}$	Espérance mathématique.
(T_e, ω_e)	Période et pulsation d'échantillonnage.
(f, f_e)	Fonction continue et fonction échantillonnée sous-jacente.
(ρ, s)	Opérateur différentiel et variable complexe de la transformée de Laplace.
(q^{-1}, z)	Opérateur retard et variable complexe associée à la transformée en z .
$\mathcal{F}(f(t))$	Transformée de Fourier de la fonction f .
$\mathcal{L}(f(t))$	Transformée de Laplace de la fonction f .
$\mathcal{Z}(f_e(t))$	Transformée en z de la séquence $\{f(kT_e)\}$.
$(\mathcal{D}_s, \mathcal{C}_u)$	Disque et cercle de centre l'origine et rayon unitaire du plan complexe en z .
$(\mathcal{D}_{sa}, \mathcal{D}_{sp})$	Domaines de stabilité asymptotique et de stabilité et de performances.
$\mathcal{R}[x]$	Ensemble des polynômes en x à coefficients réels.
$\mathcal{R}_{dn}[x]$	Ensemble des polynômes de degré nul.
$\mathcal{R}_{sa}[x]$	Ensemble des polynômes en x à coefficients réels dont toutes les racines sont situées à l'intérieur du domaine de stabilité.
$\mathcal{R}_{sm}[x]$	Ensemble des polynômes en x à coefficients réels dont toutes les racines sont situées dans le domaine de stabilité avec au moins une racine sur la frontière du domaine de stabilité et dont toutes les racines situées sur la frontière du domaine de stabilité sont simples.
$\mathcal{R}_{su}[x]$	Ensemble des polynômes en x à coefficients réels dont toutes les racines sont simples et situées sur la frontière du domaine de stabilité.
$\mathcal{R}_{sp}[x]$	Ensemble des polynômes en x à coefficients réels dont toutes les racines sont situées à l'intérieur du domaine de stabilité et de performance.
$(u(kT_e), U(z))$	Entrée du système et sa transformée en z .
$(y(kT_e), Y(z))$	Sortie du système et sa transformée en z .
$(v(kT_e), V(z))$	Séquence des perturbations et sa transformée en z .
$(\eta(kT_e t), \mathcal{E}(z))$	Bruit de mesure et sa transformée en z .
$(u^*(kT_e), U^*(z))$	Séquence de référence et sa transformée en z .
$(y^*(kT_e), Y^*(z))$	Séquence de référence et sa transformée en z .
$(\delta(kT_e), \alpha(kT_e))$	Impulsion et échelon unitaires.
$\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$	Réponse impulsionnelle du système.
$\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in \mathbb{R}}$	Réponse fréquentielle du système.
$(\mathcal{G}_\sigma(z), \mathcal{G}_p(z))$	Fonctions de transfert du système.
$(\mathcal{R}_{reg}(z), \mathcal{R}_{tra}(z))$	Fonctions de transfert du régulateur.
$\mathcal{G}_{sas}(s)$	Fonction de transfert du système asservi.
$\mathcal{G}_{ij}(s)$	Elément de la fonctions de transfert du système asservi.
$\mathcal{G}_o(z)$	Fonction de transfert en boucle ouverte.
$\mathcal{D}_r(z)$	Fonction de transfert de la différence de retour.
$(\mathcal{S}(z), \mathcal{T}(z))$	Fonction de sensibilité et fonction de sensibilité complémentaire.
$\mathcal{RS}(z)$	Fonction de sensibilité \times fonction de transfert du régulateur.
$\mathcal{GS}(z)$	Fonction de sensibilité \times fonction de transfert du système.

Abréviations

<i>APRS</i>	Affinement des performances et de la robustesse en stabilité.
<i>CM (SYS)</i>	Configuration des modes du système.
<i>CP (SYS)</i>	Configuration des pôles du système.
<i>CZ (SYS)</i>	Configuration des zéros du système.
<i>CPP</i>	Compensation parfaite des perturbations.
<i>CSESAS</i>	Composantes des signaux d'entrée-sortie du système asservi.
<i>DSC</i>	Dépollution du signal de commande.
<i>EDS</i>	Equation aux différences du système.
<i>EFPB</i>	Ensemble des filtres passe bas.
<i>EFPBAND</i>	Ensemble des filtres passe bande.
<i>EFPH</i>	Ensemble des filtres passe haut.
<i>EP</i>	Erreur de poursuite .
<i>EPES</i>	Erreurs de poursuite d'entrée-sortie.
<i>FTS</i>	Fonction de transfert du système.
<i>IBM</i>	Insensibilité aux bruits de mesure.
<i>MCS</i>	Modèle de commande du système.
<i>MGP</i>	Modèle générateur des perturbations.
<i>MGCI</i>	Modèle générateur des composantes indésirables.
<i>MGC</i>	Modèle générateur de la séquence de consigne.
<i>MGR</i>	Modèle générateur de la séquence de référence.
<i>PID</i>	Régulateur caractérisé par des actions proportionnelle, intégrale et dérivée.
<i>PA</i>	Poursuite admissible.
<i>PM</i>	Précision maximale.
<i>PP</i>	Poursuite parfaite
<i>PRED</i>	Prédicteur.
<i>PSN</i>	Propriété de stabilité nominale.
<i>PSP</i>	Poursuite semi-parfaite.
<i>PSS</i>	Processus stochastique stationnaire.
<i>REG</i>	Régulateur.
<i>REP</i>	Représentation d'état partiel.
<i>RES</i>	Représentation (Réalisation) d'état du système.
<i>RHS</i>	Réponse harmonique du système.
<i>RIS</i>	Réponse impulsionnelle du système.
<i>RPD</i>	Réalisation des performances dynamiques.
<i>RR</i>	Réalisation du régulateur.
<i>SAS</i>	Système asservi.
<i>SVAI</i>	Séquences de variables aléatoires indépendantes.
<i>SAZI</i>	Ensemble des séquences assimilables à un zéro ingénieur.
<i>SYS</i>	Système.

Table des matières

1	Introduction	17
2	Opérateur retard et transformée en z	23
2.1	Opérateur retard	23
2.2	Transformée en z	25
2.3	Transformées en z élémentaires	26
2.4	Propriétés de la transformée en z	29
2.5	Inversion de la transformée en z	34
2.6	Conclusion	36
2.7	Problèmes	36
3	Échantillonnage et reconstruction	41
3.1	Echantillonnage	42
3.2	Théorème de Shannon	48
3.3	Reconstruction physique	55
3.4	Conclusion	57
3.5	Problèmes	58
4	Modélisation	61
4.1	Réponse impulsionnelle	65
4.2	Réponse harmonique	67
4.3	Fonction de transfert	69
4.4	Equation aux différences	75
4.5	Représentation d'état	76
4.6	Réalisations d'état	80
4.7	Modélisation des perturbations	86
4.8	Systèmes à retard	87
4.9	Conclusion	90
4.10	Problèmes	91
5	Stabilité	97
5.1	Stabilité externe.	99
5.1.1	Stabilité \mathcal{EBSB}	99
5.1.2	Stabilité externe.	100
5.1.3	Limitation fondamentale.	102
5.2	Stabilité interne.	104
5.2.1	Stabilité au sens de Lyapunov.	104
5.2.2	Illustration usuelle.	105
5.2.3	Critère de Lyapunov.	107

5.3	Test de stabilité	110
5.4	Résultats remarquables	113
5.5	Conclusion.	114
5.6	Problèmes.	115
6	Systèmes asservis	119
6.1	Le système	120
6.2	Le régulateur	122
6.3	Le système de commande	123
6.3.1	Performances entrée-sortie	125
6.3.2	Fonctions de transfert remarquables	126
6.3.3	Interprétation systemique	127
6.3.4	Régulateurs admissibles	133
6.4	Robustesse en stabilité	143
6.4.1	Critère de Nyquist	143
6.4.2	Théorème des petits gains	147
6.5	Modelage des fonctions de sensibilité	151
6.6	Commande avec modèle interne	152
6.7	Conclusion	155
6.8	Problèmes	156
7	Commande modale	163
7.1	Synthèse modale	165
7.2	Commande PID	172
7.3	Mise en œuvre du régulateur	175
7.4	Commande d'un réacteur chimique	177
7.5	Conclusion	185
7.6	Problèmes	186
8	Conclusion	191
9	Devoirs	195

Chapitre 1

Introduction

La révolution continue du circuit intégré a particulièrement impulsé un développement des technologies des sciences de l'information dont la théorie des systèmes échantillonnés représente l'essence de l'innovation dans ce domaine des sciences de l'ingénieur. Les ingénieurs disposent actuellement d'une théorie rigoureuse des systèmes linéaires échantillonnés qui traite tous les problèmes fondamentaux auxquels ils sont confrontés, à savoir la modélisation, la commande et la supervision des systèmes dynamiques. Les applications industrielles réussies ont imposé des valeurs scientifiques telles que le traitement numérique du signal, la régulation industrielle par calculateur et les interfaces *Homme* \rightleftharpoons *Machine* pour la supervision des systèmes dynamiques.

L'ingénierie des systèmes linéaires échantillonnés a été développée à partir d'une recherche méthodologique vigoureuse comme en témoignent les conceptions assistées par ordinateur disponibles sur le marché des asservissements industriels. La synthèse d'un système de commande se fait en trois étapes comme l'indique la figure 1.1.

- La première étape consiste à élaborer un modèle de commande qui représente au mieux le comportement d'entrée-sortie du système par rapport aux performances requises comme l'indique la figure 1.2. On dispose pour ce faire de la théorie de l'identification des systèmes dont les ouvrages [11] et [12] représentent le plus récent sinon le meilleur état de l'art. Les signaux d'entrée-sortie sont préalablement traités pour réduire les effets des perturbations qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure inévitables. Toutes les connaissances disponibles sur le système doivent être prises en compte aussi bien pour la spécification de la structure du modèle d'identification que pour sa validation. Cette dernière est faite à partir des propriétés de la méthode d'identification considérée, des connaissances disponibles et des performances requises du système de commande.
- La deuxième étape consiste à déterminer les paramètres d'un régulateur en fonction des performances requises. Pour ce faire, on utilise la théorie de la commande que l'on peut agréablement lire dans les ouvrages d'enseignement des grandes écoles d'automatique ([2], [3], [11], [23]). Notons que la spécification des performances à partir du cahier des charges constitue la tâche essentielle du concepteur qui doit formuler l'ultime motivation d'un problème de commande, *i.e. maintenir la séquence de sortie du système dans un voisinage de la séquence de référence indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure inévitables*, en un objectif de commande réalisable. Pour ce faire, une bonne culture de la théorie de la commande associée à une bonne conception assistée par ordinateur sont requises.

- La troisième étape consiste à mettre en œuvre le régulateur déterminé sur un ordinateur fonctionnant en temps réel. Pour ce faire, il faut faire partie du club des fans de programmation, disposer d'une bonne librairie d'analyse numérique et accorder une attention à la veille technologique en matière de systèmes embarqués.

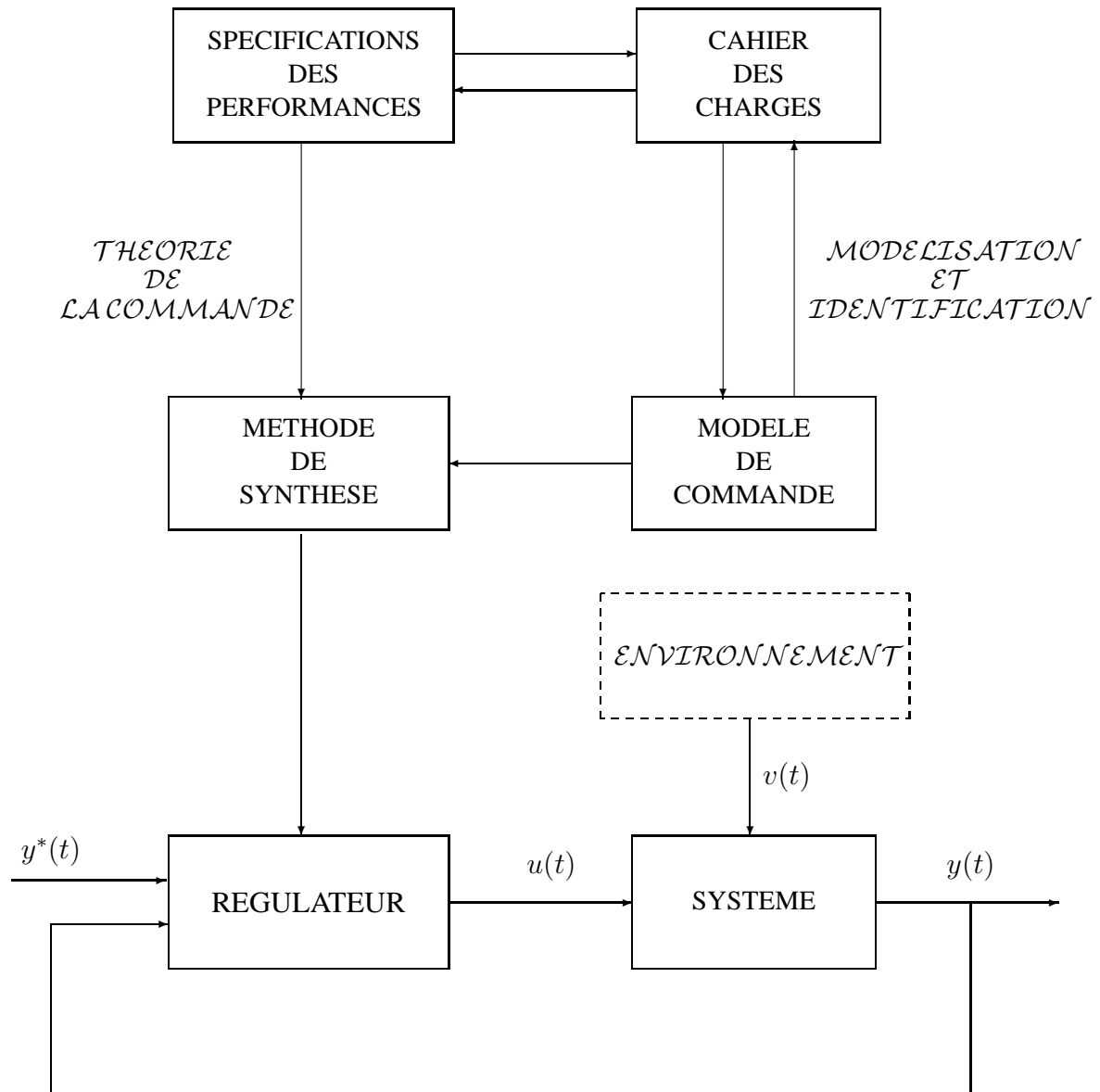


FIGURE 1.1 – Le problème d'automatique

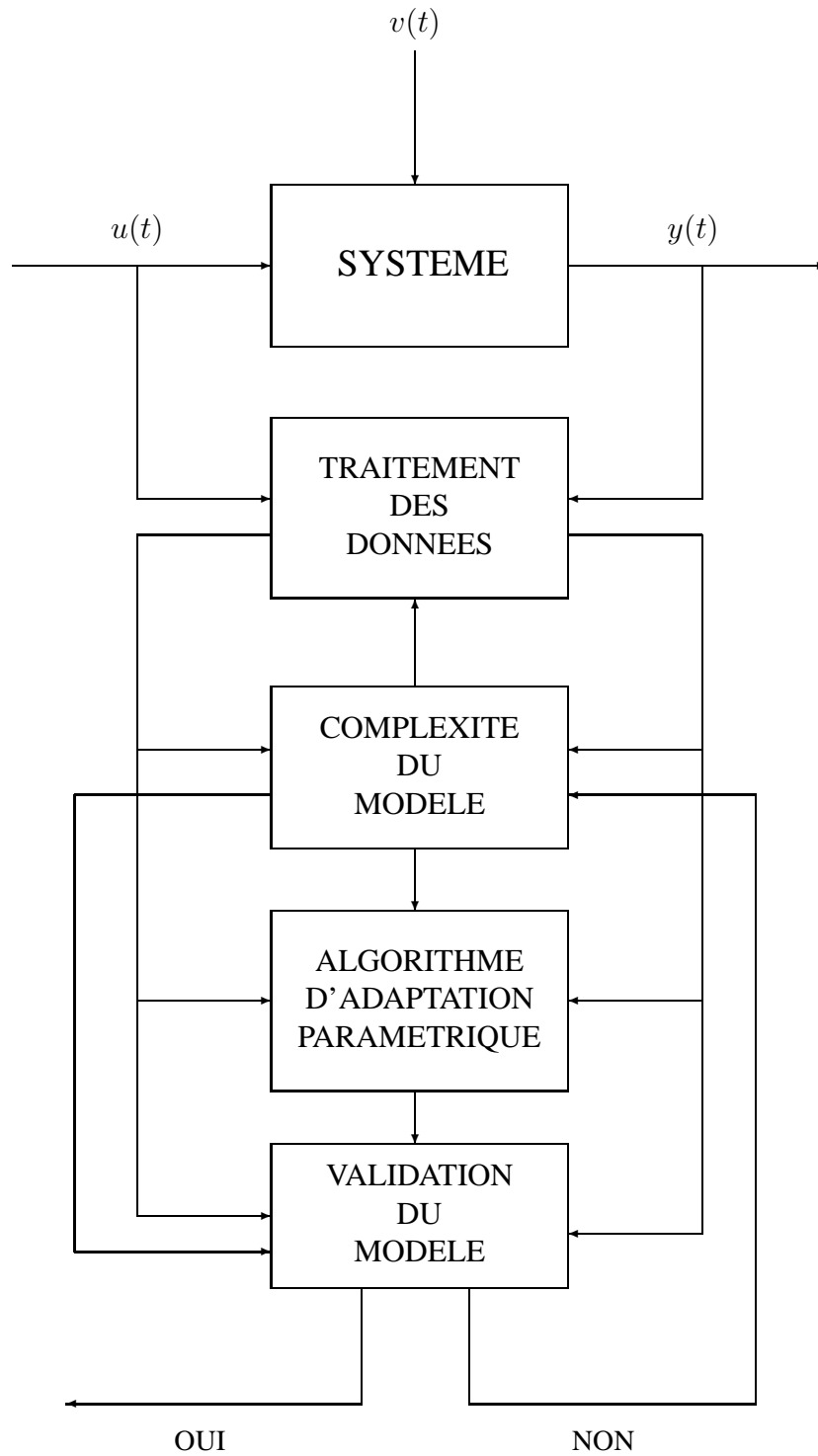


FIGURE 1.2 – Identification des systèmes

Cet ouvrage présente d'une manière compréhensive les bases des systèmes asservis échantillonnés à partir des études vigoureuses d'analyse et de synthèse des systèmes échantillonnés. Son organisation est conforme à la démarche naturelle d'un ingénieur qui souhaite acquérir un potentiel sur la modélisation, la stabilité et la commande des systèmes échantillonnés pour mieux apprécier cette lapalissade des temps modernes : "donnez moi un calculateur et je maîtriserais le monde". Outre une présentation concise des outils mathématiques spécifiques aux systèmes échantillonnés, on distingue quatre parties principales.

- La première partie concerne les problèmes d'échantillonnage des signaux continus et la reconstruction des signaux échantillonnés. Ceci permet de mieux apprécier les deux résultats fondamentaux qui constituent l'essence du concept d'échantillonnage. Le premier résultat est le fruit d'une analyse spectrale d'une fonction échantillonnée alors que le second résultat n'est autre que le célèbre théorème de Shannon.
- La seconde partie est consacrée aux problèmes de modélisation et de stabilité des systèmes échantillonnés. On traite d'abord le problème de représentation, en l'occurrence la réponse impulsionnelle et la réponse harmonique, la fonction de transfert, l'équation aux différences et la réalisation d'état, en accordant une attention particulière aux systèmes qui exhibent un retard et à la modélisation des perturbations. Les concepts de stabilité externe et interne sont ensuite présentés d'une manière concise à partir de la réponse impulsionnelle du système et la trajectoire d'état du système autonome sous-jacent. La vraisemblance entre la stabilité externe et la stabilité entrée bornée-sortie bornée \mathcal{EBSB} est particulièrement mise en exergue. La présentation de la stabilité interne est essentiellement faite en adoptant une approche de Lyapunov qui s'est imposée par sa simplicité et son efficacité.
- La troisième partie est dédiée au problème d'automatique à partir d'une classe de systèmes asservis suffisamment générale pour englober tous les asservissements disponibles. Les problèmes de stabilité et de performances sont étudiés à partir d'une approche systématique judicieuse. On montre que les fonctions de sensibilité usuelles (resp. la dynamique de poursuite et les diverses composantes de la sortie du système) des asservissements sont des quantificateurs de performances nominales et de robustesse en stabilité (resp. des quantificateurs de poursuite) qui doivent être utilisées dans toute démarche méthodologique efficace et rationnelle. Les limitations intrinsèques la commande avec modèle interne ont été aisément mises en exergue à partir des résultats fondamentaux obtenus.
- La quatrième partie est consacrée à la synthèse modale des systèmes asservis, i.e. l'assignement des modes du système asservi. Quelques éléments de régulation industrielle sont présentés pour mieux appréhender ses limitations, notamment la sensibilité des systèmes de commande PID aux bruits de mesure inéluctables et l'invariance des modes du système par une loi de commande avec modèle interne. Un problème d'asservissement de température d'un réacteur chimique est traité pour montrer la capacité d'une synthèse modale à réaliser aisément un bon compromis performances/robustesse par rapport aux techniques dominantes de régulation industrielle, en l'occurrence la commande PID et la commande avec modèle interne.

Chapitre 2

Opérateur retard et transformée en z

L'analyse et la synthèse des systèmes linéaires échantillonnés ont été principalement développées à partir de deux outils fondamentaux, en l'occurrence l'opérateur retard et la transformée en z . L'opérateur retard (resp. la transformée en z) est pour les systèmes échantillonnés ce qu'est l'opérateur différentiel (resp. la transformée de Laplace) pour les systèmes continus. Ce chapitre présente d'une manière compréhensible ces deux outils mathématiques.

2.1 Opérateur retard

L'opérateur retard est à la base d'une algèbre d'analyse et de synthèse des systèmes échantillonnés. Il est défini par

$$\begin{aligned} q^{-1} / \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} &\longrightarrow \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \{f(kT_e)\} &\longrightarrow \{f_{r1}(kT_e)\} \end{aligned}$$

avec

$$f_{r1}(kT_e) = f((k-1)T_e) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Pour mieux apprécier un telle définition, on notera que l'opérateur retard est la cellule élémentaire de l'approche systèmes dans le contexte des systèmes échantillonnés que l'on peut représenter comme l'indique la figure 2.1.

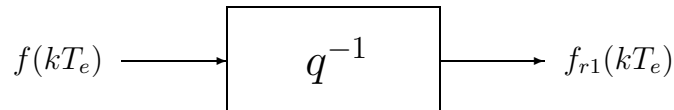


FIGURE 2.1 – Représentation d'un retard unitaire

Remarque 2.1 On peut définir un retard de i périodes d'échantillonnage comme suit

$$\begin{aligned} q^{-i} / \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} &\longrightarrow \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \{f(kT_e)\} &\longrightarrow \{f_{ri}(kT_e)\} \end{aligned}$$

avec

$$f_{ri}(kT_e) = f((k-i)T_e) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

La séquence $\{f_{ri}(kT_e)\}$ est communément notée $\{f((k-i)T_e)\}$ pour des considérations de simplicité ; la propriété suivante permet de conforter cette notation

$$\frac{\partial}{\partial f((k-j)T_e)} \left(f((k-i)T_e) \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

L'opérateur retard est linéaire, il permet de définir un opérateur polynomial à partir de l'anneau des polynômes en l'opérateur retard à coefficients réels, i.e. $\mathbb{R}[q^{-1}]$, comme suit

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) / \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\} &\longrightarrow \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ \{f(kT_e)\} &\longrightarrow \{f_a(kT_e)\} \end{aligned}$$

avec

$$f_a(kT_e) = A(q^{-1}) \left(f(kT_e) \right) = \sum_{i=0}^{na} a_i f_{ri}(kT_e) = \sum_{i=0}^{na} a_i f((k-i)T_e)$$

Comme l'opérateur différentiel pour les systèmes continus, l'opérateur retard permet de récrire les équations aux différences d'une manière plus concise et effectuer aisément le calcul aux différences dans le contexte des systèmes échantillonnés. Les propriétés remarquables suivantes sont au coeur de cette aisance.

P1. $\forall (A(q^{-1}), B(q^{-1})) \in \mathbb{R}[q^{-1}] \times \mathbb{R}[q^{-1}]$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$(\alpha A(q^{-1}) + \beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) = (\alpha A(q^{-1})) (f(kT_e)) + (\beta B(q^{-1})) (f(kT_e))$$

P2. $\forall (A(q^{-1}), B(q^{-1})) \in \mathbb{R}[q^{-1}] \times \mathbb{R}[q^{-1}]$, on a

$$A(q^{-1}) (B(q^{-1}) (f(kT_e))) = (A(q^{-1})B(q^{-1})) (f(kT_e)) = B(q^{-1}) (A(q^{-1}) (f(kT_e)))$$

P3. $\forall (F(q^{-1}), G(q^{-1})) \in \mathbb{R}[q^{-1}]^* \times \mathbb{R}[q^{-1}]$, on a

$$\frac{1}{F(q^{-1})} \left(G(q^{-1}) \left(f(kT_e) \right) \right) = G(q^{-1}) \left(\frac{1}{F(q^{-1})} \left(f(kT_e) \right) \right) = \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} \left(f(kT_e) \right)$$

Remarque 2.2 La propriété suivante permet de mieux assimiler le concept d'opérateur polynomial si besoin est

$$\frac{\partial}{\partial f((k-i)T_e)} \left(A(q^{-1}) \left(f(kT_e) \right) \right) = a_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}$$

On n'insistera jamais assez sur la nature produit de convolution de l'opérateur polynomial pour mieux le maîtriser.

2.2 Transformée en z

Dans le contexte de la théorie des systèmes, on utilise plutôt la transformée en z unilatérale dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition 2.1 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction temporelle continue, la transformée en z unilatérale de f est une fonction complexe $F : \{z \in \mathbb{C} / |z| > R_f\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par la série de Laurent

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)z^{-k}$$

où R_f désigne le rayon de convergence.

Le domaine de convergence d'une transformée en z est complètement caractérisé à partir du résultat suivant

Résultat 2.1 La série de Laurent définissant la transformée en z converge pour tout nombre complexe satisfaisant la condition

$$|z| > R_f \text{ avec } R_f = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(kT_e)|}$$

Et si la séquence $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée à l'infini par une fonction exponentielle, i.e.

$$\exists(n^*, \alpha, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |f(kT_e)| \leq \alpha r^{kT_e} \text{ pour tout } k > n^*$$

alors $F(z)$ converge au moins pour toutes les valeurs de z telles que $|z| > R_f$.

Par ailleurs, il est possible de remonter à la séquence $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ à partir de sa transformée en z comme l'indique le résultat suivant

Résultat 2.2 La séquence $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est reliée à sa transformée en z par la relation intégrale

$$f(nT_e) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} F(z) dz$$

où C est un contour fermé entourant l'origine du plan complexe z , orienté dans le sens direct et situé complètement dans le domaine de convergence de $F(z)$, c'est-à-dire toujours situé à une distance supérieure au rayon de convergence R_f par rapport à l'origine.

Preuve. Ce résultat est principalement dû au théorème de Cauchy qui stipule que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^k dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En effet, on a

$$z^{n-1} F(z) = z^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k+n-1}$$

soit

$$z^{n-1}F(z) = f(0)z^{n-1} + f(T_e)z^{n-2} + \dots + f(nT_e)z^{-1} + \dots$$

On aura alors

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{n-1}F(z)dz = \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{-1}dz \right] f(nT_e)$$

qui n'est autre que le résultat recherché.

CQFD.

Remarque 2.3 Comme seules les valeurs de la fonction aux instants d'échantillonnage kT_e sont utilisées, la transformée en z est complètement définie par la séquence $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$, on peut alors écrire

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT_e)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)z^{-k} \text{ pour } |z| > R_f$$

C'est pourquoi, on indique généralement la transformée en z indifféremment sous les formes $F(z)$, $\mathcal{Z}\{f(t)\}$, $\mathcal{Z}\{F(s)\}$ et $\mathcal{Z}\{f(kT_e)\}$ où $F(s)$ désigne la transformée de Laplace unilatérale de f , soit

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ pour } \Re(s) > r_f$$

2.3 Transformées en z élémentaires

Dans ce qui suit, on détermine à titre d'exercice quelques transformées en z d'un ensemble de signaux usuels.

- Impulsion unitaire

$$f(kT_e) = \delta(kT_e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \implies F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT_e)z^{-k} = 1$$

- Echelon unitaire

$$\begin{aligned} f(t) = \alpha(t) \implies F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(kT_e)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

- Rampe unitaire

$$\begin{aligned} f(t) = r(t)\alpha(t) \implies F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} kT_e z^{-k} \\ &= T_e \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \\ &= \frac{T_e z}{(z-1)^2} \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

- Fonctions exponentielles

$$\begin{aligned} f(t) = a^t \alpha(t) \implies F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{T_e} z^{-1})^k \\ &= \frac{z}{z - a^{T_e}} \text{ pour } |z| > |a^{T_e}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) = e^{-at} \alpha(t) \implies F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT_e} z^{-1})^k \\ &= \frac{z}{z - e^{-aT_e}} \text{ pour } |z| > \frac{1}{e^{aT_e}} \end{aligned}$$

- Fonctions harmoniques

$$\begin{aligned} f(t) = \sin(\omega t) \alpha(t) \implies F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\omega k T_e) z^{-k} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega k T_e} z^{-k} - e^{-j\omega k T_e} z^{-k}) \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T_e} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T_e} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2 \cos(\omega T_e) z + 1} \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) = \cos(\omega t) \alpha(t) \implies F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega k T_e) z^{-k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega k T_e} z^{-k} + e^{-j\omega k T_e} z^{-k}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T_e} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T_e} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{z^2 - \cos(\omega T_e) z}{z^2 - 2 \cos(\omega T_e) z + 1} \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

Remarque 2.4 Dans la plupart des applications des systèmes échantillonnés, la transformée en z peut être mise sous la forme d'une fraction rationnelle propre en z comme l'indique la table 2.1 des transformées en z usuelles, soit

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{nb} + b_1 z^{nb-1} + \dots + b_{nb-1} z + b_{nb}}{z^{na} + a_1 z^{na-1} + \dots + a_{na-1} z + a_{na}}$$

ou d'une manière équivalente sous la forme d'une fraction rationnelle en z^{-1} qui pourrait être plus appropriée pour une certaine conception des systèmes échantillonnés.

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{-na+nb} + b_1 z^{-na+nb-1} + \dots + b_{nb} z^{-na}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na-1} z^{-na+1} + a_{na} z^{-na}}$$

On notera que les racines des polynômes $B(z)$ et $A(z)$ sont respectivement les zéros et les pôles de $F(z)$

Signal continu	Transformée de Laplace	Transformée en z
$\alpha(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t\alpha(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}t^2\alpha(t)$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-at}\alpha(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$te^{-at}\alpha(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$\frac{t^k}{k!}e^{-at}\alpha(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^k \left(\frac{z}{z-e^{-aT_e}}\right)$
$\sin(\omega t)\alpha(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2 \cos(\omega T_e)z + 1}$
$\cos(\omega t)\alpha(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2 \cos(\omega T_e)z + 1}$
$\sin(\omega t)e^{-at}\alpha(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT_e} \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2 \cos(\omega T_e)e^{-aT_e}z + e^{-2aT_e}}$
$\cos(\omega t)e^{-at}\alpha(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2 - \cos(\omega T_e)e^{-aT_e}z}{z^2 - 2 \cos(\omega T_e)e^{-aT_e}z + e^{-2aT_e}}$

TABLE 2.1 – Table des transformées en z usuelles

2.4 Propriétés de la transformée en z

On donne ci-dessous les propriétés fondamentales de la transformée en z . Pour ce faire, on utilisera des fonctions temporelles continues f , g et h dont les transformées sont respectivement données par F , G et H . Les rayons de convergence de $F(z)$, $G(z)$ et $H(z)$ seront respectivement notés R_f , R_g et R_h .

- **Linéarité.** Soient α et β deux nombres complexes, on a

$$\mathcal{Z} \{ \alpha f(t) + \beta g(t) \} = \alpha \mathcal{Z} \{ f(t) \} + \beta \mathcal{Z} \{ g(t) \} = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

Notons que le rayon de convergence de $\alpha F(z) + \beta G(z)$ est égal à $\max(R_f, R_g)$.

- **Translation temporelle.** Soit n un entier naturel, on a

$$\mathcal{Z} \{ f(t + nT_e) \} = z^n \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT_e) z^{-k} \right)$$

et

$$\mathcal{Z} \{ f(t - nT_e) \} = z^{-n} F(z)$$

Preuve. Ces résultats peuvent être obtenus à partir des définitions de la transformée en z . En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{ f(t + nT_e) \} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e + nT_e) z^{-k} \\ &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} f((k+n)T_e) z^{-(k+n)} \\ &= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT_e) z^{-k} \right] \\ &= z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT_e) z^{n-k} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{ f(t - nT_e) \} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e - nT_e) z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f((k-n)T_e) z^{-(k-n)} \\ &= z^{-n} \left[\sum_{k=-n}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \right] \\ &= z^{-n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \right] = z^{-n} F(z) \end{aligned}$$

- **Translation fréquentielle.** Il s'agit d'une translation complexe donnée par les propriétés suivantes

$$\mathcal{Z} \{e^{-at} f(t)\} = F(e^{aT_e} z) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} \{e^{at} f(t)\} = F(e^{-aT_e} z)$$

Preuve. Ces résultats sont naturellement obtenus à partir des définitions de la transformée en z comme suit

$$\mathcal{Z} \{e^{-at} f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_e} f(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) (e^{aT_e} z)^{-k} = F(e^{aT_e} z)$$

et

$$\mathcal{Z} \{e^{at} f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT_e} f(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) (e^{-aT_e} z)^{-k} = F(e^{-aT_e} z)$$

- **Théorème de la valeur initiale.** Si $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existe, alors la valeur initiale de f est donnée par

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Preuve. Ce résultat est une simple conséquence du développement suivant

$$F(z) = f(0) + \frac{f(T_e)}{z} + \frac{f(2T_e)}{z^2} + \dots + \frac{f(nT_e)}{z^n} + \dots$$

Il permet de vérifier rapidement si le calcul d'une transformée en z est erroné.

- **Théorème de la valeur finale.** Si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe, i.e. tous les pôles de $F(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité à l'exception éventuelle d'un pôle simple sur le cercle unité, alors on aura

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

Preuve. Notons d'abord que l'hypothèse faite sur les pôles de $F(z)$ assure l'existence de $\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e)$. Par ailleurs, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f(kT_e) - f(kT_e - T_e)) z^{-k} = (1 - z^{-1})F(z) = \frac{z-1}{z} F(z)$$

Et comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f(kT_e) - f(kT_e - T_e)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e)$$

on aura bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

- **Théorème de sommation.** Il s'agit d'un résultat concernant l'intégration discrète, soit

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{k=0}^n f(kT_e) \right\} = \frac{z}{z-1} F(z) \text{ pour tout } n > 1$$

Preuve. Posons

$$g(nT_e) = \sum_{k=0}^n f(kT_e)$$

on a

$$g(nT_e) = g((n-1)T_e) + f(nT_e)$$

soit

$$G(z) = z^{-1}G(z) + F(z) \iff G(z) = \frac{z}{z-1}F(z)$$

Une application naturelle consiste à calculer la somme des termes d'une série convergente, soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} F(z) \right] = F(1)$$

- **Dérivation complexe.** Considérons l'opérateur $-T_e z \frac{d}{dz}$, on a

$$\mathcal{Z} \{ t^m f(t) \alpha(t) \} = \left(-T_e z \frac{d}{dz} \right)^m \mathcal{Z} \{ f(t) \alpha(t) \}$$

Preuve. Notons que si F converge sur \mathcal{D}_f , alors $\left(\frac{d}{dz} \right)^i F$ converge sur \mathcal{D}_f pour tout $i \in \mathcal{N}$. Par ailleurs, on a

$$-T_e z \frac{d}{dz} F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT_e) f(kT_e) z^{-k} \text{ soit } \mathcal{Z} \{ t f(t) \alpha(t) \} = -T_e z \frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{ f(t) \alpha(t) \}$$

On peut généraliser ce résultat en appliquant successivement l'opérateur $\left(-T_e z \frac{d}{dz} \right)$ à la transformée en z de la fonction f .

La dérivation complexe peut être utilisée pour calculer la transformée en z d'une fonction temporelle à partir de celle de sa dérivée, e.g.

$$\mathcal{Z} \{ t \alpha(t) \} = -T_e z \frac{d}{dz} \mathcal{Z} \{ \alpha(t) \} = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

- **Intégration complexe.** Considérons la séquence $\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$ définie par

$$g(kT_e) = \begin{cases} \frac{f(kT_e)}{kT_e} & \text{pour } k \neq 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

en supposant que $\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e)$ existe et est finie, on a

$$\mathcal{Z} \{g(kT_e)\} = \frac{1}{T_e} \int_z^\infty \left(\frac{F(\eta)}{\eta} \right) d\eta + \lim_{k \rightarrow 0} g(kT_e)$$

Preuve. Notons d'abord que

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT_e) z^{-k}$$

on aura alors

$$\frac{d}{dz} G(z) = -\frac{1}{T_e} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k-1} = -\frac{z^{-1}}{T_e} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} = -\frac{F(z)}{T_e z}$$

soit

$$\int_z^\infty \left(\frac{d}{dz} G(z) \right) dz = G(\infty) - G(z) = -\frac{1}{T_e} \int_z^\infty \left(\frac{F(\eta)}{\eta} \right) d\eta$$

- **Dérivation et intégration par rapport à un paramètre.** On a

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right\} = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

et

$$\mathcal{Z} \left[\int_b^c f(t, a) da \right] = \int_b^c F(z, a) da$$

Preuve. Ces résultats sont naturellement obtenus à partir de la définition de la transformée en z . En effet, on a

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} f(kT_e, a) \right\} z^{-k} = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

soit

$$\mathcal{Z} \left[\int_b^c f(t, a) da \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_b^c f(kT_e, a) da \right] z^{-k} = \int_b^c F(z, a) da$$

On peut utiliser ce résultat pour calculer la transformée en z de la fonction f définie par $f(t) = t^2 e^{-at} \alpha(t)$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{t^2 e^{-at} \alpha(t)\} &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (-te^{-at} \alpha(t)) \right\} = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{Z} \{-te^{-at} \alpha(t)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{T_e e^{-aT_e} z^{-1}}{(1 - e^{-aT_e} z^{-1})^2} \\ &= \frac{T_e^2 e^{-aT_e} ((1 + e^{-aT_e} z^{-1}) z^{-1})}{(1 - e^{-aT_e} z^{-1})^3} \end{aligned}$$

- **Théorèmes de convolution.** Considérons le produit de convolution

$$h(kT_e) = (f * g)(kT_e) = \sum_{i=0}^k f(iT_e) g((k-i)T_e)$$

on a

$$\mathcal{Z} \{h(t) \alpha(t)\} = \mathcal{Z} \{f(t) \alpha(t)\} \mathcal{Z} \{g(t) \alpha(t)\}$$

Preuve. Ce résultat est obtenu en utilisant la définition de la transformée en z comme suit

$$\begin{aligned} H(z) = \mathcal{Z} \{h(t) \alpha(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k f(iT_e) g((k-i)T_e) \right) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} f(iT_e) g((k-i)T_e) \right) z^{-k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f(iT_e) z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} g((k-i)T_e) z^{-(k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f(iT_e) z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} g(jT_e) z^{-j} = F(z)G(z) \end{aligned}$$

Par ailleurs, considérons le produit de deux fonctions défini par

$$h(t) = f(t)g(t)$$

on a

$$\mathcal{Z} \{h(t) \alpha(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \eta^{-1} G(\eta) F(\eta^{-1} z) d\eta \text{ pour } R_g < |\eta| < \frac{|z|}{R_f}$$

Preuve. Ce résultat est obtenu en utilisant la définition de la transformée en z et de son inverse comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{h(t) \alpha(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) g(kT_e) z^{-k} \text{ pour } |z| > R_h \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \left(\frac{1}{2\pi j} \oint_C \eta^{k-1} G(\eta) d\eta \right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{h(t)\alpha(t)\} &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\mathcal{C}} \eta^{k-1} G(\eta) f(kT_e) z^{-k} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \eta^{-1} G(\eta) \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) (\eta^{-1} z)^{-k} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \eta^{-1} G(\eta) F(\eta^{-1} z) d\eta\end{aligned}$$

où \mathcal{C} est un cercle de centre l'origine contenue dans le domaine défini par

$$R_g < |\eta| < \frac{|z|}{R_f} \text{ avec } |z| > R_h$$

- **Théorème de Parseval.** On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f(kT_e))^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz$$

Preuve. Ce résultat est une conséquence directe du théorème de convolution et du théorème de sommation. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} (f(kT_e))^2 &= \lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{Z}\{f(t)f(t)\alpha(t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz \text{ pour } R < |z| < \frac{1}{R}\end{aligned}$$

2.5 Inversion de la transformée en z

Les transformées en z usuelles sont données dans des tables que l'on peut utiliser pour la détermination des transformées en z inverses mais ces inversions ne sont pas toujours évidentes lorsque la transformée en z est relativement complexe pour être facilement décomposée à partir des transformées en z qui figurent dans les tables disponibles. On distingue quatre méthodes qui sont généralement utilisées pour l'inversion des transformées en z et donc pour la résolution des équations aux différences à partir d'équations algébriques appropriées

- **Utilisation des tables.** Cette méthode consiste tout simplement à décomposer la transformée en z à inverser à partir des transformées en z disponibles dans les tables, soit

$$F(z) = \frac{b_o \prod_{i=1}^{nb} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{na} (z - p_i)} = \sum_{i=1}^n F_i(z)$$

où $\{z_i\}_{i \in [1, nb]}$ et $\{p_i\}_{i \in [1, na]}$ sont respectivement les zéros et les pôles de $F(z)$ alors que

$F_i(z)$ est une transformée en z que l'on peut déterminer relativement facilement à partir des transformées en z disponibles dans les tables. L'inversion est alors simplement obtenue à partir des transformées en z inverses $f_i(t)$ des $F_i(z)$, soit

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$$

- **Division euclidienne.** Les transformées en z communément utilisées en traitement de signal et en automatique peuvent se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle propre que l'on peut récrire sous la forme

$$F(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na-1} z^{-na+1} + a_{na} z^{-na}}$$

On peut alors déterminer la séquence $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$ en effectuant une division euclidienne de $B(z^{-1})$ par $A(z^{-1})$. En effet, on a

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na-1} z^{-na+1} + a_{na} z^{-na}}$$

soit

$$\left(\sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} \right) = \left(1 + \sum_{j=1}^{na} a_j z^{-j} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \right)$$

et donc

$$f(kT_e) = b_k - \sum_{i=1}^{na} a_i f((k-i)T_e)$$

où $b_i = 0$ pour $i > nb$ et $i < 0$ et $a_i = 0$ pour $i > na$ et $i < 0$.

- **Equation aux différences.** Cette méthode consiste à effectuer une simulation à partir d'une équation aux différences associée à la transformée en z à inverser. En effet, on peut récrire une transformée en z sous la forme

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{na} a_j z^{-j}} \Delta(z) \text{ avec } \Delta(z) = 1$$

ou d'une manière équivalente

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{na} a_j z^{-j} \right) F(z) = \left(\sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} \right) \Delta(z)$$

On aura donc un algorithme que l'on peut mettre en oeuvre relativement facilement sur un quelconque calculateur comme suit

$$f(kT_e) = - \sum_{i=1}^{na} a_i f((k-i)T_e) + \sum_{i=0}^{nb} b_i \delta((k-i)T_e)$$

- **Méthode des résidus.** Elle est basée sur la transformée en z inverse, soit

$$f(nT_e) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{n-1} F(z) dz$$

Pour ce faire, il suffit de choisir un contour qui entoure en plus les pôles de $F(z)$ et d'appliquer le théorème des résidus. On aura donc

$$f(kT_e) = \sum_{p_i} \left\{ \mathcal{R}\acute{e}s\acute{i}dus \text{ de } z^{k-1} F(z) \right\}_{z=p_i}$$

avec

$$\left\{ \mathcal{R}\acute{e}s\acute{i}dus \text{ de } z^{k-1} F(z) \right\}_{z=p_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m_i - 1} \left((z - p_i)^{m_i} z^{k-1} F(z) \right)$$

où p_i est un pôle multiple d'ordre m_i de $z^{k-1} F(z)$.

2.6 Conclusion

La motivation principale de ce chapitre a été de présenter les outils mathématiques incontournables pour l'étude des systèmes linéaires invariants échantillonnés, notamment l'opérateur retard et la transformée en z . L'opérateur retard a été défini et ses propriétés usuelles ont été données. La définition de la transformée en z a été précisée avec une attention particulière sur son domaine de convergence et l'existence d'une transformée en z inverse. Les transformées en z des signaux élémentaires ont été déterminées à titre d'exercice. Toutes les propriétés de la transformée en z ont été établies. Les méthodes d'inversion de la transformée en z ont été présentées.

2.7 Problèmes

Problème 2.1 Montrer que la transformée en z de la fonction harmonique généralisée f définie par

$$f(t) = r^t \cos(\omega t) \alpha(t) \text{ avec } r > 0$$

peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \frac{z(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_2)} \text{ pour } |z| > |r^{T_e}|$$

avec

$$z_1 = r^{T_e} \cos(\omega T_e)$$

$$p_1 = r^{T_e} (\cos(\omega T_e) + j \sin(\omega T_e)) \text{ et } p_2 = r^{T_e} (\cos(\omega T_e) - j \sin(\omega T_e))$$

On étudiera le comportement de la fonction harmonique généralisée f pour $r = 1$, $r > 1$ et $r < 1$.

Problème 2.2 Chercher la fonction dont la transformée en z est donnée par

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT_e})}$$

en utilisant la méthode des résidus.

Problème 2.3 Déterminer les séquences $\{g_n(kT_e)\}$, $\{g_2(kT_e)\}$, $\{g_m(kT_e)\}$ et $\{g_\ell(kT_e)\}$ dont les transformées en z sont données par

$$\mathcal{Z}\{g_n(kT_e)\} = \mathcal{G}_n(z) = \frac{N_n(z)}{\prod_{i=1}^n (z-p_i)}$$

$$\mathcal{Z}\{g_2(kT_e)\} = \mathcal{G}_2(z) = \frac{N_2(z)}{(z-p)(z-p^*)}$$

$$\mathcal{Z}\{g_m(kT_e)\} = \mathcal{G}_m(z) = \frac{N_m(z)}{(z-p)^m}$$

$$\mathcal{Z}\{g_\ell(kT_e)\} = \mathcal{G}_\ell(z) = \frac{N_\ell(z)}{z^\ell}$$

où $p_i \in \mathbb{C}$ pour $i \in [1, n]$ désigne un pôle simple et non nul, (p, p^*) représente une paire de pôles complexes conjugués, $N_n(z)$, $N_2(z)$, $N_m(z)$ et $N_\ell(z)$ sont des polynômes en z de degrés n , 2 , m et ℓ , respectivement. Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit.

1) Montrer que la transformée en z inverse de

$$\mathcal{G}_i(z) = \frac{z}{(z-p)^i} \text{ avec } i \geq 2$$

est donnée par

$$g_i(kT_e) = \frac{1}{(i-1)!} \prod_{j=0}^{i-2} (k-j)p^{k-i+1} \alpha(kT_e)$$

2) Montrer que les fonctions de transfert échantillonnées $\mathcal{G}_n(z)$, $\mathcal{G}_2(z)$, $\mathcal{G}_m(z)$ et $\mathcal{G}_\ell(z)$ peuvent se factoriser comme suit

$$\mathcal{G}_n(z) = \mathcal{G}_n(0) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{z}{z-p_i} \text{ avec } \gamma_i = \lim_{z \rightarrow p_i} \left(\frac{z-p_i}{z} \mathcal{G}_n(z) \right)$$

$$\mathcal{G}_2(z) = \mathcal{G}_2(0) + \gamma \frac{z}{z-p} + \gamma^* \frac{z}{z-p^*} \text{ avec } \gamma = \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{z-p}{z} \mathcal{G}_2(z) \right)$$

$$\mathcal{G}_m(z) = \mathcal{G}_m(0) + \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{z}{(z-p)^i} \text{ avec } \gamma_{m-i} = \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dz} \right)^i \left(\frac{(z-p)^m}{z} \mathcal{G}_m(z) \right) \right)$$

$$\mathcal{G}_\ell(z) = \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \frac{1}{z^i} \text{ avec } \gamma_{\ell-i} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dz} \right)^i (z^\ell \mathcal{G}_\ell(z)) \right)$$

3) En déduire les séquences $\{g_n(kT_e)\}$, $\{g_2(kT_e)\}$, $\{g_m(kT_e)\}$ et $\{g_\ell(kT_e)\}$

4) Etudier le comportement des séquences en fonction des pôles correspondants, notamment

$$|p_i| < 1 \text{ pour tout } i \in [1, n]$$

$$|p_i| = 1 \text{ pour tout } i \in [1, n]$$

et

$$|p_i| > 1 \text{ pour tout } i \in [1, n]$$

5) Traiter les exemples suivants à titre illustratif

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{3z^2 + 0.5z}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2(z - 2)}$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z + 1}{z^2(z - 1)}$$

Chapitre 3

Échantillonnage et reconstruction

La commande d'un système par un ordinateur, dont le schéma fonctionnel est donné par la figure 3.1, permet d'illustrer convenablement ce qu'est un système échantillonné sans occulter aucun problème. L'horloge permet de définir les instants d'échantillonnage qui sont supposés être régulièrement espacés, i.e. $\{kT_e\}_{k \in \mathbb{N}}$ où T_e désigne la période d'échantillonnage; elle constitue ainsi le coeur des applications temps réel. Le convertisseur analogique-numérique (\mathcal{CAN}) et le convertisseur numérique-analogique (\mathcal{CNA}) permettent d'interfacer le système, qui est intrinsèquement continu, au calculateur qui est fondamentalement un système discret puisqu'il ne manipule que des nombres. Le \mathcal{CAN} transforme un signal continu en une suite de nombres, i.e.

$$\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \longrightarrow \{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Quant au \mathcal{CNA} , il permet de restituer un signal continu à partir d'une suite de nombres, i.e.

$$\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{f_b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

Cette restitution est réalisée par un bloqueur via une interpolation adéquate du signal échantillonné.

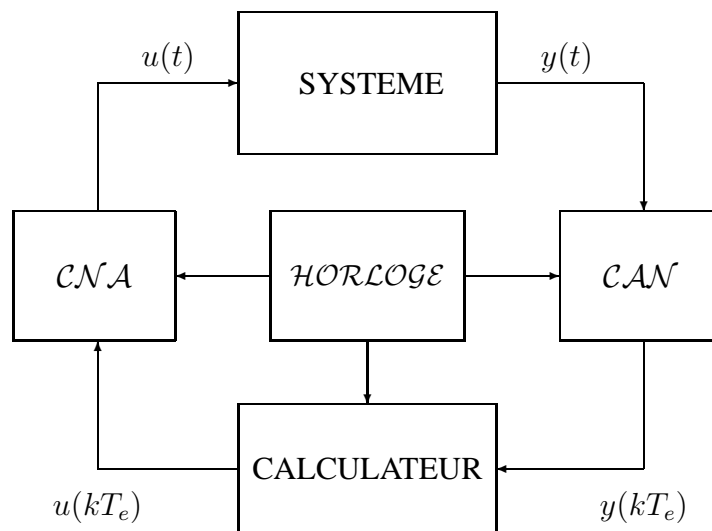


FIGURE 3.1 – Commande numérique d'un système

Vu du calculateur numérique, on a manifestement un système échantillonné dont l'entrée et la sortie sont respectivement les valeurs des signaux d'entrée et de sortie aux instants d'échantillonnage, i.e. les séquences $\{u(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{y(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Il peut être décrit par un modèle stroboscopique reliant les valeurs de la sortie à celles de l'entrée aux instants d'échantillonnage, soit

$$\text{SYSE} : \{u(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{y(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Dans le cas des systèmes linéaires échantillonnés, ces modèles ont été fondamentalement élaborés à partir d'une modélisation des convertisseurs \mathcal{CAN} et \mathcal{CNA} et des modèles utilisés pour la représentation du système continu sous-jacent, notamment la réponse impulsionnelle, la réponse harmonique, l'équation différentielle, la fonction de transfert et la représentation d'état. Cette approche de modélisation est l'essence de l'ingénierie des systèmes linéaires échantillonnés qui a été développée à partir d'une recherche méthodologique vigoureuse comme en témoignent les conceptions assistées par ordinateurs utilisées au quotidien dans les bureaux d'études.

Ce chapitre est particulièrement consacré aux problèmes d'échantillonnage et de reconstruction des signaux en vue de modéliser les convertisseurs : le préalable de la modélisation des systèmes échantillonnés, i.e. la cascade $\mathcal{CNA} \longrightarrow \text{SYSTEME} \longrightarrow \mathcal{CAN}$. On présente les deux résultats fondamentaux qui sont au coeur du concept d'échantillonnage. Le premier concerne une analyse spectrale d'une fonction échantillonnée alors que le second n'est autre que le célèbre théorème de Shannon qui est le seul et unique résultat fondamental disponible pour la spécification de la période d'échantillonnage. Le théorème de Shannon requiert l'existence d'une fréquence maximale au delà de laquelle le spectre du signal à échantillonner est identiquement nul. C'est pourquoi, les signaux sont préalablement filtrés avant leur échantillonnage pour éviter un éventuel repliement du spectre du signal. Par ailleurs, la reconstruction exacte du signal continu ne peut être faite que par un filtre non causal. Dans les applications temps réel, cette reconstitution est généralement faite avec des bloqueurs d'ordre zéro dont la modélisation sera particulièrement développée. Un récapitulatif de ce qu'il faut absolument retenir est donné en guise de conclusion.

3.1 Echantillonnage

L'échantillonnage des signaux se fait à partir d'un \mathcal{CAN} qui transforme un signal continu en une suite de nombres comme le montre la figure 3.2. La modélisation du \mathcal{CAN} est généralement faite en supposant que sa résolution est suffisamment grande pour négliger les erreurs de quantification et que le temps de conversion est suffisamment petit pour être considéré comme nul. Ces hypothèses seront prises en considération lors de la modélisation globale du système échantillonné pour ne pas nuire à la rigueur des sciences de l'ingénieur. On peut alors représenter un \mathcal{CAN} par un échantillonneur élémentaire comme l'indique la figure 3.3 et considérer le signal échantillonné comme le résultat de la modulation d'un train d'impulsions unitaires par le signal continu comme le montre la figure 3.4. On aura alors

$$f_e(t) = f(t) m(t) \text{ avec } m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

où m est une distribution communément appelée peigne de Dirac. Il faut bien remarquer que la fonction échantillonnée f_e a été introduite beaucoup plus pour une commodité mathématique que pour une quelconque considération physique. En effet, la seule information disponible dans

la pratique consiste en la séquence des valeurs de la fonction f aux instants d'échantillonnage. La commodité mathématique résulte du potentiel de la théorie des distributions qui constitue l'une des plus belles oeuvres de l'École Française des Mathématiques ([19]).

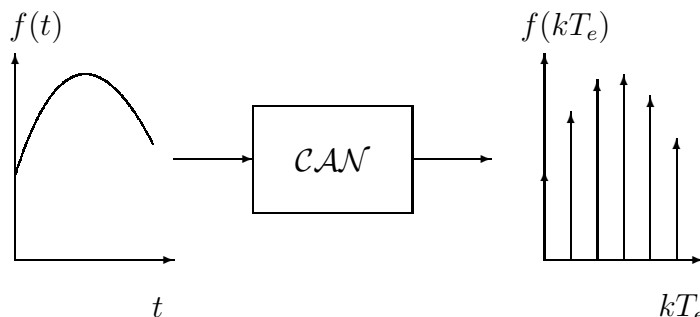


FIGURE 3.2 – Conversion analogique-numérique

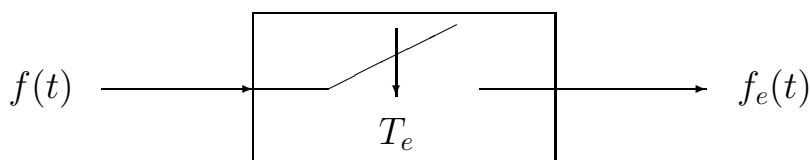


FIGURE 3.3 – Echantillonneur élémentaire

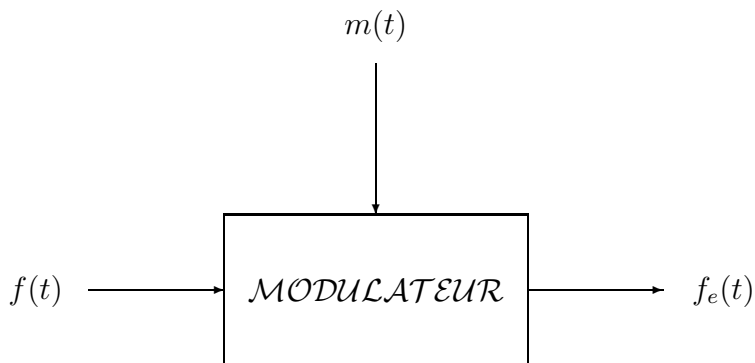


FIGURE 3.4 – Fonction d'échantillonnage

Le résultat fondamental suivant représente l'essence du concept d'échantillonnage. C'est une analyse spectrale qui précise la relation entre les transformées de Laplace d'une fonction f et la fonction échantillonnée f_e qui lui est associée, i.e.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \longrightarrow \quad F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\}$$

Résultat 3.1 Soit f une fonction dont la transformée de Laplace est F et soit F_e la transformée de Laplace de la fonction f_e qui résulte d'un échantillonnage de f à la cadence T_e . Supposons

que $F(s)$ soit strictement propre alors on a

$$F_e(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s} \quad (3.1)$$

$$F_e(s) = \frac{1}{2} f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(s + kj \frac{2\pi}{T_e}\right) \quad (3.2)$$

Si de plus $sF(s)$ est strictement propre alors on a

$$F_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(s + kj \frac{2\pi}{T_e}\right) \quad (3.3)$$

Preuve. Notons d'abord que la relation (3.1) entre la transformée de Laplace $F_e(s)$ et la transformée en z $F(z)$ découle des propriétés élémentaires de la transformée de Laplace comme le montrent les manipulations suivantes

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) \delta(t - kT_e)\right\}$$

soit

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$

La relation (3.2) entre la transformée de Laplace des fonction f et celle de la fonction échantillonnée f_e est la pierre d'achoppement du résultat, il sera démontré en appliquant le théorème des résidus donné ci-dessous.

Résultat 3.2 Soit $F : s \in \mathbb{C} \rightarrow F(s) \in \mathbb{C}$ une fonction analytique sur une courbe simple et fermée C , sauf en des singularités p_i pour $i \in [1, n]$ intérieures à C pour lesquelles les résidus de F sont R_k pour $k \in [1, n]$, alors l'intégrale de $F(s)$ le long de C est égale à $2\pi j$ fois la somme des résidus de F en les singularités contenues dans C , soit

$$\int_C F(s) ds = 2\pi j \sum_{k=1}^n R_k$$

Rappelons que le résidu d'une fonction complexe F pour un pôle p_i d'ordre de multiplicité m_i est donné par

$$\left(\text{Résidu de } F(s)\right)_{s=p_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \left(\left(\frac{d}{ds} \right)^{m_i - 1} \left((s - p_i)^{m_i} F(s) \right) \right)_{s=p_i}$$

et que la formule d'inversion de Mellin-Fourier pour les fonctions continues par morceaux donne

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(f(t^+) + f(t^-) \right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) e^{\mu t} d\mu \quad \text{pour tout réel } c > \sigma_f$$

Et comme on ne considérera que des signaux causaux, i.e. $f(t) = 0$ pour $t < 0$, on aura

$$\frac{1}{2}f(0^+) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) d\mu \quad \text{pour tout réel } c > \sigma_f$$

On peut donc récrire la transformée de Laplace de la fonction échantillonnée comme suit

$$\begin{aligned} F_e(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s} \\ &= \frac{1}{2}f(0^+) + \left(\frac{1}{2}f(0^+) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s} \right) \\ &= \frac{1}{2}f(0^+) + \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) d\mu + \sum_{k=1}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s} \right) \\ &= \frac{1}{2}f(0^+) + \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) d\mu + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kT_e s} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) e^{\mu k T_e} d\mu \right) \end{aligned}$$

soit

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_e(s-\mu)} \right) d\mu$$

Et puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_e(s-\mu)} = \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} \quad \text{pour } |e^{-T_e(s-\mu)}| < 1$$

on obtient

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu \quad \text{pour } \Re(s) > c > \sigma_f$$

L'évaluation de l'intégrale

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu$$

peut être effectuée en appliquant le théorème des résidus avec un contour convenablement choisi ; e.g. le contour \mathcal{C}_d obtenu en complétant la droite $\mathcal{D}_c = \{\mu \in \mathbb{C} / \Re(\mu) = c\}$ par un demi cercle de rayon infini à droite Γ_d . Ce choix est motivé par la configuration des pôles de la fonction rationnelle $\frac{F(\mu)}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}}$ dans le plan complexe μ donnée par la figure 3.5. Les pôles de $F(\mu)$ se trouvent à gauche de la droite \mathcal{D}_c puisque $\Re(p_i) < \sigma_f < c$ alors que les pôles de $\frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}}$, soit $p_i = s + kj\omega_e$ pour $k \in \mathbb{N}$, se trouvent à droite de la droite \mathcal{D}_c puisque $c < \Re(s)$.

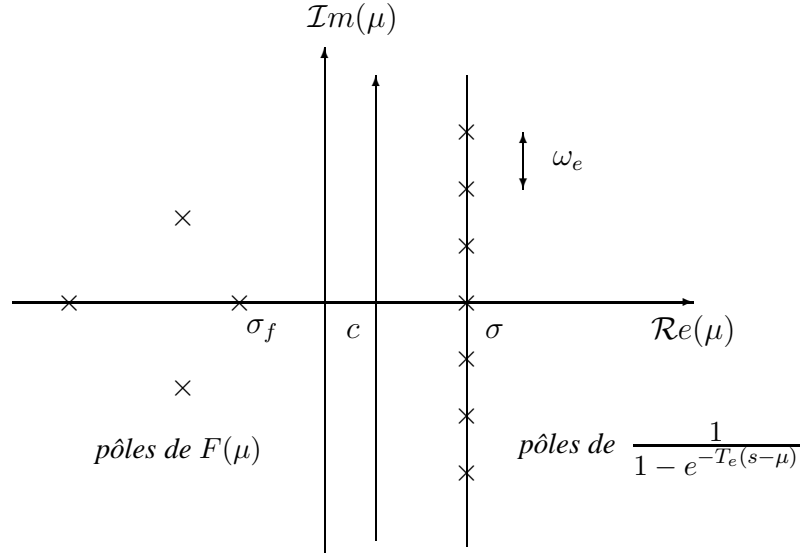


FIGURE 3.5 – Configuration des pôles

En effet, si l'on applique le théorème des résidus avec le contour \mathcal{C}_d , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_d} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu &= \int_{\Gamma_d} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu + \int_{\mathcal{D}_c} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu \\ &= -2\pi j \left(\sum_{p_k=s+kj\omega_e} R_k \right) \end{aligned}$$

avec

$$R_k = \left(\text{Résidu de } \frac{F(\mu)}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} \right)_{p_k=s+kj\omega_e}$$

puisque le contour d'intégration \mathcal{C}_d est parcouru dans le sens négatif. Et comme $F(s)$ est strictement propre et que $e^{T_e\mu} \rightarrow \infty$ lorsque μ parcourt Γ_d , on obtient

$$\int_{\Gamma_d} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu = 0$$

On aura donc

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu = -2\pi j \left(\sum_{p_k=s+kj\omega_e} R_{dk} \right)$$

La transformée de Laplace de la fonction échantillonnée est alors donnée par

$$F_e(s) = \frac{1}{2} f(0^+) - \sum_{p_k=s+kj\omega_e} \left(\text{Résidu de } \frac{F(\mu)}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} \right)_{\mu=p_k}$$

Et comme les pôles de $\frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}}$ sont simples, les résidus associés sont donnés par

$$R_k = \left(\text{Résidu de } \frac{F(\mu)}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} \right)_{\mu=s+kj\omega_e} = -\frac{1}{T_e} F(s + kj\omega_e)$$

On retrouve alors l'expression recherchée de la transformée de Laplace de la fonction échantillonnée, soit

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

Par ailleurs, si $sF(s)$ est strictement propre, alors $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$ et donc $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ en vertu du théorème de la condition initiale.

CQFD.

Remarque 3.1 La transformée de Laplace du signal échantillonné peut être évaluée en appliquant le théorème des résidus avec un contour \mathcal{C}_g obtenu en complétant la droite \mathcal{D}_c par un demi cercle de rayon infini à gauche Γ_g . Pour ce faire, il suffit de remarquer que

$$\int_{\Gamma_g} F(\mu) \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} d\mu = j\pi f(0^+)$$

car $F(s)$ est supposée être strictement propre et $e^{T_e\mu} = 0$ lorsque μ parcourt Γ_g . On en déduit alors que

$$F_e(s) = \sum_{p_k = \text{pôles de } F(\mu)} \left(\text{Résidu de } \frac{F(\mu)}{1 - e^{-T_e(s-\mu)}} \right)_{\mu=p_k}$$

On peut en déduire deux aspects vitaux pour le concept d'échantillonnage en supposant plus particulièrement que $f(0) = 0$; une hypothèse sans aucune incidence sur la généralité des choses.

A1. L'échantillonnage étale le spectre de fréquences de la fonction continue jusqu'à l'infini, i.e.

$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + k\omega_e))$$

Ce spectre est symétrique par rapport à l'axe réel et périodique de période la pulsation d'échantillonnage, i.e.

$$|F_e(j\omega)| = |F_e(-j\omega)| \quad \text{pour tout } \omega \in \mathcal{R}^+$$

et

$$|F_e(j\omega)| = |F_e(j(\omega + k\omega_e))| \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

On peut donc déterminer le spectre d'une fonction échantillonnée à partir de sa représentation sur l'intervalle de pulsations $[0, \omega_n]$ où $\omega_n = \frac{\omega_e}{2} = \frac{\pi}{T_e}$ est la pulsation de Nyquist.

Rappelons toutefois que la relation entre les transformées de Fourier d'une fonction échantillonnée et la fonction continue sous-jacente n'est généralement pas valable pour les spectres d'énergie définis à partir des modules correspondants puisque

$$|F_e(j\omega)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(j(\omega + k\omega_e))|$$

L'égalité n'est vérifiée que dans le cas de situations exceptionnelles où la phase de $F(s)$ est constante.

- A2. L'échantillonnage induit une duplication infinie des pôles et des zéros de la transformée de Laplace de la fonction continue, i.e. les pôles de $F_e(s)$ sont égaux aux pôles de $F(s)$ modulo $j\omega_e$. Autrement dit, pour un pôle p_{ci} de $F(s)$, il correspond une infinité de pôles $\{p_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $F_e(s)$ donnée par

$$p_{ik} = p_{ci} - kj\omega_e \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

Remarque 3.2 *Le résultat concernant la série de Fourier décrivant le peigne de Dirac peut être obtenu en remarquant que les coefficients de Fourier correspondants sont donnés par*

$$c_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{+\frac{1}{2T_e}} \delta(t) e^{-jk\omega_e t} dt = \frac{1}{T_e}$$

3.2 Théorème de Shannon

L'intérêt porté à l'échantillonnage des signaux a été principalement motivé par le développement des calculateurs numériques, qui de par leur nature, ne peuvent manipuler que des suites de nombres. La question de base qui se pose est de savoir si le fait d'échantillonner une fonction continue f n'est pas intrinsèquement accompagné par une perte de l'information contenue dans cette fonction, i.e. peut-on reconstruire $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ou $\{F(j\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ à partir de la seule connaissance de $\{f_e(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ou $\{F_e(j\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$? Un simple examen de ce problème dans le domaine temporel montre qu'il n'est pas possible de reconstruire $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ à partir de $\{f_e(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dans le cas général. En effet, il existe une infinité de fonctions temporelles qui prennent toutes les mêmes valeurs aux instants d'échantillonnage. Autrement dit, une fonction arbitraire du temps n'est pas complètement définie par ses valeurs à des instants arbitraires même s'ils sont régulièrement espacés. Il va falloir chercher les conditions supplémentaires que devrait satisfaire cette fonction du temps pour qu'elle soit parfaitement définie par ses valeurs aux instants d'échantillonnage. Cette recherche est loin d'être évidente si l'on adopte une approche temporelle. Le problème correspondant est généralement étudié dans le domaine fréquentiel : il consiste à restaurer $\{F(j\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ à partir de $\{F_e(j\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ dans les meilleures conditions possibles. En guise d'illustration, considérons un signal continu dont l'amplitude et la phase sont respectivement données par les figures 3.6 et 3.7. On notera que les pulsations sont normalisées par rapport à la pulsation d'échantillonnage ω_e et que le spectre est identiquement nul au-delà d'une pulsation maximale ω_m . Les figures 3.8 et 3.9 montrent que l'on peut reconstruire un signal continu à partir de ses valeurs aux instants d'échantillonnage pourvu que la pulsation maximale de son spectre soit inférieure à la moitié de la pulsation d'échantillonnage, i.e. $\omega_e > 2\omega_m$. Lorsque la pulsation d'échantillonnage est trop faible par rapport à la pulsation maximale contenue dans

le signal, il apparaît un phénomène de recouvrement qui induit un repliement de fréquences comme l'indiquent les figures 3.10 et 3.11. Cet exemple montre que la reconstitution d'un signal continu à partir du signal échantillonné correspondant dépend du choix de la période d'échantillonnage. Par ailleurs, on voit que pour reconstruire un signal ressemblant à la fonction f , la sagesse oblige de procéder à un filtrage approprié du signal échantillonné comme le montre la figure 3.12. Ce filtrage permettrait d'éliminer toutes les composantes hautes fréquences particulièrement introduites par l'échantillonnage. On notera toutefois que même si ce filtre est parfait, on ne peut espérer retrouver exactement le signal continu à moins que son spectre ne soit nul au-delà de la pulsation de Nyquist $\omega_n = \frac{\omega_e}{2}$.

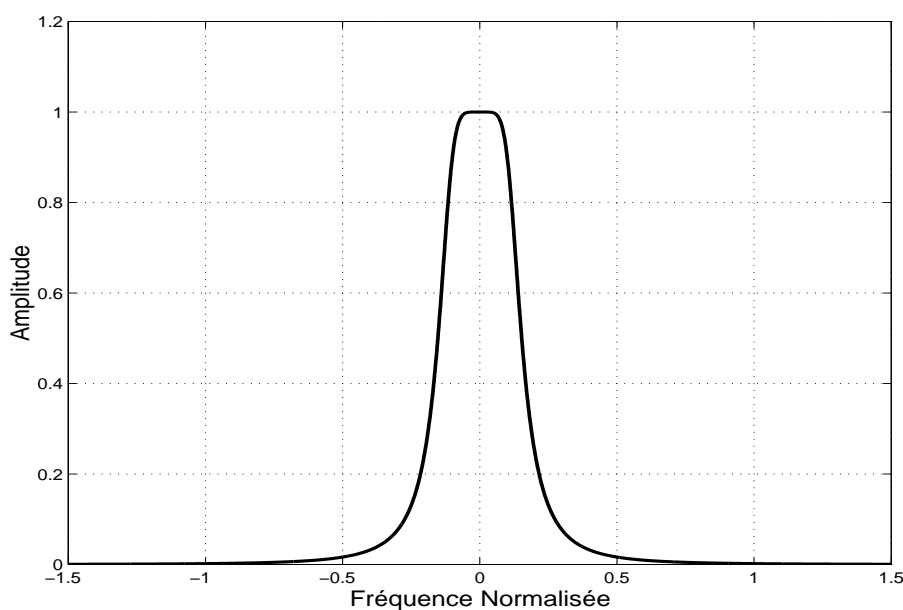


FIGURE 3.6 – Amplitude du spectre du signal continu

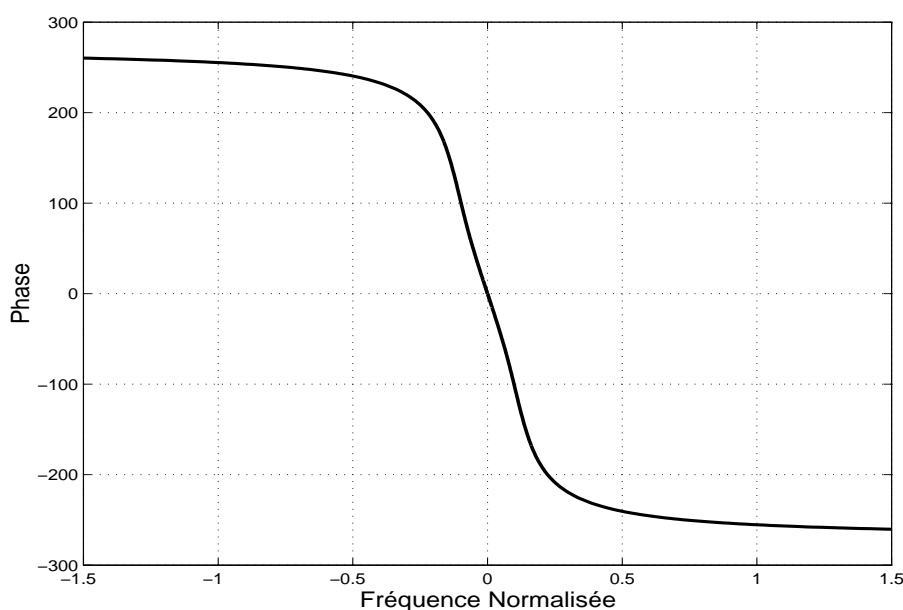


FIGURE 3.7 – Phase du spectre du signal continu

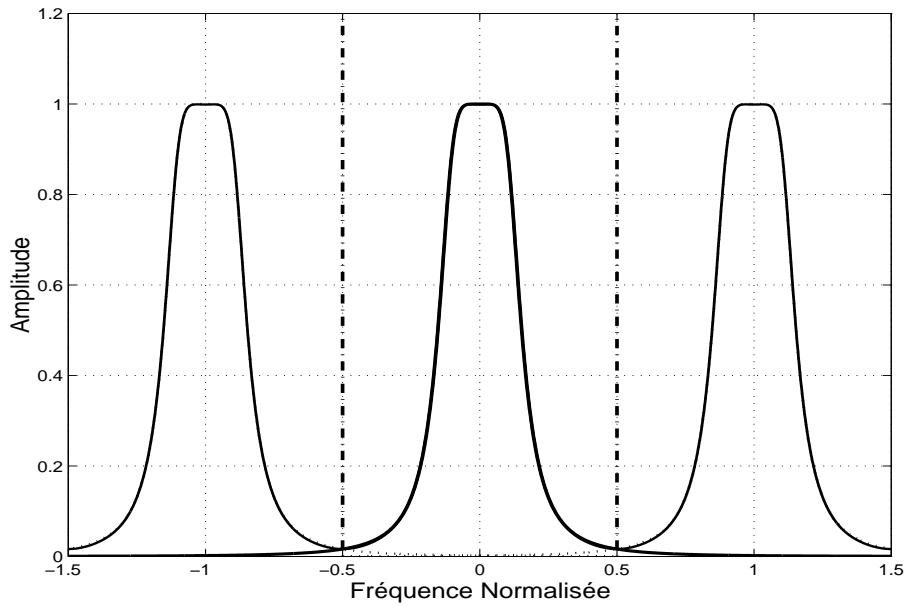


FIGURE 3.8 – Amplitude du spectre du signal échantillonné

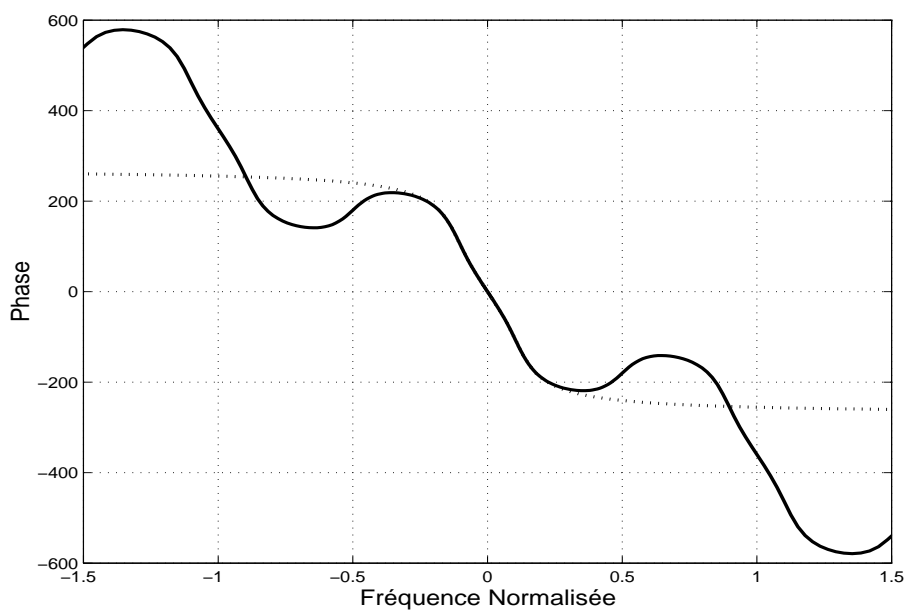


FIGURE 3.9 – Phase du spectre du signal échantillonné

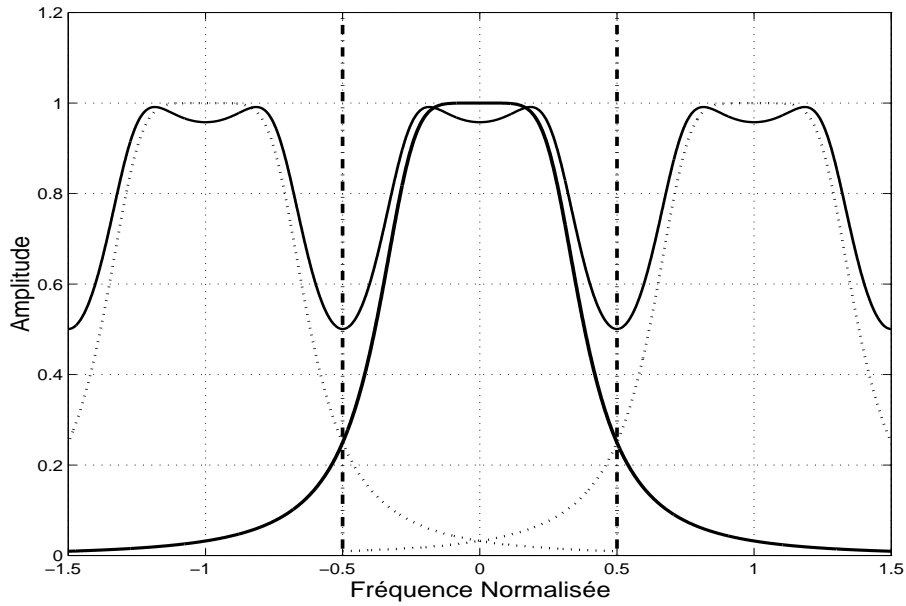


FIGURE 3.10 – Recouvrement du spectre

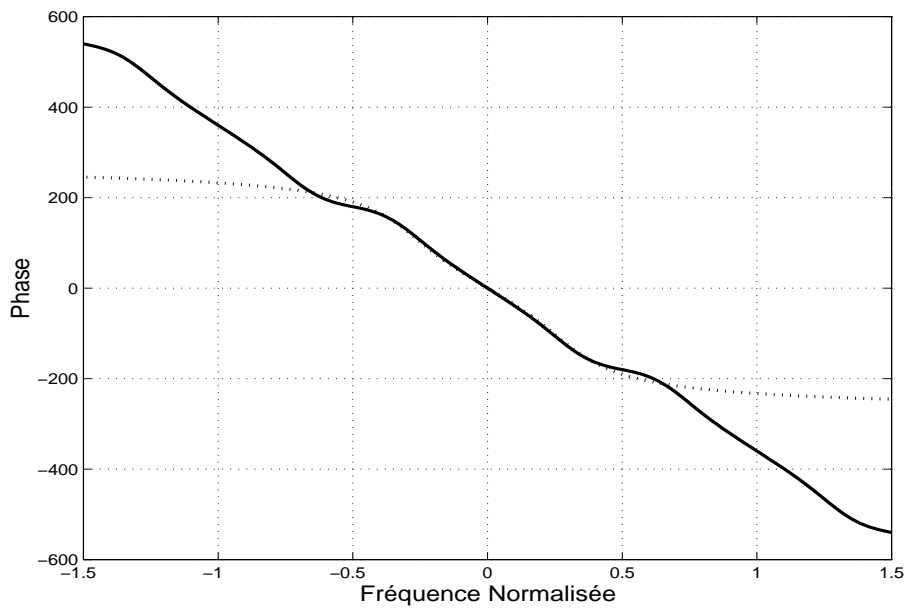


FIGURE 3.11 – Recouvrement de la phase

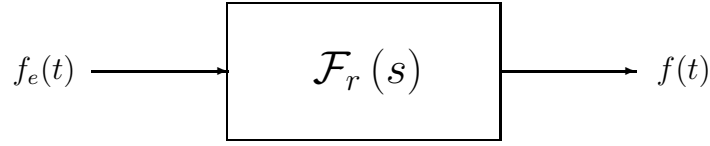


FIGURE 3.12 – Filtre restructeur

Le résultat fondamental suivant est le célèbre théorème de Shannon qui précise les conditions requises sur un signal continu pour que l'on puisse le recouvrir à partir de ses valeurs prises à des instants d'échantillonnage régulièrement espacés.

Résultat 3.3 *Un signal $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dont la transformée de Fourier est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-\omega_m, \omega_m]$ est parfaitement défini par son signal échantillonné $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ si la période d'échantillonnage T_e est telle que $\omega_e > 2\omega_m$. Le signal $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est obtenu comme suit*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t - kT_e))}{\omega_n(t - kT_e)}$$

Preuve. Le théorème de Shannon stipule qu'il est théoriquement possible de reconstruire une fonction continue à partir de ses valeurs aux instants d'échantillonnage pourvu que la fréquence d'échantillonnage soit au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale contenue dans le spectre de cette fonction. Dans ce cas particulier, on peut définir parfaitement $\{F(j\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ en fonction de $\{F_e(j\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ à partir de la relation

$$F(j\omega) = \begin{cases} T_e F_e(j\omega) & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$

On obtiendrait alors $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ en faisant passer $\{f_e(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dans un filtre passe-bas idéal caractérisé par la réponse fréquentielle

$$F_r(j\omega) = \begin{cases} T_e & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$

Cette manière de faire découle essentiellement du fait que

$$F(s) = F_r(s)F_e(s)$$

Elle permet de retrouver le résultat de reconstruction de Shannon en effectuant un retour dans le domaine temporel où ces relations deviennent

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} F_e(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

soit

$$f(t) = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-j\omega kT_e} e^{j\omega t} d\omega$$

Et en effectuant la permutation des opérations d'intégration et de sommation, on obtient

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} e^{j\omega(t-kT_e)} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t-kT_e))}{\omega_n(t-kT_e)}$$

Ainsi, si l'on désigne par $\{f_s(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal de fonction de transfert F_s , la fonction f peut être définie à partir du produit de convolution

$$f(t) = (f_e * f_s)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) f_s(t - kT_e)$$

Cette opération de filtrage transmettrait toutes les composantes de fréquences inférieures à la fréquence de Nyquist et supprimerait complètement toutes les composantes de fréquences qui y sont plus élevées. Elle n'est pas physiquement réalisable puisque sa réponse impulsionnelle n'est pas causale. On peut cependant construire des filtres dont la réponse impulsionnelle est voisine de celle du filtre idéal à condition d'introduire un retard ([10])

CQFD.

Remarque 3.3 *La transformée de Laplace de la fonction échantillonnée*

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$

peut se récrire sous la forme d'une transformée en z moyennant le changement de variable $z = e^{T_e s}$, i.e.

$$F_e(s) = F(z) \text{ pour } z = e^{T_e s}$$

Le potentiel de la transformée en z est présenté d'une manière complète dans l'ouvrage du père Jury ([8]) ou dans le "best seller" du père Ogata ([16]). Une synthèse concise a été présentée dans le chapitre précédent consacré aux préliminaires mathématiques.

Le passage du plan complexe en s au plan complexe en z est donc effectué par la transformation complexe

$$s \longrightarrow z = e^{T_e s}$$

Cette transformation d'échantillonnage n'est pas bijective puisque les bandes de l'espace complexe en s définies par

$$\mathcal{B}_k = \{s \in \mathbb{C} / (2k-1)\omega_n \leq \text{Im}(s) \leq (2k+1)\omega_n \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\}$$

ont la même image : c'est le plan complexe en z . On distingue plus particulièrement la bande centrale du plan complexe en s

$$\mathcal{B}_s = \{s \in \mathbb{C} / \text{Im}(s) \in [-\omega_n, +\omega_n]\}$$

qui permet d'accéder directement à l'information utile sur la fonction continue pourvu que la période d'échantillonnage soit spécifiée conformément au théorème de Shannon. Ceci justifie l'appellation bande de Shannon communément utilisée pour désigner \mathcal{B}_s .

Il est important de remarquer que la duplication des pôles dans le plan complexe en s n'est pas percevable dans le plan complexe en z puisque

$$e^{(s+kj\omega_e)T_e} = e^{sT_e} \text{ pour tout } (s, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$$

En guise d'illustration, on donne ci-après les images de certaines parties du plan complexe en p par cette transformation d'échantillonnage.

- L'image de l'origine est le point $(1, 0)$, i.e

$$\text{Image}(0) = 1$$

- L'image de l'axe imaginaire est le cercle de centre l'origine et de rayon unitaire, i.e.

$$\text{Image}(\{s \in \mathbb{C} / \Re(s) = 0\}) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

- L'image du plan complexe de gauche est le disque de centre l'origine et de rayon unitaire, i.e.

$$\text{Image}(\{s \in \mathbb{C} / \Re(s) < 0\}) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$$

- L'image du plan complexe de droite est l'extérieur du disque de centre l'origine et de rayon unitaire, i.e.

$$\text{Image}(\{s \in \mathbb{C} / \Re(s) > 0\}) = \{z \in \mathbb{C} / |z| > 1\}$$

- L'image d'une droite horizontale d'ordonnée ω est une droite oblique passant par l'origine de pente ωT_e , i.e.

$$\text{Image}(\{s \in \mathbb{C} / \Im(s) = \omega\}) = \{z \in \mathbb{C} / \text{Arg}(z) = \omega T_e\}$$

- L'image d'une droite verticale d'abscisse α est le cercle de centre l'origine et de rayon $e^{\alpha T_e}$, i.e.

$$\text{Image}(\{s \in \mathbb{C} / \Re(s) = \alpha\}) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = e^{\alpha T_e}\}$$

- L'image des demi-droites obliques passant par l'origine du plan complexe de gauche, i.e. les courbes iso-amortissement $\zeta \in [0, 1]$, est une cardioïde.

$$\begin{aligned} \text{Image} \left(\left\{ s \in \mathbb{C} / \Re(s) = \pm \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Im(s) \right\} \right) \\ = \\ \left\{ z \in \mathbb{C} / z = e^{\zeta \omega T_e} e^{\pm j \omega \sqrt{1-\zeta^2} T_e} \right\} \end{aligned}$$

Cet aspect vital de l'échantillonnage constitue la motivation principale de l'utilisation de la transformée en z pour l'analyse et la synthèse des systèmes échantillonnés. La transformation d'échantillonnage peut être interprétée comme un pont de passage entre les systèmes continus et les systèmes échantillonnés.

Remarque 3.4 *Le théorème de Shannon est le seul résultat fondamental disponible pour la spécification de la période de l'échantillonnage et il ne concerne que les signaux dont le spectre d'énergie est parfaitement limité. Comme cette hypothèse relève beaucoup plus de l'exception que de la règle dans la pratique, on est amené à procéder à un traitement préalable du signal pour recouvrir un contexte conforme à l'application du théorème de Shannon. Ce traitement vital est réalisé avec un filtre anti-repliement (\mathcal{FAR}) de fréquences que l'on place entre le signal à échantillonner et le CAN comme l'indique la figure 3.13. Ce filtre est généralement composé d'une cascade de filtres du second ordre de gain statique unitaire qui éliminent les composantes de fréquences indésirables. Cette cascade peut être décrite par la fonction de transfert*

$$\mathcal{F}(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)^\ell \quad \text{avec } \ell \geq 2$$

où le coefficient d'amortissement ζ est supérieur à 0.7 et la pulsation propre ω_n est spécifiée en fonction de la bande passante désirée. Cette dernière dépend essentiellement de la fréquence d'échantillonnage. Ce filtrage conditionne amplement le succès d'une quelconque application avec ordinateur. Les filtres anti-recouvrement sont disponibles sur le marché : une information susceptible d'éveiller l'intérêt de ce filtrage.

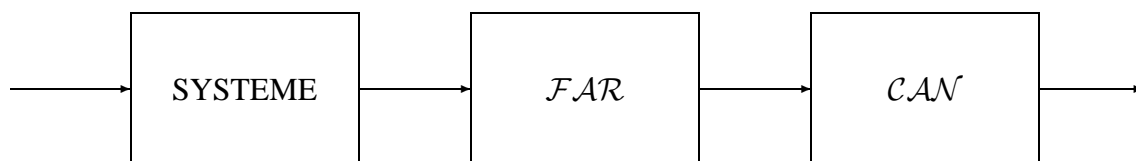


FIGURE 3.13 – Emplacement du filtre anti-repliement

3.3 Reconstruction physique

La reconstitution physique d'un signal est fondamentalement basée sur un développement en série de Taylor de la fonction temporelle f au voisinage d'un instant d'échantillonnage $t = kT_e$, i.e.

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) + \tau \left(\rho f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots + \frac{\tau^i}{i!} \left(\rho^i f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots \quad \text{pour } \tau \in [0, T_e)$$

Ce développement est généralement évalué en utilisant une approximation des dérivées successives par des différences finies, en l'occurrence

$$\rho f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e} \left(f(kT_e) - f((k-1)T_e) \right)$$

et

$$\rho^2 f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e^2} \left(f(kT_e) - 2f((k-1)T_e) + f((k-2)T_e) \right)$$

La reconstruction du signal sera d'autant meilleure que l'on prendra plus de termes dans le développement. Pour des considérations technologiques, on utilise généralement une approximation d'ordre zéro

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$

La réalisation de l'approximation d'ordre zéro est effectuée par un bloqueur d'ordre zéro. Ce dernier est à l'origine du concept de blocage : une opération qui permet de transformer une suite de nombres en un signal continu, soit

$$\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{f_b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

satisfaisant la propriété

$$f_b(t) = f(kT_e) \text{ pour tout } k \in [kT_e, (k+1)T_e)$$

Il s'agit d'une extrapolation du signal échantillonné réalisée par des \mathcal{CNA} comme l'indique la figure 3.14. Le bloqueur élémentaire peut être représenté comme l'indique la figure 3.15 où \mathcal{BI} et \mathcal{BOZ} désignent respectivement un bloqueur impulsif et un bloqueur d'ordre zéro. Le bloqueur impulsif est un artifice mathématique destiné à l'étude des bloqueurs alors que le bloqueur d'ordre zéro est au coeur de la technologie des \mathcal{CNA} .

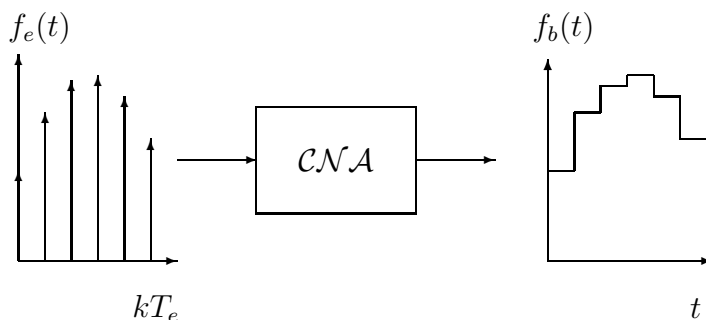


FIGURE 3.14 – Conversion numérique-analogique

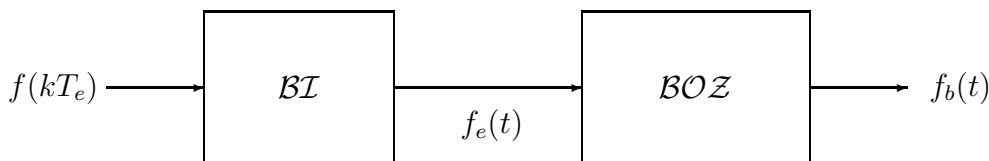


FIGURE 3.15 – Bloqueur d'ordre zéro

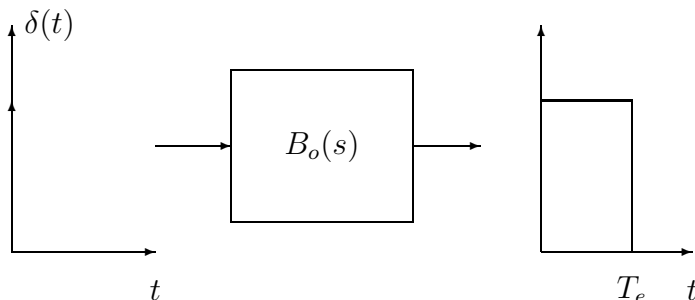


FIGURE 3.16 – Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre zéro

La figure 3.16 montre la réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre zéro que l'on peut interpréter comme un intégrateur systématiquement réinitialisé à zéro à chaque instant d'échantillonnage, soit

$$\beta_o(t) = \alpha(kT_e) - \alpha(kT_e - T_e)$$

La réponse du bloqueur au signal défini par une fonction échantillonnée f_e est alors donnée par

$$f_b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) \left(\alpha(t - kT_e) - \alpha(t - (k+1)T_e) \right)$$

Et si l'on applique la transformée de Laplace à cette équation de comportement entrée-sortie, on obtient

$$F_b(s) = \mathcal{L}(f_b(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) \frac{e^{-kT_e s} - e^{-(k+1)T_e s}}{s} = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} F_e(s)$$

Le bloqueur d'ordre zéro peut être alors décrit par sa fonction de transfert comme suit

$$F_b(s) = \mathcal{B}_o(s)F_e(s) \text{ avec } \mathcal{B}_o(s) = \mathcal{L}(\beta_o(t)) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

Remarque 3.5 *La théorie des systèmes échantillonnés a été principalement développée avec une reconstruction réalisée par un bloqueur d'ordre zéro. Néanmoins, de nombreuses études ont été dédiées au problème de reconstruction d'un signal et sont disponibles dans des publications ou des monographies de recherche.*

3.4 Conclusion

Les résultats fondamentaux du concept d'échantillonnage ont été développés d'une manière concise et précise en interprétant un signal échantillonné comme le résultat de la modulation d'un train d'impulsions unitaires par le signal continu, soit

$$f_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

On distingue

- Le résultat d'analyse spectrale qui précise la relation entre les transformées de Laplace d'une fonction f et la fonction échantillonnée f_e qui lui est associée

$$F_e(s) = \frac{1}{2} f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

Cette relation est l'essence d'une propriété vitale : l'échantillonnage étale le spectre du signal continu jusqu'à l'infini.

- Le théorème de Shannon stipule qu'il est théoriquement possible de reconstruire une fonction continue à partir de ses valeurs aux instants d'échantillonnage pourvu que la fréquence d'échantillonnage soit au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale contenue dans le spectre de cette fonction.

$$f(t) = (f_e * f_s)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) f_s(t - kT_e)$$

avec

$$f_s(t) = \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n t}$$

On notera que $\{f_s(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal. On notera que ce filtre n'est pas réalisable.

- La transformation d'échantillonnage qui permet de passer du plan complexe en s au plan complexe en z , i.e.

$$s \longrightarrow z = e^{sT_e}$$

Cette transformation est au coeur de la commodité de la transformée en z pour la modélisation, l'analyse et la synthèse des systèmes échantillonnés.

- Les nuances entre la transformée de Laplace d'une fonction échantillonnée et sa transformée en z , notamment la relation entre les configurations des pôles correspondantes.

3.5 Problèmes

Problème 3.1 On propose de faire un bilan sur les résultats fondamentaux de ce chapitre en répondant d'une manière concise et précise aux deux questions suivantes.

- 1) Décrire brièvement les incidences de l'échantillonnage à partir des résultats fondamentaux qui lui sont associés.
- 2) Comment spécifier la période d'échantillonnage dans le cas d'un système dont la dynamique est caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω ? Préciser si un filtre anti-recouvrement est nécessaire et si oui donner sa fonction de transfert.

Problème 3.2 Soit f une fonction dont la transformée de Fourier est F et soit F_e la transformée de Fourier de la fonction f_e qui résulte d'un échantillonnage de f à la période T_e . Montrer que

$$F_e(j\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega + kj\omega_e)$$

an admettant que le peigne de Dirac peut être définie à partir de son développement en série de Fourier comme suit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_e t}$$

avec

$$c_k = \frac{1}{T_e}$$

Que peut-on conclure sur le spectre d'un signal échantillonné ?

Problème 3.3 On se propose de faire la démonstration du théorème de Shannon autrement en procédant comme suit

- 1) Exprimer la transformée de Fourier de la fonction continue en fonction de la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée correspondante dans le contexte du théorème de Shannon et en déduire que la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée peut se récrire sous la forme d'une série de Fourier

$$F_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-j\omega kT_e}$$

- 2) Montrer que

$$f(t) = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-j\omega kT_e} e^{j\omega t} d\omega$$

et en déduire que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{T_e}{\pi} \frac{\sin(\omega_n(t - kT_e))}{t - kT_e}$$

Chapitre 4

Modélisation

La modélisation des systèmes échantillonnés est développée à partir d'une application de commande par ordinateur dont le schéma fonctionnel est donné par la figure 4.1. Cette application est communément réalisée conformément aux étapes suivantes.

- $\mathcal{E}1$. Attendre le top d'horloge.
- $\mathcal{E}2$. Acquérir la sortie du système : conversion et sauvegarde.
- $\mathcal{E}3$. Déterminer le signal de commande selon l'algorithme de commande considéré.
- $\mathcal{E}4$. Appliquer le signal de commande au système.
- $\mathcal{E}5$. Aller en $\mathcal{E}1$.

Ces étapes conduisent inéluctablement à un retard fractionnaire égal à la somme des temps de conversion analogique \Rightarrow numérique et du temps d'exécution de l'algorithme de commande. Ce retard doit être intégré dans le retard pur du système qui sera particulièrement pris en considération lors de la modélisation du système échantillonné.

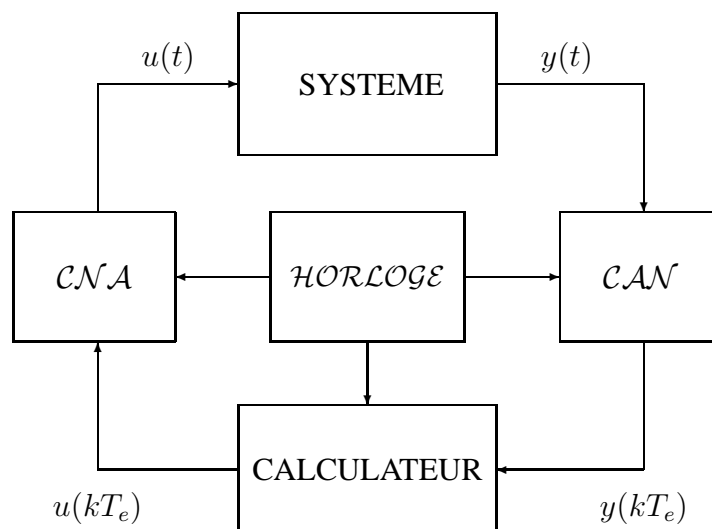


FIGURE 4.1 – Commande numérique d'un système

Vu du calculateur numérique, on a manifestement un système échantillonné dont l'entrée et la sortie sont respectivement les valeurs des signaux d'entrée et de sortie aux instants d'échantillonnage, i.e. les séquences $\{u(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{y(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Il peut être décrit par un modèle stroboscopique reliant les valeurs de la sortie à celles de l'entrée aux instants d'échantillonnage, soit

$$\mathcal{SYSE} : \{u(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{y(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Ce modèle est fondamentalement développé à partir d'une modélisation des convertisseurs, i.e. \mathcal{CAN} et \mathcal{CNA} , et du modèle utilisé pour la description du système continu, notamment la réponse impulsionnelle, la réponse harmonique, l'équation différentielle, la fonction de transfert et la représentation d'état.

Le théorème d'analyse spectrale d'une fonction échantillonnée et le théorème de Shannon permettent de développer un formalisme rigoureux pour la modélisation, l'analyse et la synthèse des systèmes échantillonnés. Ces derniers peuvent être représentés comme l'indiquent les figures 4.2 et 4.3.

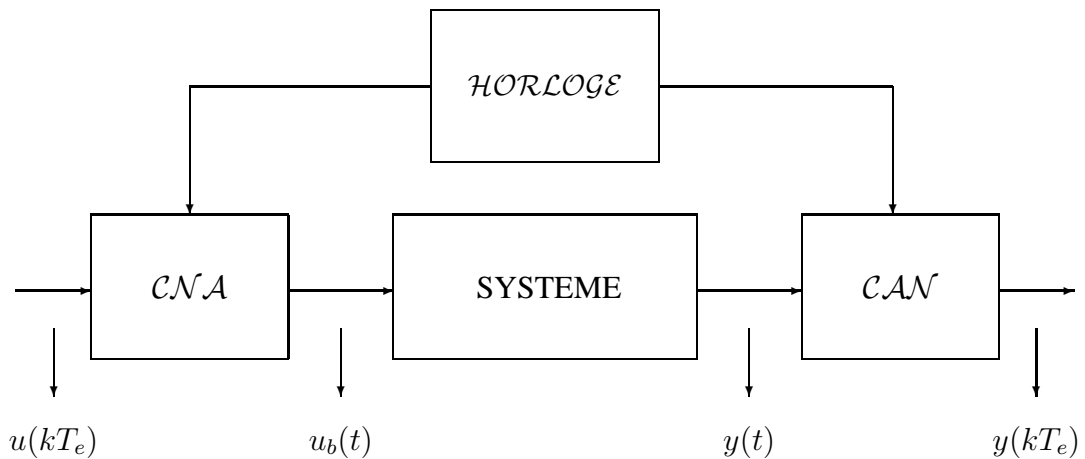


FIGURE 4.2 – Diagramme fonctionnel d'un système échantillonné

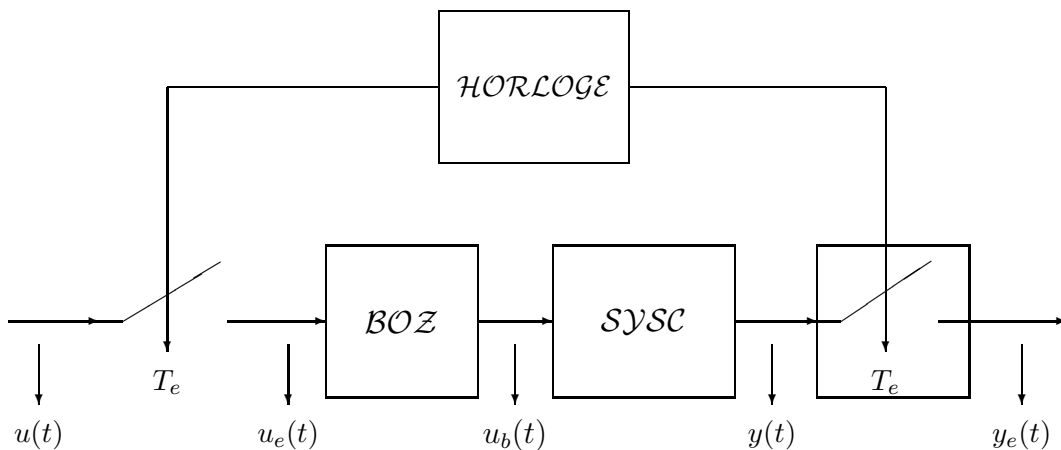


FIGURE 4.3 – Modélisation d'un système échantillonné

Supposons que le système continu sous-jacent est décrit par un opérateur entrée-sortie $\mathcal{SYS}\mathcal{C}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{SYS}\mathcal{C} : U_b = \{u_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\} &\longrightarrow Y = \{y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ u_b(t) &\longrightarrow y(t) = \mathcal{SYS}\mathcal{C}(u_b(t)) \end{aligned}$$

alors le système échantillonné correspondant peut être représenté comme l'indique la figure 4.3. Un tel système peut être décrit par un opérateur entrée-sortie défini comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{SYS}\mathcal{E} : U = \{u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} &\longrightarrow Y = \{y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ u(kT_e) &\longrightarrow y(kT_e) = \mathcal{SYS}\mathcal{E}(u(kT_e)) \end{aligned}$$

Comme pour les systèmes continus, les systèmes échantillonnés peuvent être décrits par plusieurs représentations qui seront progressivement présentées ci-dessous. Pour ce faire, on utilisera l'opérateur retard et la transformée en z ainsi que le résultat suivant qui permet de déterminer la fonction échantillonnée du produit de convolution d'une fonction continue avec une fonction échantillonnée.

Résultat 4.1 Soient f et g deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace alors la fonction échantillonnée du produit de convolution $h = g * f_e$ est donnée par

$$h_e(t) = (g_e * f_e)(t)$$

et donc

$$\mathcal{L}\{h_e(t)\} = G_e(s) \times F_e(s)$$

Preuve. La démonstration est faite à partir de la définition du produit de convolution et de la fonction échantillonnée d'une fonction continue, soit

$$h_e(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)f_e(\tau)d\tau \right) m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)m(t)f(\tau)m(\tau)d\tau$$

Et comme la fonction m est périodique de période T_e et qu'elle est identiquement nulle sauf aux instants d'échantillonnage, on trouve

$$h_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)m(t-\tau)f(\tau)m(\tau)d\tau = g_e(t) * f_e(t)$$

La seconde partie du résultat est une conséquence directe du théorème de convolution associé à la transformée en z .

CQFD.

Ce chapitre est consacré aux problèmes fondamentaux de la modélisation des systèmes échantillonnés dans un contexte idéal, i.e. une modélisation parfaite et une absence des perturbations, des bruits de mesure et des erreurs de quantification. Les modèles d'un système échantillonné sont d'abord progressivement élaborés à partir des modèles des convertisseurs et du système continu sous-jacent, en l'occurrence les réponses impulsionnelle et harmonique la fonction de transfert, l'équation différentielle et la réalisation d'état, dans le cas des systèmes sans retard en occultant le retard requis pour les conversions analogique \Rightarrow numérique et le calcul de la commande. Les modèles générateurs des perturbations (resp. des séquences de points de consigne) sont ensuite naturellement introduits à partir de leurs transformées en z compte tenu de la définition d'une impulsion unitaire, soit

$$\delta(kT_e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{Z}(\delta(kT_e)) = 1 \quad (4.1)$$

Un focus est enfin fait sur la modélisation du système échantillonné dans le cas d'un système continu exhibant un retrad pur sans occulter les retards de conversion et de calcul intrinsèques à la commande par ordinateur. Cette modélisation est particulièrement effectuée à partir de la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert qui permettent d'élaborer aisément les autres représentations.

La représentation d'état utilise l'exponentielle d'une matric $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qui est définie à partir de la série convergente

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k + \dots$$

soit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Elle vérifie les propriétés usuelles $\mathcal{P}1$ à $\mathcal{P}9$ données dans le problème 4.2. Par ailleurs, on notera que pour toute matric $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matric $(sI_n - A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est inversible puisque son déterminant, qui n'est autre que le polynôme caractéristique de associée à la matric A , n'est pas nul. Le résultat suivant donne un algorithme pour calculer $(sI_n - A)^{-1}$ qui est communément appelée matric résolvante associée à la matric $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, soit

$$\text{Pour tout } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ on a : } \mathcal{L}(e^{At} \alpha(t)) = (sI_n - A)^{-1}$$

Le résultat suivant donne un algorithme adéquat qui permet de calculer la matric résolvante.

Résultat 4.2 *La matric résolvante associée à une matric $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est donnée par*

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI_n - A)} \text{Adj}(sI_n - A)$$

avec

$$\det(sI_n - A) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

et

$$\text{Adj}(zI_n - A) = A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + A_3 s^{n-3} + \dots + A_{n-1} s + A_n$$

où $\{a_k\}_{k \in [0, n]}$ et $\{A_k\}_{k \in [1, n]}$ sont respectivement données par les algorithmes suivants

$$a_0 = 1 \text{ et } a_k = -\frac{1}{k!} \text{trace}(M_k A) \text{ pour } k \in [1, n]$$

avec

$$M_0 = 0_n \text{ et } M_k = M_{k-1}A + a_{k-1}I_n \text{ pour } k \in [1, n]$$

et

$$A_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i A^{k-i-1} \text{ pour } k \in [1, n]$$

4.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système échantillonné n'est autre que sa réponse à une impulsion unitaire que l'on peut obtenir à partir de la réponse impulsionnelle du système continu sous-jacent à la lumière du résultat suivant

Résultat 4.3 *Considérons le système échantillonné de la figure 4.3 et supposons que le système continu sous-jacent soit décrit par sa réponse impulsionnelle $\{g_c(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, alors la réponse impulsionnelle du système échantillonné, que l'on désignera par $\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$, est donnée par*

$$g(kT_e) = \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} g_c(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

Preuve. Rappelons que la sortie d'un système continu n'est autre que le produit de convolution de son entrée par sa réponse impulsionnelle, soit

$$y(t) = \int_0^\infty g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau$$

La sortie du système échantillonné est donc donnée par

$$y(kT_e) = \int_0^\infty g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau = \sum_{\ell=1}^\infty \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

Et comme $kT_e - \ell T_e < kT_e - (\ell - 1)T_e$, on aura

$$u_b(kT_e - \tau) = u(kT_e - \ell T_e) \text{ pour } \tau \in ((\ell - 1)T_e, \ell T_e]$$

La séquence de sortie du système échantillonné peut être alors réécrite sous la forme

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^\infty \left(\int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau \right) u(kT_e - \ell T_e)$$

Et compte tenu de l'expression (4.2), on retrouve le produit de convolution du système échantillonné

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^\infty g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e) \quad (4.3)$$

Il est clair que la séquence $\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ représente bien la réponse du système à une impulsion unitaire.

CQFD.

Remarque 4.1 *Le produit de convolution (4.3) du système échantillonné peut se mettre sous la forme*

$$y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}(q^{-1}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) q^{-\ell}$$

L'opérateur de convolution $\mathcal{G}(q^{-1})$ peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle en l'opérateur retard puisqu'on peut toujours effectuer une division euclidienne dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[q^{-1}]$, soit

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}} = q^{-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

Cette forme permet de mettre en évidence un effet secondaire de l'échantillonnage : le bloqueur d'ordre zéro introduit un retard d'une période d'échantillonnage dans le cas où la réponse impulsionnelle du système continu admet une limite finie en zéro, i.e. $\lim_{t \rightarrow 0} g_c(t)$ existe et est finie. Cette condition stipule que le système continu est strictement propre et sera confortée lorsqu'on abordera la représentation par fonction de transfert.

Remarque 4.2 *Si l'on applique la transformée en z aux deux membres de la description d'un système par une réponse impulsionnelle, on obtient*

$$\mathcal{Z}(y(kT_e)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(kT_e) \mathcal{Z}(q^{-\ell} u(kT_e))$$

\Leftrightarrow

$$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$$

avec

$$\mathcal{G}(z) \triangleq \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) z^{-\ell} = z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}} \triangleq \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)}$$

On peut alors représenter le système comme le montre la figure 4.4 qui met en évidence le transfert entre l'entrée échantillonnée et la sortie échantillonnée. On retrouvera ce résultat autrement lorsqu'on abordera la représentation par fonction de transfert.

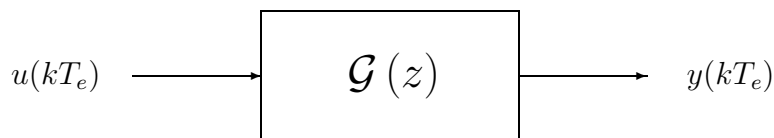


FIGURE 4.4 – Représentation d'un système échantillonné

4.2 Réponse harmonique

On peut déterminer aisément la réponse du système à une entrée harmonique généralisée unitaire, i.e. $u(kT_e) = e^{j\omega kT_e} \alpha(t)$, pourvu qu'elle existe. En effet, on a

$$y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) e^{j\omega kT_e} = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{j\omega(kT_e - \ell T_e)}$$

soit

$$y(kT_e) = \mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) e^{j\omega kT_e} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{-j\omega \ell T_e} \quad (4.4)$$

On retrouve la réponse harmonique du système échantillonné qui n'est autre que la transformée de Fourier discrète de sa réponse impulsionnelle, soit

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \mathcal{F}(\{g(kT_e)\}) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

avec

$$\mathcal{M}(j\omega) = |\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e})| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}))$$

Et comme la réponse harmonique est périodique et symétrique par rapport à l'axe imaginaire, i.e.

$$\mathcal{G}(e^{j(\omega+\omega_e)T_e}) = \mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = (\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}))^* \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

on en déduit que les fonctions module et argument associées sont respectivement paire et impaire. La réponse fréquentielle $\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ se déduit donc du lieu $\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in [0, \omega_n]}$. On retrouve l'essence du théorème de Shannon selon laquelle les pulsations au delà de la pulsation de Nyquist ω_n ne sont pas fondamentales pour un échantillonnage effectué convenablement.

La réponse harmonique est caractérisée par les diagrammes de Bode, Nyquist et Black selon la motivation courante. Les deux aspects suivants sont généralement rencontrés lors de l'évaluation d'une réponse harmonique.

- A1 Si la fonction de transfert $\mathcal{G}(z)$ contient un pôle $z = 1$ de multiplicité m , reflétant l'effet des intégrateurs, alors la fonction $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ n'est pas définie pour $\omega = 0$. On peut toutefois utiliser l'approximation suivante au voisinage de la pulsation nulle

$$\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \approx (j\omega T_e)^{-m}$$

qui permet de postuler que

$$|\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})| \text{ est grand et } \arg(\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})) \approx -m \frac{\pi}{2}$$

dans le domaine des basses fréquences.

A2 Un retard pur de ℓ périodes d'échantillonnage se traduit par ℓ pôles à l'origine. Ceci ne change pas le module de $\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})$ ne change pas mais retarde son argument de $-\omega\ell T_e$. Ainsi, le lieu $\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in [0, \omega_n]}$ autour de l'origine dans le sens négatif lorsque ω croît.

Les figures 4.5 et 4.6 montrent les lieux de Nyquist d'un système échantillonné avec et sans retard.

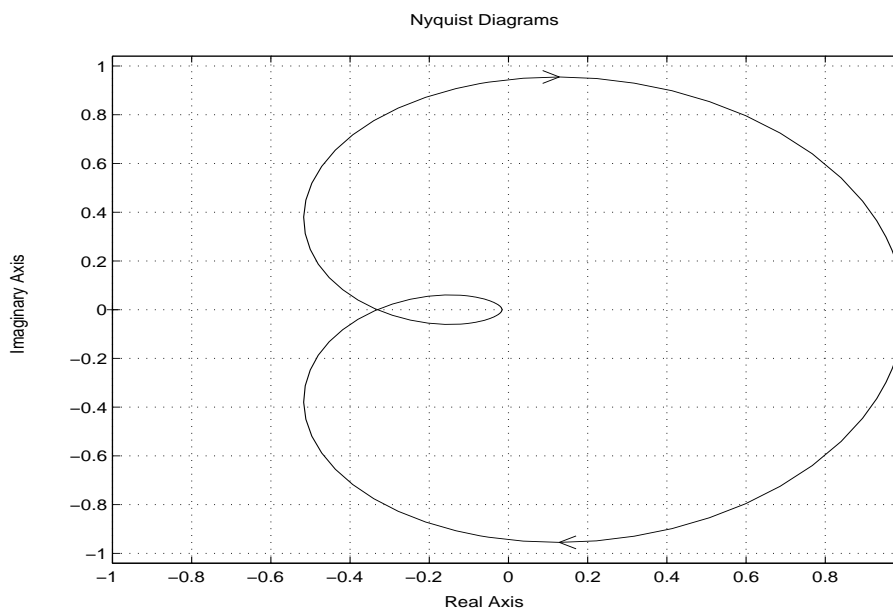


FIGURE 4.5 – Lieu de Nyquist d'un système sans retard

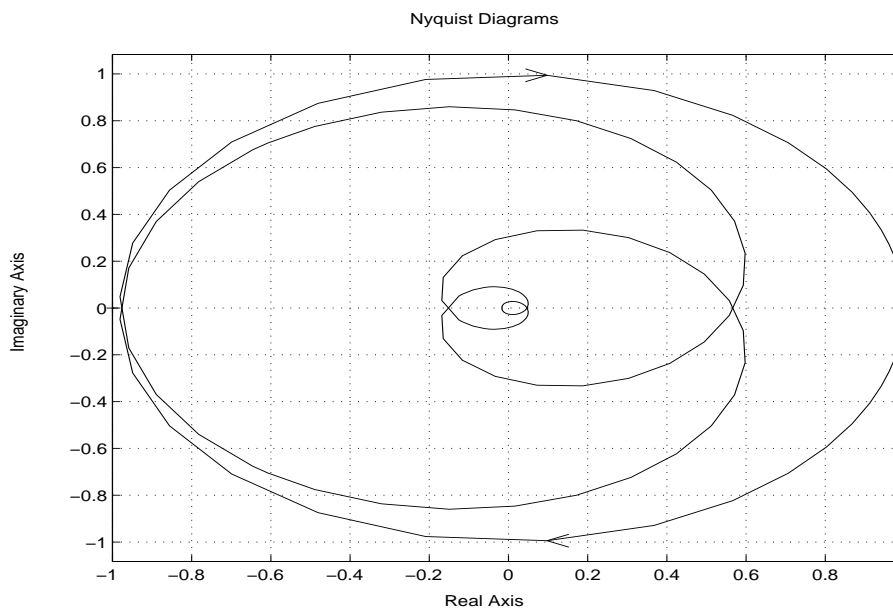


FIGURE 4.6 – Lieu de Nyquist d'un système exhibant un retard

4.3 Fonction de transfert

Le résultat suivant précise la relation entre la fonction de transfert d'un système échantillonné et la fonction de transfert du système continu sous-jacent, en absence d'un retrad pur.

Résultat 4.4 *Considérons le système échantillonné de la figure 4.3 et supposons que le système continu sous-jacent soit décrit par sa fonction de transfert $\mathcal{G}_c(s)$ sans aucun retrad pur, alors la fonction de transfert du système échantillonné, que l'on désignera par $\mathcal{G}(z)$, est donnée par*

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}) \quad (4.5)$$

où $\{g_{cind}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ n'est autre que la réponse indicielle du modèle du système continu, soit

$$\{g_{cind}(t)\} \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{G}_c(s) \cdot \frac{1}{s}\right) \quad (4.6)$$

Preuve. Considérons le système échantillonné de la figure 4.3 et supposons que le système continu sous-jacent soit décrit par sa fonction de transfert, alors on a

$$Y(s) = \mathcal{G}_c(s) U_b(s) \text{ avec } \mathcal{G}_c(s) = \mathcal{L}(g_c(t))$$

Et en vertu de la modélisation du bloqueur d'ordre zéro, on aura

$$Y(s) = \mathcal{G}(s) U_e(s) \text{ avec } \mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_c(s) \mathcal{B}_o(s)$$

Cette équation permet de déterminer directement la sortie du système à partir de la réponse impulsionnelle associée à la fonction de transfert de la cascade composée du bloqueur et du système, soit

$$y(t) = (g * u_e)(t) \text{ avec } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{G}(s) \mathcal{B}_o(s)\}$$

La sortie échantillonnée du système peut être alors aisément déduite en vertu du résultat 4.1, soit

$$y_e(t) = (g_e * u_e)(t)$$

On peut alors décrire le comportement entrée-sortie du système échantillonné comme suit

$$Y_e(s) = \mathcal{G}_e(s) U_e(s) \text{ avec } \mathcal{G}_e(s) = \mathcal{L}(\{g_e(t)\}_{t \in \mathbb{R}})$$

Cette équation suggère de considérer $\mathcal{G}_e(s)$ comme la fonction de transfert du système échantillonné. Or cette dernière a une dimension infinie en vertu de la duplication infinie des pôles et des zéros induite par l'échantillonnage et n'est donc pas commode pour l'ingénierie des systèmes échantillonnés. On peut pallier ce problème en puisant dans le potentiel de la transformée en z puisqu'on peut emprunter la transformation d'échantillonnage $z \rightarrow e^{sT_e}$ pour récrire l'équation de comportement entrée-sortie du système échantillonné sous la forme

$$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \mathcal{Z}(\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}})$$

Et comme tenu de l'expression de la séquence $\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ donnée plus haut, on aura

$$g(t) = g_{cind}(t) - g_{cind}(t - T_e) \text{ avec } g_{cind}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\mathcal{G}_c(s) \frac{1}{s} \right)$$

Une telle équation est beaucoup plus appropriée pour définir la fonction de transfert d'un système échantillonné à partir de $\mathcal{G}(z)$.

CQFD.

Remarque 4.3 *La relation (4.5) montre que la dimension de la fonction de transfert définie à partir de la transformée en z préserve la dimension du système continu contrairement à la transformée de Laplace du comportement entrée-sortie échantillonné. Aussi rassurante que puisse être cette propriété vitale, on peut se demander si cette infiniment grande réduction de dimension du modèle du système échantillonné n'est pas faite au prix d'une perte d'information sur le système continu ? La réponse à cette question fondamentalement légitime résulte du théorème de Shannon en tenant compte de la discussion faite sur les aspects d'échantillonnage, en l'occurrence la périodicité de la transformée de Laplace $\mathcal{G}_e(s)$ et le fait que le plan complexe en z est l'image des bandes*

$$\mathcal{B}_k = \left\{ s \in \mathbb{C} / (2k - 1)\omega_n \leq \text{Im}(s) \leq (2k + 1)\omega_n \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ceci permet de faire le postulat suivant : si la période d'échantillonnage est spécifiée conformément au théorème de Shannon, alors on peut se contenter de la bande de Shannon

$$\mathcal{B}_s = \left\{ s \in \mathbb{C} / \text{Im}(s) \in [-\omega_n, +\omega_n] \right\}$$

pour décrire le système échantillonné. La fonction de transfert $\mathcal{G}(z)$ est donc une description parfaite de la dynamique du système pourvu que les exigences de Shannon soient satisfaites. Ce postulat naturel met l'accent sur l'importance du théorème de Shannon pour l'ingénierie des systèmes échantillonnés et la subtilité entre $\mathcal{G}(z)$ et $\mathcal{G}_e(s)$ qui est bien au delà du changement de variable $z = e^{sT_e}$ comme le laisse entendre certaines idées reçues.

Remarque 4.4 *La relation entre la fonction de transfert d'un système échantillonné et celle du système sous-jacent, soit*

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}} \right)$$

recouvre un fait naturel des systèmes échantillonnés, en l'occurrence la réponse indicielle d'un système échantillonné n'est autre que la séquence des valeurs de la réponse indicielle du système continu sous-jacent aux instants d'échantillonnage.

La table 4.1 donne des fonctions de transfert usuelles ; on peut l'enrichir à volonté à partir de ses propres exercices dans le domaine des systèmes échantillonnés.

$\mathcal{G}_c(s)$	$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{Z}}) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_e^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^m}$	$\frac{z-1}{z} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a^m} \left(\frac{z}{z - e^{-aT_e}} \right)$
e^{-sT_e}	$\frac{1}{z}$
$\frac{a}{(s+a)}$	$\frac{1 - e^{-aT_e}}{z - e^{-aT_e}}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a} (aT_e - 1 + e^{-aT_e}), b_2 = \frac{1}{a} (1 - e^{-aT_e} - aT_e e^{-aT_e})$ $a_1 = -(1 + e^{-aT_e}), a_2 = e^{-aT_e}$
$\frac{a^2}{(p+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-aT_e}(1 + aT_e)$ $b_2 = e^{-aT_e}(e^{-aT_e} + aT_e - 1)$ $a_1 = -2e^{-aT_e}, a_2 = e^{-2aT_e}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{T_e e^{-aT_e}(z-1)}{(z - e^{-aT_e})^2}$

$\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{b(1 - e^{-aT_e}) - a(1 - e^{-bT_e})}{b - a}$ $b_2 = \frac{a(1 - e^{-bT_e})e^{-aT_e} - b(1 - e^{-aT_e})e^{-bT_e}}{b - a}$ $a_1 = -(e^{-aT_e} + e^{-bT_e}), a_2 = e^{-(a+b)T_e}$
$\frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{e^{-bT_e} - e^{-aT_e} + \frac{c}{b}(1 - e^{-bT_e}) - \frac{c}{a}(1 - e^{-aT_e})}{a - b}$ $b_2 = \frac{c}{ab}e^{-(a+b)T_e} + \frac{b-c}{b(a-b)}e^{-aT_e} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bT_e}$ $a_1 = -e^{-aT_e} - e^{-bT_e}, a_2 = e^{-(a+b)T_e}$
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$ $\zeta < 1$	$b_1 = 1 - \alpha \left(\beta + \frac{\zeta\omega_o}{\omega} \gamma \right), b_2 = \alpha^2 + \alpha \left(\frac{\zeta\omega_o}{\omega} \gamma - \beta \right)$ $a_1 = -2\alpha\beta, a_2 = \alpha^2$ $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}, \alpha = e^{-\zeta\omega_o T_e}, \beta = \cos(\omega T_e), \gamma = \sin(\omega T_e)$
$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$ $\zeta < 1$	$b_1 = -b_2 = \frac{1}{\omega} e^{-\zeta\omega_o T_e} \sin(\omega T_e)$ $a_1 = -2e^{-\zeta\omega_o T_e} \cos(\omega T_e), a_2 = e^{-2\zeta\omega_o T_e}$ $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$
$\frac{a^2}{s^2 + a^2}$	$b_1 = b_2 = 1 - \cos(aT_e)$ $a_1 = -2\cos(aT_e), a_2 = 1$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$b_1 = b_2 = \frac{1}{a} \sin(aT_e)$ $a_1 = -2\cos(aT_e), a_2 = 1$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$b_1 = \frac{1-a}{a^2} + T_e \left(\frac{T_e}{2} - \frac{1}{a} \right)$ $b_2 = (1 - e^{-aT_e}) \left(\frac{T_e^2}{2} - \frac{2}{a^2} \right) + \frac{T_e}{a} (1 + e^{-aT_e})$ $b_3 = (1 - e^{-aT_e}) \left(\frac{1}{a^2} (e^{-aT_e} - 1) + e^{-aT_e} T_e \left(\frac{T_e}{2} + \frac{1}{a} \right) \right)$ $a_1 = -(e^{-aT_e} + 2), a_2 = 2e^{-aT_e} + 1, a_3 = -e^{-aT_e}$

TABLE 4.1 – Transmittances échantillonnées usuelles

La relation entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert du système échantillonné est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) z^{-\ell} \quad \text{avec} \quad g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

On peut donc récrire la fonction de transfert sous la forme d'une fraction rationnelle en z comme pour l'opérateur de convolution, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) &= z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \\ &= z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}} \quad \text{avec} \quad na > nb \\ &= \frac{b_0 z^{na-1} + b_1 z^{na-2} + \dots + b_{nb} z^{na-nb-1}}{z^{na} + a_1 z^{na-1} + \dots + a_{na-1} z + a_{na}} \\ &= \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \end{aligned}$$

Ceci permet de récrire le modèle fonction de transfert du système échantillonné comme suit

$$Y(z) = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) \iff Y(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} U(z)$$

Remarque 4.5 La fonction de transfert d'un système échantillonné peut se récrire sous la forme d'une fraction rationnelle en z

$$\mathcal{G}(z) = \frac{Z(z)}{P(z)} = \gamma \frac{\prod_{i=1}^{nz} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{np} (z - p_i)}$$

Cette expression de la fonction de transfert permet de déterminer directement les pôles et les zéros du système, soit les solutions des équations caractéristiques $Z(z) = 0$ et $P(z) = 0$. On peut alors déterminer les zéros du système, i.e. $\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) = \{z_1, \dots, z_{nz}\}$, les pôles du système, i.e. $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) = \{p_1, \dots, p_{np}\}$, et la configuration pôles-zéros du système, i.e. l'ensemble $\mathcal{CPZ}(\mathcal{SYS}) = \mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \cup \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS})$.

A la lumière des aspects vitaux du concept d'échantillonnage qui ont été mis en évidence à partir du résultat 3.1, on peut en déduire aisément que les pôles d'un système échantillonné dans le plan complexe z , i.e. p_{ei} pour $i \in [1, np]$, sont reliés aux pôles du système continu sous-jacent dans le plan complexe en s , i.e. p_{ci} pour $i \in [1, np]$, comme suit

$$p_{ei} = e^{p_{ci} T_e} \quad \text{pour} \quad i \in [1, np]$$

Par contre, il n'existe pas de relation générale entre les zéros d'un système échantillonné et ceux du système continu sous-jacent comme l'indique la table 4.1 des fonctions de transfert

usuelles des systèmes échantillonnés. Cet aspect des choses peut être particulièrement illustré en considérant un système continu décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}_c(s) = \frac{1}{s^n}$$

La fonction de transfert du système échantillonné correspondant est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{T_e^n}{n!} \frac{B_n(z)}{(z-1)^n}$$

avec

$$B_n(z) = b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$$

où les coefficients b_k pour $k \in [1, n]$ sont déterminés comme suit

$$b_k = \sum_{i=1}^k \frac{(n+1)!}{(n+1-k+i)!} i^n (-1)^{k-i}$$

On constate que l'échantillonnage génère des zéros dans le cas des systèmes continus de degré relatif supérieur à deux comme l'indique clairement la table 4.2 et que ces zéros ne sont pas nécessairement dans le domaine de stabilité.

n	$B_n(z)$
1	1
2	$z + 1$
3	$z^2 + 4z + 1$
4	$z^3 + 11z^2 + 11z + 1$
5	$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$

TABLE 4.2 – Zéros d'un intégrateur multiple

La figure 4.7 permet de mieux apprécier la configuration des zéros d'un système échantillonné. Elle montre l'évolution des pôles et des zéros d'un système échantillonné issu d'un système continu stable sans aucun zéro. Deux observations peuvent être faites. La première est que les trois pôles du système sont proches du cercle unité pour des périodes d'échantillonnage relativement petites. La seconde est que l'échantillonnage introduit des zéros et que ces zéros sont à l'extérieur du disque unité pour des périodes d'échantillonnage relativement raisonnables.

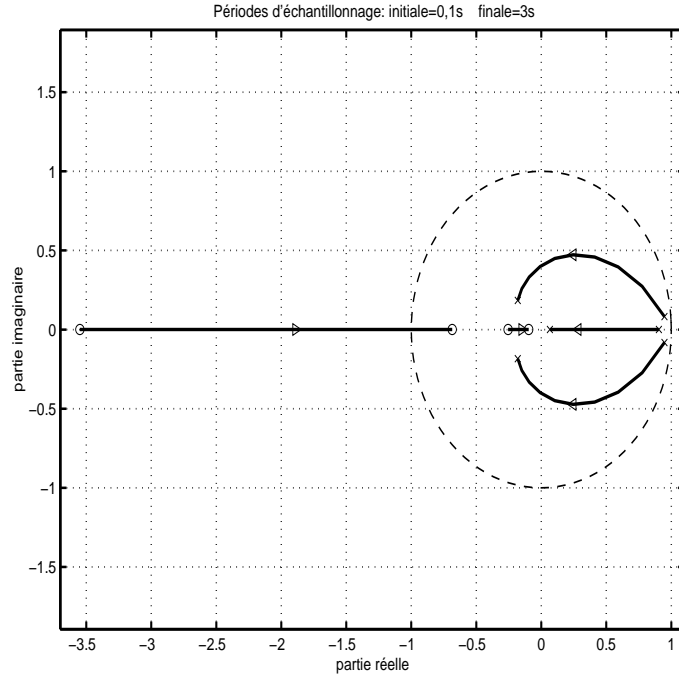


FIGURE 4.7 – Pôles et zéros d'un système échantillonné

4.4 Equation aux différences

Le modèle du type fonction de transfert peut se récrire comme suit

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-1}B(z^{-1})U(z)$$

avec

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_naz^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_o + b_1z^{-1} + \dots + b_nbz^{-nb}$$

Compte tenu des expressions des polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$, on obtient

$$Y(z) + \sum_{i=1}^{na} a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} z^{-1} U(z)$$

Cette équation permet de déterminer l'équation aux différences du système échantillonné en vertu du théorème du retard associé à la transformée en z , soit

$$y(kT_e) + \sum_{i=1}^{na} a_i y(kT_e - iT_e) = \sum_{i=0}^{nb} b_i u(kT_e - iT_e - T_e)$$

Et en utilisant l'opérateur retard, on obtient

$$A(q^{-1})y(kT_e) = q^{-1}B(q^{-1})u(kT_e) \tag{4.7}$$

avec

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na} \tag{4.8}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_nbq^{-nb} \tag{4.9}$$

L'équation aux différences peut être interprétée comme un opérateur linéaire décrit par une fraction rationnelle en l'opérateur retard, soit

$$y(kT_e) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left(q^{-1}u(kT_e) \right) \quad (4.10)$$

On peut alors en déduire naturellement la relation entre l'équation aux différences et la réponse impulsionnelle, i.e.

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (4.11)$$

4.5 Représentation d'état

Supposons que le système continu sous-jacent est décrit par la représentation d'état donnée par

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = F_c x(t) + G_c u(t) & \text{avec } x(0) = x_o \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

où $\{x(t)\} \in \mathbb{R}^n$ représente la trajectoire de l'état du système et (F_c, G_c, H_c, E_c) désigne une réalisation d'état du système de dimensions appropriées. La figure 4.9 montre une représentation du système qui illustre bien la nature intrinsèque des variables d'état : une mémoire parfaite du système qui permet de réaliser une prédiction parfaite du comportement futur du système dans le contexte idéal considéré comme l'indique le résultat suivant.

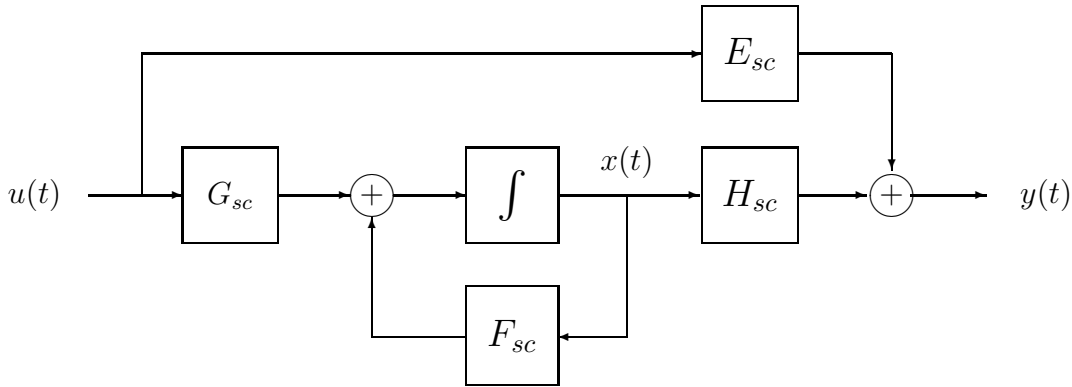


FIGURE 4.8 – Représentation d'état

Résultat 4.5 Les trajectoires d'état et de sortie des systèmes linéaires invariants dans le temps décrits par une réalisation d'état sont respectivement données par

$$\mathcal{T}ES \begin{cases} x(t) = e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{F_c(t-\tau)} G_c u(\tau) d\tau \\ y(t) = H_c e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t H_c e^{F_c(t-\tau)} G_c u(\tau) d\tau + E_c u(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

Preuve. Notons d'abord que l'équation d'état du système peut se récrire comme suit

$$e^{-F_c t} (\rho x(t) - F_c x(t)) = e^{-F_c t} G_c u(t)$$

ou d'une manière équivalente

$$\rho [e^{-F_c t} x(t)] = e^{-F_c t} G_c u(t)$$

En effet, si l'on intègre les deux membres de cette équation entre les instants t_o et t , on obtient

$$e^{-F_c t} x(t) = e^{-F_c t_o} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{-F_c \tau} G_c u(\tau) d\tau$$

ou d'une manière équivalente

$$x(t) = e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{F_c(t-\tau)} G_c u(\tau) d\tau$$

On retrouve bien la trajectoire d'état du système et on peut en déduire aisément sa trajectoire de sortie à partir son équation de sortie.

CQFD.

Le résultat suivant donne la représentation d'état du système échantillonné issu du système continu (4.12).

Résultat 4.6 *Considérons le système continu décrit par la réalisation d'état (4.12), le système échantillonné correspondant est décrit par la représentation d'état*

$$\text{SYSE} \begin{cases} x((k+1)T_e) = Fx(kT_e) + Gu(kT_e) \\ y(kT_e) = Hx(kT_e) + Eu(kT_e) \end{cases} \quad (4.14)$$

avec

$$F = e^{F_c T_e}, \quad G = \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \tau} d\tau \right) G_c, \quad H = H_c \quad \text{et} \quad E = E_c \quad (4.15)$$

Preuve. Le système échantillonné est complètement défini par la relation entre les variables d'état (4.13) aux instants d'échantillonnage kT_e et $(k+1)T_e$. Cette relation peut être obtenue à partir de la trajectoire d'état du système avec $t_o = kT_e$ et $t = (k+1)T_e$, soit

$$x((k+1)T_e) = e^{F_c((k+1)T_e - kT_e)} x(kT_e) + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{F_c((k+1)T_e - \tau)} G_c u(\tau) d\tau$$

Compte tenu du bloqueur d'ordre zéro, on a

$$u(\tau) = u(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [kT_e, (k+1)T_e)$$

Et si l'on effectue le changement de variable $(k+1)T_e - \tau = \eta$, on obtient

$$x((k+1)T_e) = e^{F_c T_e} x(kT_e) + \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \eta} G_c d\eta \right) u(kT_e)$$

Le système échantillonné est donc bien décrit par les équations d'état et de sortie (4.15) puisque

$$y(kT_e) = H_c x(kT_e) + E_c u(kT_e) \text{ pour tout } k \geq 1$$

CQFD.

Le système échantillonné peut être représenté comme l'indique la figure 4.9. Par ailleurs, on montre aisément que les trajectoires d'état et de sortie sont respectivement données par les expressions suivantes pour tout $k > \ell$.

$$\mathcal{TR}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{E} \left\{ \begin{array}{l} x(kT_e) = F^{(k-\ell)} x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} F^{(k-j-1)} G u(jT_e) \\ y(kT_e) = H F^{(k-\ell)} x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} H F^{(k-j-1)} G u(jT_e) + E u(kT_e) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

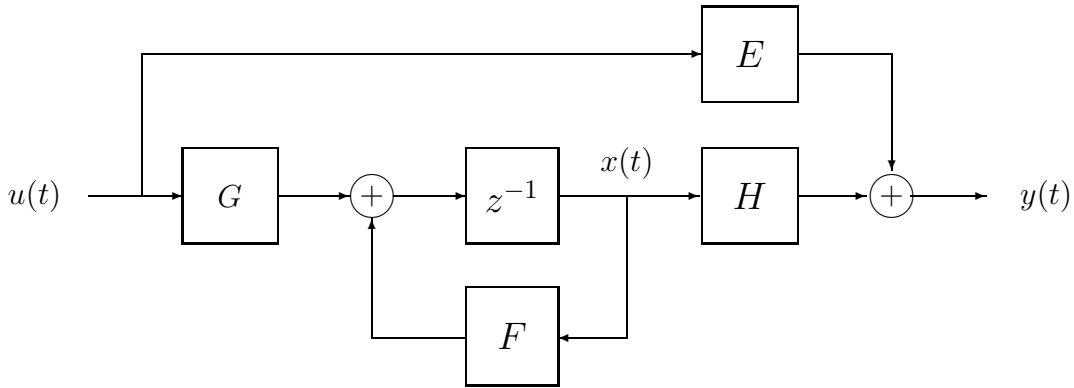


FIGURE 4.9 – Représentation d'état

La trajectoire d'état permet de déduire la matrice de transition du système échantillonné définie par $\phi(kT_e) \triangleq F^{k-\ell}$, soit la matrice de passage de l'état $x(\ell T_e)$ à l'état $x(kT_e)$ pour une entrée identiquement nulle. Cette matrice n'est autre que la solution de l'équation aux différences

$$\phi((k+1)T_e, \ell T_e) = F \phi(kT_e, \ell T_e) \text{ avec } \phi(\ell T_e, \ell T_e) = I_n \quad (4.17)$$

La matrice de transition est régulière puisque la matrice d'état d'un système échantillonné, i.e. $F = e^{F_c T_e}$, est régulière. Quant à la trajectoire de sortie, elle peut se récrire comme suit

$$y(kT_e) = HF^k x_o + \sum_{i=0}^{k-1} HF^{(k-i-1)} Gu(iT_e) + Eu(kT_e)$$

Cette forme permet de préciser la relation entre une réalisation d'état et la réponse impulsionnelle du système, soit

$$g(kT_e) = \begin{cases} HF^{(k-1)}G & \text{pour } k > 0 \\ E & \text{pour } k = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Par ailleurs, si l'on applique la transformée en z aux équations d'état et de sortie du système échantillonné, on obtient

$$\begin{pmatrix} zI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(z) \\ U(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zx(0) \\ Y(z) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Cette description permet d'introduire naturellement la matrice système définie par la matrice complexe

$$\mathcal{M}_s(z) = \begin{pmatrix} zI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

et de déterminer la fonction de transfert du système à partir de sa réalisation d'état

$$\mathcal{G}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G + E \quad (4.21)$$

On notera que cette fonction de transfert peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{G}(z) = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F)G + \det(zI_n - F)E}{\det(zI_n - F)} \triangleq \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \quad (4.22)$$

qui permet de mettre en évidence que les modes d'un système, qui ne sont autres que les valeurs propres de la matrice d'état F , ne sont pas nécessairement des pôles du système puisque

$$\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{CM}(\mathcal{SYS}) = \mathcal{V}(\mathcal{SYS})$$

Remarque 4.6 *Compte tenu de l'expression de la matrice résolvante donnée par le résultat 4.2, le passage d'une relation d'état d'un système échantillonné à sa fonction de transfert peut être exprimée comme suit*

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{\det(zI_n - F)} \sum_{k=0}^n (HA_k G + a_k E) z^{n-k} \text{ avec } A_0 = 0_n$$

Cette expression montre clairement que le retard d'échantillonnage est bien intrinsèque aux systèmes continus strictement propres. En effet, la propriété suivante est toujours vraie

$$(E \neq 0) \implies \mathcal{G}(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

Rappelons que les systèmes physiques se comportent généralement comme des systèmes strictement propres, i.e. $E_c = 0$. Les systèmes échantillonnés correspondants sont alors décrits par

$$\text{SYSE} \begin{cases} x((k+1)T_e) = Fx(kT_e) + Gu(kT_e) \\ y(kT_e) = Hx(kT_e) \end{cases}$$

et peuvent être représentés comme l'indique la figure 4.10.

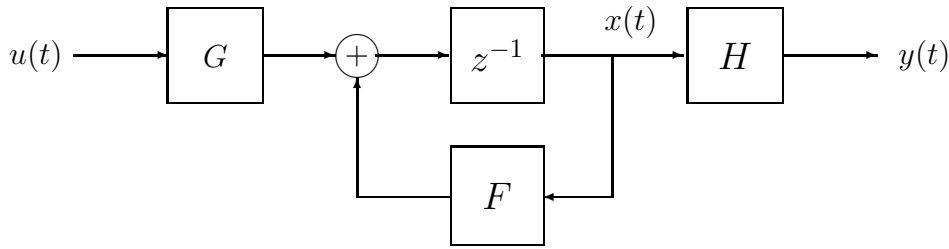


FIGURE 4.10 – Représentation d'état des systèmes strictement propres

4.6 Réalisations d'état

La représentation d'état est plurielle puisqu'on peut passer d'une réalisation (F, G, H, E) à une autre réalisation $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$ modulo une matrice de transformation T . En effet, si l'on effectue le changement de base dans l'espace d'état défini par

$$x(kT_e) = T\bar{x}(kT_e)$$

où $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de transformation régulière, alors on peut récrire les équations du système pour le vecteur d'état $\bar{x}(kT_e)$ modulo quelques manipulations algébriques relativement simples comme suit

$$\bar{x}(((k+1)T_e) = T^{-1}x((k+1)T_e) = T^{-1}FT\bar{x}(kT_e) + T^{-1}Gu(kT_e)$$

$$y(kT_e) = H(T\bar{x}(kT_e)) + Eu(kT_e) = HT\bar{x}(kT_e) + Eu(kT_e)$$

On aboutit alors au système équivalent suivant

$$\text{SYS} \begin{cases} \bar{x}(((k+1)T_e) = \bar{F}\bar{x}(kT_e) + \bar{G}u(kT_e) \\ y(kT_e) = \bar{H}\bar{x}(kT_e) + \bar{E}u(kT_e) \end{cases} \quad (4.23)$$

avec

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT \quad \text{et} \quad \bar{E} = E \quad (4.24)$$

La pluralité de la représentation d'état concerne aussi la matrice-système. On montre aisément que la matrice-système associée à la réalisation d'état $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$, soit $\bar{\mathcal{M}}_s(z)$, est reliée à la matrice-système associée à la réalisation d'état (F, G, H, E) , soit $\mathcal{M}_s(z)$, comme suit

$$\bar{\mathcal{M}}_s(z) = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \mathcal{M}_s(z) \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Contrairement à la matrice-système, la fonction de transfert du système est un invariant par un changement de base dans l'espace d'état comme le montre les simples manipulations algébriques suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(z) &= \bar{H} \left(zI_n - \bar{F} \right)^{-1} \bar{G} + \bar{E} \\ &= HT \left(T^{-1}zI_nT - T^{-1}FT \right)^{-1} T^{-1}G + E \\ &= HT \left(T^{-1} \left(zI_n - F \right) T \right)^{-1} T^{-1}G + E \\ &= H \left(zI_n - F \right)^{-1} G + E \\ &= \mathcal{G}(z) \end{aligned}$$

Ce résultat est tout à fait naturel dans la mesure où la fonction de transfert est une représentation externe qui n'a aucune raison d'être différente pour un même système. Cette unicité de représentation est vraie pour toutes les représentations externes, notamment la réponse impulsionnelle et la réponse harmonique.

Remarque 4.7 *Le polynôme caractéristique d'un système est invariant par changement de base. En effet, on a*

$$\det(zI_n - \bar{F}) = \det(T^{-1}zI_nT - T^{-1}FT) = \det(T^{-1}(zI_n - F)T) = \det(zI_n - F)$$

Le problème de réalisation consiste en le passage d'une fonction de transfert à une réalisation d'état. Comme la représentation d'état est plurielle, on s'intéressera aux réalisations d'état usuelles qui sont particulièrement motivées par des considérations d'analyse et/ou de synthèse. Pour des considérations purement pédagogiques, ces réalisations seront principalement développées pour des cas particuliers.

La forme canonique de commandabilité est une représentation d'état que l'on peut déterminer à partir de la description suivante du comportement entrée-sortie du système.

$$Y(z) = B(z^{-1}) \left(\frac{1}{A(z^{-1})} U(z) \right)$$

avec

$$Y(z) = \mathcal{Z}(\{y(kT_e)\}) \text{ et } U(z) = \mathcal{Z}(\{u(kT_e)\})$$

Cette description peut se récrire, en introduisant une nouvelle variable, sous la forme

$$\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{P} \begin{cases} A(z^{-1})Z(z) = U(z) \\ Y(z) = B(z^{-1})Z(z) \end{cases}$$

avec

$$Z(z) = \mathcal{Z}(\{z(kT_e)\})$$

dite représentation d'état partiel et que l'on peut exprimer dans le domaine temporel comme suit

$$\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{P} \begin{cases} A(q^{-1})z(kT_e) = u(kT_e) \\ y(kT_e) = B(q^{-1})z(kT_e) \end{cases}$$

Considérons le cas d'un système de troisième ordre décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_o + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}$$

La représentation d'état partiel correspondante est donnée par

$$\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{P} \begin{cases} z(kT_e) = -a_1z((k-1)T_e) - a_2z((k-2)T_e) - a_3z((k-3)T_e) + u(kT_e) \\ y(kT_e) = b_o z(kT_e) + b_1z((k-1)T_e) + b_2z((k-2)T_e) + b_3z((k-3)T_e) \end{cases}$$

Cette forme suggère de définir un vecteur d'état à partir de la variable $z(kT_e)$ comme suit

$$x_c(kT_e) = \begin{bmatrix} x_{c1}(kT_e) \\ x_{c2}(kT_e) \\ x_{c3}(kT_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z((k-1)T_e) \\ z((k-2)T_e) \\ z((k-3)T_e) \end{bmatrix}$$

En effet, compte tenu de la représentation d'état partiel, on obtient

$$\begin{aligned} x_{c1}((k+1)T_e) &= -a_1x_{c1}(kT_e) - a_2x_{c2}(kT_e) - a_3x_{c3}(kT_e) + u(kT_e) \\ x_{c2}((k+1)T_e) &= x_{c1}(kT_e) \\ x_{c3}((k+1)T_e) &= x_{c2}(kT_e) \\ y(kT_e) &= (b_1 - b_o a_1)x_{c1}(kT_e) + (b_2 - b_o a_2)x_{c2}(kT_e) + (b_3 - b_o a_3)x_{c3}(kT_e) \\ &\quad + b_o u(kT_e) \end{aligned}$$

Le système peut être alors décrit par les équations d'état et de sortie

$$\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{C} \begin{cases} x_c((k+1)T_e) = F_c x_c(kT_e) + G_c u(kT_e) \\ y(kT_e) = H_c x_c(kT_e) + E_c u(kT_e) \end{cases}$$

où (F_c, G_c, H_c, E_c) est une réalisation du système, dite forme canonique commandable, donnée par

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_c^T = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ b_3 - b_o a_3 \end{bmatrix} \text{ et } E_c = b_o$$

On notera que (F_c, G_c, H_c, E_c) est une réalisation commandable : c'est ce qui justifie l'appellation forme canonique commandable. Quant à l'appellation état partiel, elle est naturellement motivée par le fait que $z(kT_e)$ est une variable d'état du système.

Remarque 4.8 *En adoptant la même approche, on peut déduire que la forme canonique commandable associée à la fonction de transfert*

$$\mathcal{G}(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}}$$

est donnée par

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}, G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, H_c^T = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ \dots \\ b_n - b_o a_n \end{bmatrix} \text{ et } E_c = b_o$$

La forme canonique d'observabilité est une représentation d'état que l'on peut déterminer à partir de la description suivante du comportement entrée-sortie du système

$$Y(z) = \frac{1}{A(z^{-1})} \left(B(z^{-1}) U(z) \right)$$

ou d'une manière équivalente

$$Y(z) = b_o U(z) + \sum_{i=1}^n z^{-i} \left(-a_i Y(z) + b_i U(z) \right)$$

Considérons le cas du système de troisième ordre, cette équation peut se récrire sous la forme

$$Y(z) = b_o U(z) + z^{-1} \left(\left(\left(-a_1 Y(z) + b_1 U(z) \right) + z^{-1} \left(\left(-a_2 Y(z) + b_2 U(z) \right) \dots \dots \dots \right) \right) \dots \dots \dots + z^{-1} \left(-a_3 Y(z) + b_3 U(z) \right) \right)$$

Ce système comporte trois retards purs dont les sorties peuvent être considérées comme des variables d'état que l'on peut définir à partir du comportement entrée-sortie comme suit

$$\begin{aligned}
X_{o1}(z) &= z^{-1} \left(\left(\left(-a_1 Y(z) + b_1 U(z) \right) + z^{-1} \left(\left(-a_2 Y(z) + b_2 U(z) \right) \dots \dots \dots \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \dots \dots \dots + z^{-1} \left(-a_3 Y(z) + b_3 U(z) \right) \right) \right) \right) \\
X_{o2}(z) &= z^{-1} \left(\left(-a_2 Y(z) + b_1 U(z) \right) + z^{-1} \left(-a_3 Y(z) + b_3 U(z) \right) \right) \\
X_{o3}(z) &= z^{-1} \left(-a_3 Y(z) + b_3 U(z) \right)
\end{aligned}$$

avec

$$Y(z) = b_o U(z) + X_{o1}(z)$$

En substituant l'expression ci dessus de la sortie du système dans ses équations de variables d'état, on obtient

$$\begin{aligned}
x_{o1}((k+1)T_e) &= -a_1 x_{o1}(kT_e) + x_{o2}(kT_e) + (b_1 - b_o a_1) u(kT_e) \\
x_{o2}((k+1)T_e) &= -a_2 x_{o1}(kT_e) + x_{o3}(kT_e) + (b_2 - b_o a_2) u(kT_e) \\
x_{o3}((k+1)T_e) &= -a_3 x_{o1}(kT_e) + (b_3 - b_o a_3) u(kT_e) \\
y(kT_e) &= x_{o1}(kT_e) + b_o u(kT_e)
\end{aligned}$$

Le système peut être alors décrit par les équations d'état et de sortie

$$\mathcal{FCO} \begin{cases} x_o((k+1)T_e) = F_o x_o(kT_e) + G_o u(kT_e) \\ y(kT_e) = H_o x_o(kT_e) + E_o u(kT_e) \end{cases}$$

où (F_o, G_o, H_o, E_o) est une réalisation du système, dite forme canonique observable, donnée par

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_o = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ b_3 - b_o a_3 \end{bmatrix}, \quad H_o = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \text{et} \quad E_o = b_o$$

On notera que (F_o, G_o, H_o, E_o) est une réalisation observable : c'est ce qui justifie l'appellation forme canonique observable.

Remarque 4.9 La forme canonique observable aurait pu être déduite aisément à partir de la forme canonique commandable. Il suffit de remarquer que la fonction de transfert du système peut se récrire comme suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(z) &= H_c (zI_n - F_c)^{-1} G_c + E_c \\
&= (H_c (zI_n - F_c)^{-1} G_c + E_c)^T \\
&= G_c^T (zI_n - F_c^T)^{-1} H_c^T + E_c^T \\
&= H_o (zI_n - F_o)^{-1} G_o + E_o
\end{aligned}$$

Remarque 4.10 *En adoptant la même approche, on peut déduire que la forme canonique observable associée à la fonction de transfert*

$$\mathcal{G}(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}}$$

est donnée par

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & \\ -a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, G_o = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ \vdots \\ b_n - b_o a_n \end{bmatrix}, H_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \text{ et } E_o = b_o$$

Les formes modales sont obtenus à partir d'une décomposition modale du système. Pour des considérations de simplicité, on ne traitera qu'un exemple illustratif du problème de réalisation à partir d'une fonction de transfert décomposée en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(z) = \frac{\gamma_{11}}{z - p_1} + \frac{\gamma_{12}}{(z - p_1)^2} + \frac{\gamma_{21}}{z - p_2} + \frac{\gamma_{22}}{(z - p_2)^2} + \frac{\gamma_{23}}{(z - p_2)^3} + \frac{\gamma_{31}}{z - p_3}$$

La sortie du système peut se récrire comme suit

$$Y(z) = \gamma_{12} X_1(z) + \gamma_{11} X_2(z) + \gamma_{23} X_3(z) + \gamma_{22} X_4(z) + \gamma_{21} X_5(z) + \gamma_{31} X_6(z)$$

où les variables $X_i(z)$ pour $i \in [1, 6]$ sont respectivement définies par

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{1}{z - p_1} & X_2(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} X_2(z) \\ X_2(z) &= \frac{1}{z - p_1} U(z) & U(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} U(z) \\ X_3(z) &= \frac{1}{z - p_2} & X_4(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}} X_4(z) \\ X_4(z) &= \frac{1}{z - p_2} & X_5(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}} X_5(z) \\ X_5(z) &= \frac{1}{z - p_2} U(z) & U(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}} U(z) \\ X_6(z) &= \frac{1}{z - p_3} U(z) & U(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - p_3 z^{-1}} U(z) \end{aligned}$$

On peut donc définir des variables d'état comme suit

$$\begin{aligned} x_1((k+1)T_e) &= p_1 x_1(kT_e) + x_2(kT_e) \\ x_2((k+1)T_e) &= p_1 x_2(kT_e) + u(kT_e) \\ x_3((k+1)T_e) &= p_2 x_3(kT_e) + x_4(kT_e) \\ x_4((k+1)T_e) &= p_2 x_4(kT_e) + x_5(kT_e) \\ x_5((k+1)T_e) &= p_2 x_5(kT_e) + u(kT_e) \\ x_6((k+1)T_e) &= p_3 x_6(kT_e) + u(kT_e) \end{aligned}$$

pour aboutir à la réalisation d'état modale

$$\mathcal{R}MOD \begin{cases} x_m((k+1)T_e) = F_m x_m(kT_e) + G_m u(kT_e) \\ y(kT_e) = H_m x_m(kT_e) \end{cases}$$

avec

$$F_m = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, \quad G_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_m^T = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

4.7 Modélisation des perturbations

Le problème de modélisation des perturbations a reçu une attention particulière puisqu'il est impossible de concevoir des systèmes de commande réalisant une compensation des perturbations ou des filtres réalisant une estimation optimale du signal utile sans aucune connaissance sur la nature des perturbations ou des bruits de mesure ([2], [7]), [17]). On distingue deux classes de perturbations selon leur réalisation, e.g. une réalisation déterministe où une réalisation aléatoire.

- La transformée en z d'une perturbation déterministe $\{v(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ peut se récrire sous la forme

$$V(z) = \mathcal{H}(z^{-1}) = \mathcal{H}(z^{-1}) \Delta(z) \quad (4.26)$$

avec

$$\Delta(z) = \mathcal{Z}(\delta(kT_e)) \quad (4.27)$$

Une perturbation déterministe peut être alors interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un système dynamique dont la fonction de transfert est égale à la transformée en z de cette perturbation comme l'indique la figure 4.11.

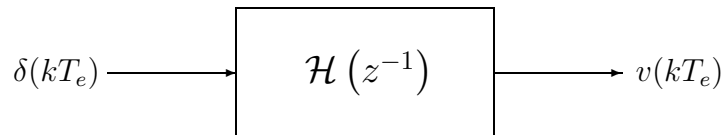


FIGURE 4.11 – Générateur d'une perturbation déterministe

Les autres représentations peuvent être déduites de la fonction de transfert, e.g. la réponse impulsionnelle et l'équation aux différences respectivement définies par

$$\left\{ v(kT_e) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{Z} \left(\left\{ v(kT_e) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \right) = \mathcal{H}(z^{-1}) \quad (4.28)$$

$$v(kT_e) = \mathcal{H}(q^{-1}) \delta(kT_e) \quad (4.29)$$

En guise d'illustration, on peut respectivement représenter les perturbations du type échelon et une perturbation harmonique de pulsation ω comme suit

$$(1 - q^{-1}) v(kT_e) = v \delta(kT_e)$$

et

$$(1 - 2\cos(\omega T_e) q^{-1} + q^{-2}) v(kT_e) = v \sin(\omega T_e) \delta((k-1)T_e)$$

- Une perturbation aléatoire $\{v(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est généralement décrite par un processus stochastique ergodique et stationnaire comme suit

$$v(kT_e) = \mathcal{H}(q^{-1}) \gamma(kT_e) \quad (4.30)$$

avec

$$\mathcal{H}(e^{-j\omega T_e}) = \mathcal{S} \left(\left\{ v(kT_e) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \right) \quad (4.31)$$

où $\mathcal{H}(z^{-1})$ est une fonction de transfert propre dont le module sur le cercle unité est égal au spectre de la séquence $\{v(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{\gamma(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies. Une perturbation aléatoire peut être alors interprétée comme la réponse à un bruit blanc d'un système dynamique dont la réponse harmonique peut être déterminée à partir du spectre de cette perturbation comme l'indique la figure 4.12.

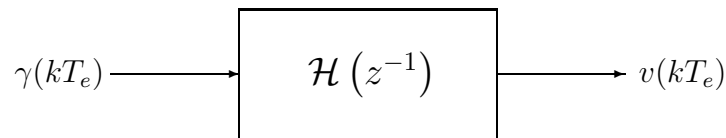


FIGURE 4.12 – Générateur d'une perturbation aléatoire

Les différentes représentations d'un générateur des perturbations peuvent être déduites naturellement à partir de l'opérateur $\mathcal{H}(q^{-1})$. Ce dernier peut être obtenu à partir d'une expérience d'identification adéquate [11], [12], [21]) dont l'ultime motivation est de développer une approche rationnelle et efficace pour traiter les problèmes de prédiction et de filtrage inhérents à la théorie des systèmes .

4.8 Systèmes à retard

Le résultat suivant précise la relation entre les fonctions de transfert du système échantillonné et du système continu sous-jacent dans le cas d'un système exhibant un retard pur.

Résultat 4.7 *Considérons le système échantillonné de la figure 4.3 et supposons que le système continu sous-jacent soit décrit par sa fonction de transfert et exhibe un retard pur τ_d que l'on peut exprimer en fonction de la période d'échantillonnage comme suit*

$$\tau_d = (d + 1)T_e - \eta T_e \text{ avec } d \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq \eta < 1 \quad (4.32)$$

La fonction de transfert du système échantillonné, que l'on désignera par $\mathcal{G}(z)$, est alors donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z - 1}{z^{d+1}} \mathcal{Z} (\{g_{coind}(kT_e + \eta T_e)\}_{k \in \mathbb{N}}) \quad (4.33)$$

avec

$$\{g_{coind}(t)\} \triangleq \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{1}{s} \right) \quad (4.34)$$

La preuve peut être aisément effectuée en adoptant la démarche adoptée pour prouver le résultat 4.4 tout en remarquant que

$$\mathcal{Z} (\{g_{coind}(kT_e + \eta T_e)\}_{k \in \mathbb{N}}) = \mathcal{Z} (\{(g_{coind}(kT_e + \eta T_e)) \alpha(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}).$$

Cette preuve est disponible dans la solution du premier devoir ; elle peut être consultée si besoin est.

Ce résultat peut être conforté en utilisant la propriété suivante de la réponse impulsionnelle du système continu, soit

$$g_c(t) = 0 \text{ pour tout } t < \tau_d \quad (4.35)$$

En effet, compte tenu de la relation entre la réponse impulsionnelle du système continu et celle du système échantillonné correspondant, soit

$$g(kT_e) = \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} g_c(\tau) d\tau$$

on peut en déduire aisément que la réponse impulsionnelle du système échantillonné est donnée par

$$g(kT_e) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \in [0, d] \\ \int_{(d+1-\eta)T_e}^{(d+1)T_e} g_c(\tau) d\tau & \text{pour } k = d + 1 \\ \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} g_c(\tau) d\tau & \text{pour } k > d + 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

L'opérateur de convolution discrète associé à cette réponse impulsionnelle est alors donné par

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}} \quad (4.37)$$

On peut donc en déduire aisément la fonction de transfert du système échantillonné par une simple application de la transformée en z à la réponse impulsionnelle qui donne

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}} \quad (4.38)$$

Ce développement montre clairement que le problème du retard pur n'est pas aussi crucial pour les systèmes échantillonnés dans la mesure où la fonction de transfert associée est de dimension finie contrairement au cas des systèmes continus à retard dont la dimension est infinie. Rappelons par ailleurs que la mise en œuvre des algorithmes de commande conduit inéluctablement à un retard fractionnaire égal au temps de conversion et de calcul du signal de commande.

Remarque 4.11 *Compte tenu de l'expression de la fonction de transfert d'un système exhibant un retard pur, l'ordre et le degré relatif du système sont respectivement donnés par*

$$n \triangleq \max(na, nb + d + 1)$$

et

$$r \triangleq n - \min(na, nb + d + 1)$$

On distingue alors deux cas qui permettent de mieux apprécier la configuration pôles-zéros du système.

- Le cas $na \geq nb + d + 1$ où l'on peut récrire la fonction de transfert du système échantillonné comme suit

$$\mathcal{G}(z) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^r \frac{z^{nb} B(z^{-1})}{z^{na} A(z^{-1})}$$

avec

$$r = na - nb - d - 1$$

Outre les na pôles et nb zéros du système, qui sont respectivement les zéros des polynômes $z^{na} A(z^{-1})$ et $z^{nb} B(z^{-1})$, on aura $na - nb - d - 1$ zéros à l'origine.

- Le cas $na < nb + d + 1$ où l'on peut récrire la fonction de transfert du système échantillonné comme suit

$$\mathcal{G}(z) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1}{z^r} \frac{z^{nb} B(z^{-1})}{z^{na} A(z^{-1})}$$

avec

$$r = nb + d + 1 - na$$

Outre les na pôles et nb zéros du système, qui sont respectivement les zéros des polynômes $z^{na} A(z^{-1})$ et $z^{nb} B(z^{-1})$, on aura $nb + d + 1 - na$ pôles à l'origine.

La fonction de transfert $\mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{B_\sigma(z)}$ d'ordre n peut être utilisée pour déterminer une réalisation d'état (F, G, H, E) du système avec retard à partir d'un problème de réalisation approprié.

4.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation des systèmes linéaires échantillonnés à partir des représentations des systèmes continus sous-jacents, notamment la réponse impulsionnelle $\{g_c(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ et la fonction de transfert $\mathcal{G}_c(s)$. On retiendra qu'un système échantillonné issu d'un système linéaire continu est complètement caractérisé par une application linéaire de l'ensemble de ses entrées vers l'ensemble de ses sorties qui peut être représentée de plusieurs manières selon l'ultime motivation de la modélisation. On distingue

- La réponse impulsionnelle donnée par la séquence $\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}$ définie comme suit

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = \sum_{k=d+1}^{\infty} g(kT_e) q^{-k} \text{ avec } g(kT_e) = \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} g_c(\tau) d\tau$$

- La réponse harmonique, si elle existe, donnée par la séquence $\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in [0, \omega_n]}$ définie comme suit

$$\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) = \sum_{k=d+1}^{\infty} g(kT_e) e^{-j\omega k T_e}$$

- La fonction de transfert donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \frac{1}{z^{d+1}} \mathcal{Z}(\{g_{\text{coind}}(kT_e + \eta T_e) \alpha(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

- L'équation aux différences donnée par

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

Les relations entre les diverses représentations ont été particulièrement précisées, en l'occurrence

$$\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) = \mathcal{F} \left\{ g(kT_e) \right\}_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{k=d+1}^{\infty} g(kT_e) e^{-j\omega k T_e} = q^{-d-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{Z} \left\{ g(kT_e) \right\}_{k \in \mathbb{N}} = H(zI_n - F)^{-1} G + E$$

$$\mathcal{M}_s(z) = \begin{bmatrix} zI_n - F & G \\ -H & E \end{bmatrix}$$

Une attention particulière a été accordée aux problématiques du retard et de modélisation des perturbations. En effet, la représentation d'un système échantillonné issu d'un système continu exhibant un retard pur a permis de mettre en exergue le principal atout des systèmes échantillonnés, i.e. la dimension des systèmes échantillonnés est finie indépendamment de la valeur du retard pur du système continu sous-jacent. Cette propriété est l'essence du développement vigoureux du concept de prédiction linéaire dans le contexte des systèmes échantillonnés. Quant au problème de modélisation des perturbations, il a été brièvement traité à partir des résultats

disponibles pour souligner la vraisemblance entre les signaux et les systèmes : les perturbations peuvent être modélisées comme la sortie d'un système dont l'entrée est une impulsion d'amplitude inconnue (resp. une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies) selon que l'on considère un contexte déterministe (resp. stochastique), soit

$$v(kT_e) = \mathcal{H}(q^{-1}) \delta(kT_e) \quad (v(kT_e) = \mathcal{H}(q^{-1}) \gamma(kT_e))$$

Il est important de noter que le problème de modélisation des systèmes échantillonnés considéré a été fondamentalement étudié en supposant que la précision des convertisseurs est infinie et que le temps de conversion et de calcul sont nuls. La seconde hypothèse n'est pas cruciale puisqu'on peut intégrer les temps de conversion et de calcul dans le retard du système. Quant aux erreurs de quantification, ils sont mis sur le compte des bruits de mesure qui conditionnent les performances du système de traitement envisagé. Une recherche vigoureuse est développée, au sein des communautés d'automatique et de traitement du signal, sur la robustesse numérique ([5], [14], [22]).

Et comme il est supposé implicitement que la spécification de la période d'échantillonnage est faite sous la bénédiction du théorème de Shannon, on peut se permettre un abus de notation en désignant l'instant d'échantillonnage kT_e par t et donc $(k-i)T_e$ par $t-i$. Ceci nous amène à récrire l'équation aux différences sous la forme

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1)$$

ou

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t-d-1)$$

Cette forme est adoptée dans les principales contributions sur la théorie des systèmes dont les ouvrages utilisés dans les grandes écoles d'automatique.

4.10 Problèmes

Problème 4.1 *On se propose de faire une évaluation des connaissances issues de ce chapitre en traitant les questions suivantes.*

- 1) *Déterminera les dérivées partielles suivantes*

$$\frac{\partial}{\partial x(t-i)} \left((1 - 1.8q^{-1} + 0.81q^{-2}) x(t) \right) \quad \text{pour } i \in [0, 2]$$

- 2) *Donner les relations entre les modèles de représentation d'un système continu et ceux du système échantillonné sous-jacent et en déduire la fonction de transfert du système échantillonné dans le cas où le système continu exhibe un retard τ .*
- 3) *Donner les configurations des pôles et des zéros de la classe des systèmes décrits par la fonction de transfert*

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d-1} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

On traitera le cas des fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_1(z^{-1}) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} \text{ et } \mathcal{G}_2(z^{-1}) = \frac{0.5z^{-2} - z^{-4}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

- 4) Préciser la relation entre la réponse impulsionnelle (resp. la réponse harmonique) et la fonction de transfert d'un système.
- 5) Préciser la relation entre la fonction de transfert et l'équation aux différences d'un système.
- 6) Préciser la relation entre la réalisation d'état et la fonction de transfert d'un système.
- 7) Donner la configuration modale d'un système et indiquer sa relation avec la configuration de ses pôles. On traitera les exemples suivants

$$\left(F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0] \right)$$

et

$$\left(\bar{F} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{H} = [0 \ 1] \right)$$

- 8) Donner les équations aux différences décrivant des générateurs des perturbations du type échelon, i.e. $v(t) = v\alpha(t)$, et du type harmonique de pulsation connue ω , i.e. $v(t) = v\sin(\omega t)\alpha(t)$, où v désigne l'amplitude des perturbations qui est supposée inconnue.

Problème 4.2 Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on demande de retrouver les propriétés suivantes

- P1. $e^{0n} = I_n$
- P2. $Ae^A = e^A A$
- P3. $\lambda \in \mathcal{V}(A) \implies e^\lambda \in \mathcal{V}(e^A)$
- P4. $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$ pour tout $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$
- P5. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \iff AB = BA$
- P6. $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
- P7. $\rho e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
- P9. $\mathcal{L}(e^{At}\alpha(t)) = (sI_n - A)^{-1}$
- P10. $e^{(T\Lambda T^{-1})t}\alpha(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1}\alpha(t)$

Problème 4.3 Déterminer les réponses impulsionnelles et les équations aux différences des deux systèmes respectivement décrits par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_1(z) = z^{-1} - 1.6z^{-2} + 0.64z^{-3}, \quad \mathcal{G}_2(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z-0.5)} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_3(z) = \frac{z+2}{z^2(z-1)(z-0.5)}$$

Problème 4.4 Déterminer la fonction de transfert du système échantillonné correspondant au système continu décrit par la fonction de transfert

$$G_c(s) = e^{-\tau_d s} \frac{B_c(s)}{A_c(s)}$$

avec

$$\tau = (d+1)T_e - \eta T_e \quad \text{avec} \quad d \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta < 1$$

Problème 4.5 Montrer qu'un système décrit par une réalisation d'état (F, G, H, E) peut être représenté comme l'indique la figure 4.13 avec $\mathcal{G}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G + E$ et $\mathcal{H}(z) = H(zI_n - F)^{-1}F + H$ et en déduire une interprétation des conditions initiales.

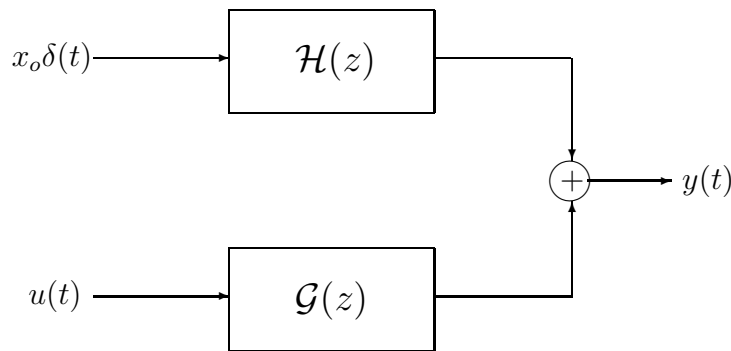


FIGURE 4.13 – Représentation du système

Problème 4.6 On se propose de déterminer le modèle échantillonné correspondant à la classe des systèmes dont le comportement entrée-sortie peut être raisonnablement décrit par un modèle de second ordre caractérisé par un amortissement ζ et une fréquence propre ω donné par la fonction de transfert

$$G_c(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad \text{pour} \quad \zeta < 1$$

Pour ce faire, on demande de procéder progressivement comme suit

1) Montrer que le système continu sous-jacent admet une réalisation d'état donnée par

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\zeta\omega \end{bmatrix}, \quad G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad H_c = [1 \quad 0] \quad \text{et} \quad E_c = 0$$

2) Donner une réalisation d'état du système échantillonné (F, G, H, E) et en déduire sa configuration modale.

3) Montrer que la fonction de transfert du système échantillonné est donnée par

$$\mathcal{G}(z) \triangleq \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

en précisant les expressions des paramètres. Et en déduire ses configurations des pôles et des zéros.

4) Préciser la nature du système lorsque $\zeta = 0$.

Problème 4.7 Considérons la classe des perturbations données par

$$v(t) = v_h \sin(\omega t + \phi) + v_e \alpha(t)$$

Préciser la nature des perturbations et montrer qu'elles peuvent être décrites par une réalisation d'état.

Problème 4.8 Montrer que la fonction de transfert d'un système peut être exprimée en fonction de sa matrice système $\mathcal{M}_s(z)$ comme suit

$$\mathcal{G}(z) = \frac{\det(\mathcal{M}_s(z))}{\det(zI_n - F)}$$

On précisera les atouts de la matrice système.

Chapitre 5

Stabilité

La stabilité d'un système a été d'abord intuitivement liée à sa capacité à produire des sorties bornées à partir d'entrées bornées. Cette intuition a permis de développer le concept de stabilité entrée bornée-sortie bornée (\mathcal{EBSB}) qui constitue l'essence du concept de stabilité externe. Le concept de stabilité interne a été ensuite introduit à partir de l'aptitude d'un système à produire des variables d'état bornées à partir d'entrées bornées pour pallier ainsi la limitation intrinsèque au concept de stabilité externe. Cette limitation peut être naturellement mise en exergue en étudiant la stabilité des systèmes interconnectés, en l'occurrence la stabilité externe d'un système interconnecté ne garantit pas que les sorties des sous-systèmes qui le composent sont nécessairement bornées. Le concept de stabilité interne a été principalement développé à partir des approches de \mathcal{L} yapunov : un mathématicien de la prestigieuse école russe des artisans des sciences pour l'ingénieur.

La motivation de ce chapitre est de faire une présentation compréhensible des bases de la stabilité des systèmes échantillonnés issus des systèmes linéaires invariants dans le temps. On présente d'abord le concept de stabilité externe à partir d'un résultat fondamental sur la stabilité \mathcal{EBSB} . Le concept de stabilité interne est ensuite introduit à partir d'une analyse de stabilité d'une cascade de deux systèmes ayant un pôle et un zéro communs en utilisant la fonction de transfert et une réalisation d'état appropriée de la cascade. Les résultats fondamentaux issus du concept de stabilité interne sont présentés à partir d'une approche de \mathcal{L} yapunov qui a permis de développer des outils efficaces d'analyse de stabilité pour l'ingénierie des systèmes. L'étude de la stabilité interne des systèmes linéaires invariants dans le temps est particulièrement illustrée au travers du résultat fondamental sur la décomposition spectrale d'une matrice. Une attention particulière est accordée aux résultats usuels sur la caractérisation de la réponse d'un système stable à des classes d'entrées spécifiques et au test de stabilité à partir d'un critère algébriques.

Trois représentations de la classe des systèmes échantillonnés considérée seront utilisées pour ce faire, en l'occurrence la réponse impulsionnelle, la fonction de transfert et la réalisation d'état respectivement données par

$$\{g(t)\}_{t \geq 0}, \quad \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \quad \text{et} \quad (F, G, H, E)$$

et reliées par

$$\mathcal{G}(z) = H(zI - F)^{-1}G + E = \mathcal{Z}\{g(t)\}$$

Les résultats de stabilité externe et interne sont respectivement donnés en fonction des configurations des pôles et des modes du systèmes qui sont éventuellement différentes puisque

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(z)) \subset \mathcal{CM}((F, G, H, E)) = \mathcal{V}\{F\}$$

L'étude de la stabilité interne des systèmes linéaires invariants dans le temps est particulièrement illustrée au travers du résultat fondamental sur la décomposition spectrale d'une matrice que nous rappelons ci après.

Résultat 5.1 *Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, il existe une matrice régulière $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une matrice bloc diagonale $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que*

$$T^{-1}AT = J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_r\}$$

avec

$$J_i = \lambda_i I_{\nu_i} + N_i \text{ pour } i \in [1, r]$$

où $J_i \in \mathbb{C}^{\nu_i \times \nu_i}$ désigne l'un des n_i blocs de Jordan associé à la valeur propre λ_i d'ordre de multiplicité m_i , on a alors

$$\sum_{i=1}^r m_i = n \text{ avec } m_i = \sum_{j=1}^{n_i} \nu_j$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \text{ et } N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 5.1 *Si les valeurs propres de la matrice A sont distinctes, alors la matrice J n'est autre que la matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$ et les matrices T et T^{-1} sont particulièrement données par*

$$T = [V_1 \ \dots \ V_i \ \dots \ V_n] \text{ et } T^{-1} = [W_1 \ \dots \ W_i \ \dots \ W_n]^T$$

où V_i et W_i sont respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche associés à la valeur propre λ_i .

Rappelons qu'une valeur propre multiple admet autant de blocs de Jordan que de vecteurs propres indépendants et qu'elle est dite non défective (resp. défective) si les blocs de Jordan qui lui sont associés se réduisent à des scalaires, soit $J_i = \lambda_i$ (resp. si elle admet un bloc de Jordan de dimension supérieure ou égale à deux).

5.1 Stabilité externe.

Dans ce paragraphe, on introduit d'abord le concept de stabilité externe à partir du concept de stabilité \mathcal{EBSB} en exploitant judicieusement le comportement de sa réponse impulsionnelle. Ensuite, on présente un résultat fondamental de stabilité externe à partir de la configuration des pôles du système. La stabilité interne est enfin motivée par une limitation fondamentale de la stabilité externe qui est mise en exergue à partir d'un exemple académique approprié.

5.1.1 Stabilité \mathcal{EBSB} .

La stabilité d'un système est étroitement liée à son aptitude à produire des sorties bornées à partir d'entrées bornées comme l'indique la définition suivante

Définition 5.1 *Un système est stable au sens \mathcal{EBSB} si pour toute entrée bornée, la sortie reste bornée.*

Le résultat fondamental suivant permet de caractériser la stabilité \mathcal{EBSB} des systèmes échantillonnés issus des systèmes linéaires et invariants dans le temps.

Résultat 5.2 *Un système linéaire invariant est stable au sens \mathcal{EBSB} si et seulement si sa réponse impulsionnelle vérifie la propriété suivante*

$$\exists K_g \in [0, \infty) / \sum_{k=0}^{\infty} |g(kT_e)| \leq K_g \quad (5.1)$$

Preuve. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour ce faire, considérons le produit de convolution

$$y(kT_e) = \sum_{j=0}^k g(jT_e)u(kT_e - jT_e) = \sum_{j=0}^{\infty} g(jT_e)u(kT_e - jT_e)$$

En vertu de l'inégalité de Schwartz, on a

$$|y(kT_e)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |g(jT_e)| |u(kT_e - jT_e)|$$

Et si l'entrée est bornée, soit $\exists K_u \in [0, \infty) / |u(kT_e)| \leq K_u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors on a

$$|y(kT_e)| \leq K_u \sum_{j=0}^{\infty} |g(jT_e)| \quad \text{pour } 0 \leq K_u < \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

la condition est bien suffisante puisque si la propriété 5.1 est vraie alors la réponse du système à une entrée bornée est bornée puisque

$$|y(kT_e)| \leq K_y = K_u K_g$$

Montrons maintenant que la condition est nécessaire en utilisant la contraposée de la propriété

de stabilité au sens \mathcal{EBSB} , en l'occurrence

$$\forall K^* \in \mathbb{R}^+, \exists n^* \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{n^*} |g(kT_e)| > K^* \quad (5.2)$$

Pour ce faire, on procédera d'une manière constructive en considérant la séquence d'entrée définie par

$$u(kT_e) = \begin{cases} u^*(kT_e) & \text{pour } k \in [0, n^*] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.3)$$

avec

$$u^*(kT_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } g((n^* - k)T_e) > 0 \\ 0 & \text{si } g((n^* - k)T_e) = 0 \\ -1 & \text{si } g((n^* - k)T_e) < 0 \end{cases} \quad \text{pour } k \in [0, n^*] \quad (5.4)$$

La sortie du système qui en résulte à l'instant n^*T_e est donnée par

$$y(n^*T_e) = \sum_{j=0}^{n^*} g(jT_e)u((n^* - j)T_e) = \sum_{j=0}^{n^*} |g(jT_e)|$$

Il est clair que la séquence d'entrée bornée (5.3)-(5.4) ne conduit pas à une sortie bornée lorsque la réponse impulsionnelle vérifie la propriété (5.2). Cette propriété n'est autre que la négation de la propriété considérée sur la réponse impulsionnelle puisque

$$\sum_{k=0}^{n^*} |g(kT_e)| \geq \sum_{k=0}^{n^*} |g(kT_e)|$$

CQFD.

5.1.2 Stabilité externe.

La stabilité externe d'un système linéaire invariant dans le temps peut être alors fondamentalement définie à partir de sa réponse impulsionnelle en vertu du fait que la propriété 5.1 est satisfaite si et seulement si la réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle.

Définition 5.2 *Considérons un système échantillonné linéaire et invariant dans le temps décrit par sa réponse impulsionnelle. On dira que*

D1. le système est stable si sa réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

D2. le système est marginalement stable s'il n'est pas stable et que sa réponse impulsionnelle est bornée, i.e.

$\{g(kT_e)\}$ est bornée et si elle converge, alors sa limite n'est pas nulle

D3. le système est instable si sa réponse impulsionnelle n'est pas bornée, i.e.

$$\{g(kT_e)\} \text{ n'est pas bornée}$$

Le domaine de stabilité des systèmes échantillonnés issus des systèmes linéaires et invariants dans le temps est manifestement l'image du domaine de stabilité des systèmes continus sous-jacents par l'opération d'échantillonnage puisque le concept de stabilité est un invariant par échantillonnage. Et comme l'opération d'échantillonnage est caractérisée par la fonction complexe $s \mapsto z = e^{sT_e}$, on retrouve naturellement le disque ouvert de centre l'origine et de rayon unitaire du plan complexe en z , soit $\mathcal{D}_{sa} \triangleq \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. La stabilité d'un système échantillonné linéaire et invariant dans le temps est complètement caractérisée par la configuration de ses pôles du système comme l'indique le résultat fondamental suivant.

Résultat 5.3 *Considérons un système échantillonné linéaire et invariant dans le temps décrit par sa fonction de transfert $\mathcal{G}(z)$, alors les propositions suivantes sont vraies.*

P1. *Le système est stable si et seulement si tous ses pôles sont situés à l'intérieur du domaine de stabilité, i.e. $A_\sigma(z) = 0 \implies |z| < 1$.*

P2. *Le système est marginalement stable si et seulement si tous ses pôles sont situés dans le domaine de stabilité, i.e. $A_\sigma(z) = 0 \implies |z| \leq 1$, qu'il admet au moins un pôle sur la frontière du domaine de stabilité et que tous ses pôles situés sur la frontière du domaine de stabilité sont simples.*

P3. *Le système est instable si et seulement si il admet au moins un pôle à l'extérieur du domaine de stabilité ou un pôle multiple sur la frontière du domaine de stabilité.*

Preuve. Notons d'abord décrits par leurs fonctions de transfert, i.e. une fraction rationnelle propre que l'on peut toujours décomposer en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij} \frac{z}{(z - p_i)^j} = \sum_{j=1}^{m_o} \gamma_{oj} \frac{1}{z^j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij} \frac{z}{(z - p_i)^j}$$

où m_o et $\{m_i\}_{i \in [1, r]}$ désignent respectivement les ordres de multiplicité du pôle nul, $z = 0$, et des pôles non nuls, $z = p_i$ pour $i \in [1, r]$, et $\{\gamma_{ij}\}_{(i, j) \in [0, r] \times [1, m_i]}$ sont des nombres complexes. La réponse impulsionnelle du système est donc donnée par

$$g(kT_e) = \sum_{j=1}^{m_o} \gamma_{oj} \delta((k - j)T_e) + \sum_{i=1}^r \left(\gamma_{i1} p_i^k + \sum_{j=2}^{m_i} \frac{\gamma_{ij}}{(j-1)!} \prod_{\ell=0}^{j-2} (k - \ell) p_i^{k-j+1} \right) \alpha(kT_e)$$

avec

$$\gamma_{i(m_i - j)} = \lim_{z \rightarrow p_i} \left[\frac{1}{j!} \left(\frac{d}{dz} \right)^j \left(\frac{(z - p_i)^{m_i}}{z} \mathcal{G}(z) \right) \right] \text{ pour } j \in [0, m_i - 1]$$

En remémorant les critères d'Alembert et de comparaison des séries, il est clair que la réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle si et seulement si tous les pôles sont situés à l'intérieur du domaine de stabilité. Par ailleurs, il est évident que la réponse impulsionnelle est bornée si et seulement si tous les pôles sont situés dans le domaine de stabilité et que tout pôle situé sur la frontière du domaine de stabilité est simple.

CQFD.

Remarque 5.2 *Compte tenu de la vraisemblance des concepts de stabilité externe et de stabilité \mathcal{EBSB} , on utilisera le vocable \mathcal{EBSB} stable pour se référer aussi bien à la stabilité \mathcal{EBSB} qu'à la stabilité externe. Cette précision de la nature de stabilité permettra de différencier le concept de stabilité externe du concept de stabilité interne qui est beaucoup plus général pour s'y référer sans aucun qualificatif.*

5.1.3 Limitation fondamentale.

Les systèmes sont généralement conçus à partir d'un ensemble d'interconnexions appropriées de systèmes qui ont éventuellement des pôles et des zéros communs. Ces pôles et zéros communs ne sont pas nécessairement reliés à l'entrée et/ou la sortie du système et ne sont donc pas perceptibles à partir du comportement d'entrée-sortie du système, e.g. ils n'apparaissent pas dans la fonction de transfert du système. Le concept de stabilité externe d'un système occulte les éventuelles simplifications entre les pôles et les zéros des systèmes qui le composent. Et si les pôles simplifiés ne sont pas situés dans le domaine de stabilité, alors les variables internes sous-jacentes ne sont pas bornées. A titre illustratif, considérons le système issu d'une cascade de deux systèmes, comme le montre la figure 5.1, respectivement décrits par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_1(z) = \frac{0.1}{z - \mu} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(z) = \frac{z - \mu}{(z - 0.5)(z - 0.8)}$$

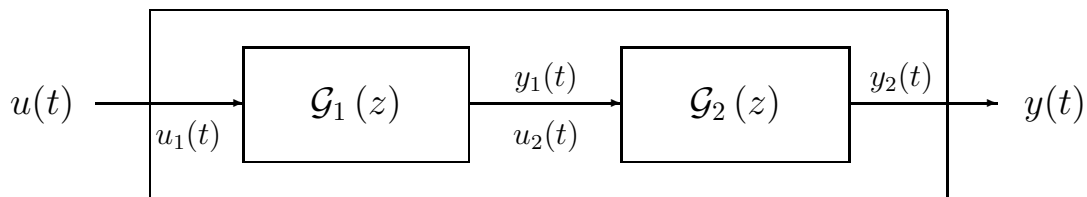


FIGURE 5.1 – Interconnexion en cascade

La fonction de transfert du système est alors donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_2(z) \mathcal{G}_1(z) = \frac{0.1}{(z - 0.5)(z - 0.8)}$$

Le pôle $p = \mu$ du système 1 a été simplifié par le zéro $z = \mu$ du système 2 et n'apparaît pas dans la configuration des pôles de la cascade, soit $\mathcal{CP}(\mathcal{G}(z)) = \{0.5, 0.8\}$. On peut alors conclure que la cascade est stable au sens \mathcal{EBSB} indépendamment du scalaire μ . Néanmoins, comme le système 1 n'est pas stable pour $\mu > 1$, sa sortie n'est pas bornée pour toute entrée bornée de la cascade. Cette instabilité interne peut être naturellement perçue à partir d'une représentation

d'état de la cascade que l'on peut définir à partir des variables d'état des sous-systèmes qui la composent, soit

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$x_1(t+1) = \mu x_1(t) + 0.1u(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_{21}(t+1) \\ x_{22}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 & 1 \\ -0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} x_1(t)$$

et

$$y(t) = x_1(t)$$

La cascade peut être alors décrite par la réalisation d'état

$$F = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 1 & 1.3 & 1 \\ -\mu & -0.4 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H = (0 \ 1 \ 0) \text{ et } E = 0$$

qui permet de déterminer aisément ses trajectoires d'état et de sortie issues d'une entrée impulsionnelle d'amplitude unitaire, soit

$$\mathcal{T}ESC \begin{cases} x(kT_e) = F^k x_o \\ y(kT_e) = HF^k x_o \end{cases}$$

Et comme la matrice d'état F peut être décomposée comme suit

$$F = T\Lambda T^{-1}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -0.8 & -0.5 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

on peut en déduire aisément que les trajectoires d'état et de sortie du système issues d'une entrée impulsionnelle d'amplitude unitaire vérifient la propriété suivante

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t) = \begin{pmatrix} \mu^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_e) = 0$$

Il apparaît alors clairement que la sortie du système, qui constitue sa seconde variable d'état, est asymptotiquement nulle indépendamment du scalaire μ . Ce fait corrobore la propriété de stabilité externe. Quant au comportement de la première variable d'état du système, il dépend du scalaire μ comme suit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } \mu > 1 \\ 1 & \text{si } \mu = 1 \\ 0 & \text{si } \mu < 1 \end{cases}$$

Ceci nous amène au concept de stabilité interne qui concerne l'aptitude d'un système à produire des variables d'état bornées à partir d'entrées bornées.

5.2 Stabilité interne.

L'étude de la stabilité interne est effectuée en adoptant une approche de Lyapunov qui s'est imposée par sa généralité et l'efficacité. La généralité est essentiellement due au fait que cette approche peut être utilisée aussi bien pour les systèmes linéaires invariants dans le temps que pour les systèmes linéaires variants dans le temps, notamment les algorithmes d'estimation et d'adaptation paramétrique qui constituent la pierre angulaire des observateurs et des méthodes d'identification en temps réel. Quant à l'efficacité, elle est motivée par les outils puissants qui ont été développés à partir de cette approche pour le test de stabilité des systèmes.

5.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov.

Le concept de stabilité des systèmes échantillonnés est généralement développé à partir du système autonome

$$\mathcal{SA} \left\{ x((k+1)T_e) = f(x(kT_e)) \text{ avec } f(x_e) = x_e \right. \quad (5.5)$$

où $x(kT_e) \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système à l'instant d'échantillonnage kT_e , x_e est un état d'équilibre du système et f est une fonction continue par morceaux qui permet de définir une classe de systèmes relativement large, notamment les systèmes linéaires variants dans le temps. On présente ci-après le concept de stabilité au sens de Lyapunov qui est généralement définie par rapport aux états d'équilibre comme suit

Définition 5.3 *L'état d'équilibre x_e du système autonome (5.5) est dit*

D1. stable au sens de Lyapunov si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x(kT_e) - x_e\| < \varepsilon \text{ pour tout } k \geq 0$$

D2. asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov et s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(kT_e) - x_e\| = 0$$

D3. exponentiellement stable s'il est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov et s'il existe deux scalaires $0 \leq \gamma < \infty$ et $0 \leq \lambda < 1$ tels que

$$\|x(kT_e) - x_e\| \leq \gamma \lambda^k \|x_o\|$$

D4. instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov

Ces définitions montrent clairement que le concept de stabilité au sens de Lyapunov est fondamentalement local dans la mesure où il ne concerne que des conditions initiales qui se trouvent dans un voisinage de l'état d'équilibre. En effet, la stabilité au sens de Lyapunov garantit que la trajectoire d'état du système reste dans un voisinage de l'état d'équilibre pourvu que les conditions initiales soient suffisamment proches de cet état d'équilibre. La stabilité est dite globale

lorsqu'elle est indépendante des conditions initiales. On notera que la stabilité asymptotique permet d'étendre le concept de stabilité au sens de Lyapunov dans la mesure où elle garantit que la trajectoire d'état du système s'approche de plus en plus de l'état d'équilibre pourvu que les conditions initiales soient prises dans un voisinage de cet état d'équilibre. Par ailleurs, il faut remarquer que la stabilité au sens de Lyapunov est définie pour des états d'équilibre du système, et non pour le système. C'est l'essence du concept de stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée.

5.2.2 Illustration usuelle.

Pour illustrer les concepts de stabilité au sens Lyapunov, considérons le cas des systèmes linéaires invariants qui nous préoccupent essentiellement et dont les systèmes autonomes correspondants sont décrits par

$$\mathcal{SA} \left\{ x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \right. \quad (5.6)$$

où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ désigne la matrice d'état du système. La stabilité est une propriété intrinsèque du système et non d'un état d'équilibre donné du système comme l'indique le résultat suivant

Résultat 5.4 *Considérons le système linéaire autonome (5.6), alors les propriétés suivantes sont vraies*

P1. $x_e = 0$ est un état d'équilibre du système

P2. L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable au sens de Lyapunov si et seulement si la séquence $\{\|F^k\|\}_{k \geq 0}$ est bornée.

P3. L'état d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si la séquence $\{\|F^k\|\}_{k \geq 0}$ converge vers zéro, soit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|F^k x_o\| = 0$ pour tout x_o .

P4. Si $x_e = 0$ est un état d'équilibre asymptotiquement stable, alors il est unique.

La preuve de résultat est triviale. Il suffit de remarquer que la trajectoire d'état à partir de l'instant initial nul est donnée par

$$x(kT_e) = F^k x_o \text{ pour tout } k > 0$$

soit

$$\|x(kT_e)\| = \|F^k x_o\| \leq \|F^k\| \|x_o\| \text{ pour tout } k > 0$$

Comme les conditions initiales sont bornées et ne sont pas nécessairement nuls, il apparaît clairement que

$$\{\|x(kT_e)\|\}_{k \geq 0} \text{ est bornée si et seulement si } \{\|F^k\|\}_{k \geq 0} \text{ est bornée}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(kT_e)\| = 0 \text{ si et seulement si } \{\|F^k\|\}_{k \geq 0} \text{ est asymptotiquement nulle}$$

Et on notera que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(kT_e)\| = \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \{\|F^k\|\}_{k \geq 0} \text{ diverge}$$

CQFD.

On notera que la stabilité des systèmes linéaires invariants peut être étudiée à partir d'une analyse spectrale de la matrice d'état comme l'indique le résultat fondamental suivant

Résultat 5.5 *Considérons le système autonome (5.6), on a alors les propositions suivantes.*

- P1. $x_e = 0$ est un état d'équilibre stable au sens de Lyapunov si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état sont situées à l'intérieur ou sur le cercle unité et que toute valeur propre de module égal à un ne soit pas défective, i.e. le bloc de Jordan qui lui est associé est diagonal.*
- P2. L'état d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état F sont situées à l'intérieur du cercle unité.*
- P3. $x_e = 0$ est un état d'équilibre instable au sens de Lyapunov si et seulement si la matrice d'état a au moins une valeur propre à l'extérieur du cercle unité ou une valeur propre multiple défective sur le cercle unité, i.e. le bloc de Jordan qui lui est associé n'est pas diagonal.*

La preuve de ce théorème peut être faite en étudiant la séquence des matrices de transition $\{F^k\}_{k \geq 0}$ et par conséquent les solutions des systèmes autonomes linéaires et invariants dans le temps (5.6). Une telle étude peut être effectuée à partir de la décomposition de Jordan de la matrice d'état. En effet, il existe toujours une matrice régulière $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une matrice bloc diagonale $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que

$$T^{-1}FT = J = \text{Diag}\{J_1, \dots, J_r\}$$

avec

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I_{\nu_i} + N_i \quad \text{avec} \quad N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

où $J_i \in \mathbb{C}^{\nu_i \times \nu_i}$ désigne l'un des n_i blocs de Jordan associés à la valeur propre λ_i d'ordre de multiplicité $m_i = \sum_{j=1}^{n_i} \nu_j$. Rappelons qu'une valeur propre multiple admet autant de blocs de Jordan que de vecteurs propres indépendants et qu'elle est non défective si les blocs de Jordan qui lui sont associés se réduisent à des scalaires, soit $J_i = \lambda_i$.

Cette décomposition permet de déterminer aisément la matrice de transition du système autonome (5.6) puisque

$$F^k = T J^k T^{-1} = T \text{Diag} \{ J_i^k \} T^{-1} = T \text{Diag} \{ (\lambda_i I_{m_i} + N_i)^k \} T^{-1}$$

Comme N_i est une matrice nilpotente d'ordre ν_i , soit $N_i^j = 0$ pour tout $j \geq \nu_i$, la formule du binôme donne

$$J_i^k = \sum_{j=0}^{\nu_i-1} N_i^j \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda_i^{k-j} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

La solution de l'équation d'état peut alors se mettre sous la forme usuelle pour l'analyse des systèmes linéaires invariants, soit

$$x(kT_e) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda_i^{k+1-j} \Gamma_{ij} x(0) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

où les Γ_{ij} sont des matrices complexes qui dépendent de la matrice de transformation T et des matrices nilpotentes N_i . Les propositions du théorème peuvent alors être déduites en comparant dans chaque cas une croissance exponentielle et une croissance polynomiale et en tenant compte des résultats du théorème précédent.

CQFD.

Remarque 5.3 Si la matrice F est diagonalisable, i.e. les valeurs propres multiples ne sont pas défectives, alors il existe une matrice régulière $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que

$$F^k = T \text{Diag} \{ \lambda_i^k \} T^{-1}$$

avec

$$T = [V_{d1} \quad \dots \quad V_{di} \quad \dots \quad V_{dn}] \text{ et } T^{-1} = [V_{g1} \quad \dots \quad V_{gi} \quad \dots \quad V_{gn}]^T$$

où $\mathcal{V}(F) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \}$ désigne le spectre de la matrice d'état F , V_{gi} et V_{di} sont respectivement les vecteurs propres à gauche et à droite associés à la valeur propre λ_i .

La réponse libre du système autonome (5.6) est donc donnée par

$$x(kT_e) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \Gamma_i x(0)$$

où les Γ_i sont des matrices complexes qui dépendent de la matrice de transformation T . Il apparaît clairement que les valeurs propres non défectives de la matrice d'état qui sont sur le cercle unité ne conduisent pas à l'instabilité du système.

5.2.3 Critère de Lyapunov.

L'analyse de la stabilité des systèmes autonomes (5.6) est généralement effectuée avec la seconde méthode de Lyapunov qui représente l'un des outils les plus puissants des sciences de l'ingénieur ([9], [13]). Le principe de cette méthode consiste à introduire une fonction que l'on peut assimiler à l'énergie totale du système et à montrer qu'elle est décroissante le long des trajectoires d'état du système. Une telle fonction est définie comme suit

Définition 5.4 $V : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow V(x) \in \mathbb{R}$ est dite fonction de Lyapunov du système autonome \mathcal{SA} dans un voisinage $\mathcal{V}(x_e)$ de son état d'équilibre si elle vérifie les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1$. V est continue sur $\mathcal{V}(x_e)$

$\mathcal{P}2$. V est définie positive dans $\mathcal{V}(x_e)$, soit

$$V(x_e) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{V}(x_e) - \{x_e\}$$

$\mathcal{P}3$. La fonction $\Delta V : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \Delta V(x) = (V(f(x)) - V(x)) \in \mathbb{R}$ est définie négative dans $\mathcal{V}(x_e)$, soit

$$\Delta V(x_e) = 0 \text{ et } \Delta V(x) < 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{V}(x_e) - \{x_e\}$$

Le résultat suivant, qui précise ce point de vue, constitue le critère de Lyapunov qui est communément utilisé aussi bien pour l'analyse de la stabilité que pour la synthèse des systèmes.

Résultat 5.6 Considérons le système autonome (5.6) et supposons qu'il admet une fonction de Lyapunov V dans un voisinage $\mathcal{V}(x_e)$ de son état d'équilibre, alors on a les propositions suivantes

$\mathcal{P}1$. L'état d'équilibre est asymptotiquement stable dans $\mathcal{V}(x_e)$.

$\mathcal{P}2$. Si la fonction de Lyapunov V est de plus radiale, i.e. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable dans \mathbb{R}^n .

$\mathcal{P}3$. Si la fonction ΔV est définie non négative, i.e. $\Delta V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{V}(x_e)$, alors l'état d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov.

Il faut remarquer que le critère de Lyapunov ne fournit que des conditions suffisantes de stabilité. On peut toutefois étudier l'instabilité des états d'équilibre à la lumière du résultat suivant

Résultat 5.7 Considérons le système autonome \mathcal{SA} et supposons qu'il admet une fonction V satisfaisant les propriétés suivantes dans son voisinage de l'état d'équilibre $\mathcal{V}(x_e)$.

$\mathcal{P}1$. V est continue.

$\mathcal{P}2$. V est définie positive.

$\mathcal{P}3$. ΔV est définie positive.

alors l'état d'équilibre est instable dans son voisinage $\mathcal{V}(x_e)$

Dans le cas des systèmes linéaires invariants, la seconde méthode de Lyapunov fournit des conditions nécessaires et suffisantes comme le montre le résultat suivant

Résultat 5.8 Considérons le système linéaire invariant (5.6), alors les propositions suivantes sont équivalentes

$\mathcal{P}1$. $x_e = 0$ est un état d'équilibre asymptotiquement stable du système autonome 5.6.

$\mathcal{P}2$. Pour toute matrice symétrique et définie positive Q , il existe une matrice unique symétrique et définie positive P qui vérifie l'équation de Lyapunov $F^T P F - P = -Q$

$\mathcal{P}3$. Il existe une fonction de Lyapunov quadratique V définie par $V(x) = x^T P x$ avec $P = P^T > 0$ qui prouve la stabilité asymptotique.

Preuve. Notons que l'implication $\mathcal{P}2 \implies \mathcal{P}3$ est triviale, il suffit donc de montrer que

$$\mathcal{P}3 \implies \mathcal{P}1 \text{ et } \mathcal{P}1 \implies \mathcal{P}2$$

Montrons d'abord que $\mathcal{P}3 \implies \mathcal{P}1$ par application de la seconde méthode de Lyapunov. La proposition $\mathcal{P}3$ permet de définir une fonction de Lyapunov pour le système autonome 5.6, en l'occurrence la fonction $V : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow V(x) = x^T P x \in \mathbb{R}^+$. En effet, elle vérifie les propriétés $\mathcal{P}1$ et $\mathcal{P}2$ sur \mathbb{R}^n et est radiale car $x^T P x$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini. Quant à la propriété $\mathcal{P}3$, elle est satisfaite puisque la fonction ΔV est bien définie négative sur \mathbb{R}^n . En effet, on a

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= x^T(kT_e) F^T P F x(kT_e) - x^T(kT_e) P x(kT_e) \\ &= x^T(kT_e) (F^T P F - P) x(kT_e) \\ &= -x^T(kT_e) Q x(kT_e) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $x_e = 0$ est un état d'équilibre asymptotiquement stable du système autonome 5.6.

Montrons maintenant que $\mathcal{P}1 \implies \mathcal{P}2$. Pour ce faire, introduisons la série définie par la matrice

$$P(k) = \sum_{i=0}^k (F^T)^i Q F^i \text{ avec } Q = Q^T > 0$$

qui est symétrique et définie positive comme la matrice Q . Cette série converge si la proposition $\mathcal{P}1$ est vraie puisque $\{\|F^k\|\}_{k \geq 0}$ serait asymptotiquement nulle conformément à la propriété $\mathcal{P}3$ du résultat 5.4. On aura donc

$$0 < P(k) \leq P = \sum_{i=0}^{+\infty} (F^T)^i Q F^i \text{ pour tout } k \geq 0$$

Par ailleurs, on peut exprimer la matrice Q à partir de la définition de la matrice $P(k)$ comme suit

$$-Q = \sum_{i=1}^k (F^T)^i Q F^i - \sum_{i=0}^k (F^T)^i Q F^i = \sum_{i=0}^{k-1} (F^T)^i F^T Q F F^i - \sum_{i=0}^k (F^T)^i Q F^i$$

ou sous la forme de l'équation aux différences de Lyapunov

$$F^T P(k-1) F - P(k) = -Q$$

La limite P de $\{P(k)\}_{k \geq 0}$ vérifie donc l'équation algébrique de Lyapunov, soit

$$-Q = F^T P F - P$$

Il reste à montrer l'unicité de la matrice P . Pour ce faire, supposons que l'équation de Lyapunov a une autre solution \bar{P} , alors elle vérifie l'équation de Lyapunov

$$F^T \bar{P} F - \bar{P} = -Q$$

et peut se mettre comme suit

$$\bar{P} = \sum_{i=0}^{+\infty} (F^T)^i \bar{P} F^i - \sum_{i=1}^{+\infty} (F^T)^i \bar{P} F^i = \sum_{i=0}^{+\infty} (F^T)^i \bar{P} F^i - \sum_{i=0}^{+\infty} (F^T)^i F^T \bar{P} F F^i$$

soit

$$\bar{P} = \sum_{i=0}^{+\infty} (F^T)^i (\bar{P} - F^T \bar{P} F) F^i = \sum_{i=0}^{+\infty} (F^T)^i Q F^i = P$$

CQFD.

Les deux remarques suivantes permettent d'apprécier la valeur ajoutée de l'approche de Lyapunov par rapport au concept de stabilité externe.

Remarque 5.4 *Le concept de stabilité au sens de Lyapunov est beaucoup plus général que celui de la stabilité \mathcal{EBSB} qui ne concerne que le comportement entrée-sortie du système. On montre aisément qu'un système asymptotiquement stable est stable au sens \mathcal{EBSB} mais la réciproque n'est pas vraie dans le cas d'une réalisation non minimale comme on le verra dans le chapitre suivant.*

Remarque 5.5 *L'approche de Lyapunov sera utilisée pour l'analyse de stabilité des systèmes linéaires variants dans le temps que l'on peut rencontrer dans les problèmes d'estimation d'état ou d'adaptation paramétrique en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques, soit*

$$V(x) = x^T P(t)x \text{ avec } P(t) = P(t)^T > 0$$

Pour mieux apprécier une telle remarque, on suggère de faire le problème 5.5.

5.3 Test de stabilité

Le test de stabilité d'un système linéaire invariant dans le temps peut être effectué par des solveurs de racines d'un polynôme ou des valeurs propres d'une matrice. Or les solveurs des racines d'un polynôme disponibles sont conçues à partir de procédures heuristiques dont la précision n'est pas prouvée indépendamment de l'habileté de leur architectes. Il en est de même pour les solveurs des valeurs propres d'une matrice qui n'est pas symétrique. On présente dans ce qui suit deux critères algébriques pour tester la stabilité des systèmes échantillonnés issus des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Le premier critère est issu de l'approche de Lyapunov en vertu de la proposition $\mathcal{P}2$ du résultat 5.8) que nous rappelons ci dessous.

Un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état (F, G, H, E) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice symétrique et définie positive Q , il existe une matrice unique symétrique et définie positive P qui vérifie l'équation de Lyapunov.

$$F^T P F - P = -Q$$

Pour tester la stabilité d'un système linéaire invariant dans le temps, il suffit de montrer que l'équation de Lyapunov $F^T P F - P + I_n = 0$ admet une solution symétrique et définie positive, soit $P = P^T > 0$. Pour ce faire, on dispose d'une procédure efficace qui consiste à résoudre l'équation de Lyapunov et à tester la positivité de la solution en calculant ses valeurs propres. Ce test est réalisable avec les solveurs robustes de valeurs propres des matrices symétriques.

Pour tester la stabilité d'un système linéaire invariant dans le temps, il suffit de montrer que l'équation de Lyapunov $F^T P F - P + I_n = 0$ admet une solution symétrique et définie positive, soit $P = P^T > 0$. Pour ce faire, on dispose d'une procédure efficace qui consiste à résoudre l'équation de Lyapunov et à tester la positivité de la solution en calculant ses valeurs propres. Ce test est réalisable avec les solveurs robustes de valeurs propres des matrices symétriques.

Remarque 5.6 Supposons que le critère de stabilité de Lyapunov ne soit pas vérifié d'une manière stricte, i.e. $\exists P = P^T > 0 / F^T P F - P \leq 0$, alors les valeurs propres de F sont situées dans le domaine de stabilité et celles qui sont situées sur la frontière du domaine de stabilité sont non défectives. Physiquement, cela se traduit par l'existence de solutions libres bornées : c'est le cas d'un intégrateur ou d'un oscillateur.

Le second critère relève des méthodes algébriques qui ont été spécifiquement élaborées pour vérifier directement si les zéros d'un polynôme à coefficients réels, e.g.

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z + a_n$$

sont situés dans le disque ouvert de centre l'origine et de rayon unité. On distingue plus particulièrement le critère de Jury qui consiste à réaliser les deux étapes suivantes.

- É1. Construire le tableau 5.1 de $2n + 1$ lignes comme suit : les deux premières lignes sont respectivement constituées des coefficients du polynôme $A(z)$ selon les puissances décroissantes et croissantes, soit

$$a_j^n = a_j \text{ pour } j \in [0, n]$$

Les autres lignes sont obtenues deux par deux par récurrence comme suit

$$a_j^{i-1} = a_j^i - \alpha_i a_{i-1}^i \text{ et } \alpha_i = \frac{a_i^i}{a_0^i} \text{ pour } (i, j) \in [n, 1] \times [0, i-1]$$

La dernière ligne est ainsi constituée d'un seul élément.

- É2. Conclure sur la position des racines du polynôme $A(z)$ à partir du résultat suivant

a_o^n	a_1^n	\dots	\dots	a_{n-1}^n	a_n^n	
a_n^n	a_{n-1}^n	\dots	\dots	a_1^n	a_o^n	$\rightarrow \alpha_n = \frac{a_n^n}{a_o^n}$
a_o^{n-1}	a_1^{n-1}	\dots	a_{n-2}^{n-1}	a_{n-1}^{n-1}		
a_{n-1}^{n-1}	a_{n-2}^{n-1}	\dots	a_1^{n-1}	a_o^{n-1}		$\rightarrow \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_o^{n-1}}$
\vdots	\vdots	\vdots				
a_1^1	a_o^1					
a_1^1	a_o^1					$\rightarrow \alpha_1 = \frac{a_1^1}{a_o^1}$
a_o^o						

TABLE 5.1 – Tableau de \mathcal{J} ury du polynôme $A(z) = \sum_{i=0}^{na} a_i z^{n-i}$

Résultat 5.9 *Le polynôme $A(z)$ a toutes ses racines de module strictement inférieur à un si et seulement si tous les coefficients a_o^i pour $i \in [0, n-1]$ sont non nuls et de même signe que le coefficient a_o . Par ailleurs, si tous les coefficients a_o^i pour $i \in [0, n]$ sont non nuls, le nombre de coefficients a_o^i pour $i \in [0, n-1]$ qui ne sont pas de même signe que le coefficient a_o correspond au nombre de racines de $A(z)$ à l'extérieur du disque unité.*

On notera que si tous les a_o^i pour $i \in [1, n-1]$ sont du même signe que a_o , alors a_o^o est du même signe que a_o . Le résultat suivant donne une condition nécessaire pour qu'un polynôme ait toutes ses racines de module strictement inférieur à un. Cette condition permet de vérifier rapidement si un test de stabilité est erroné.

Résultat 5.10 *Un polynôme $A(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur du disque unité si $A(1)$ et $(-1)^n A(-1)$ sont du même signe que le coefficient a_o .*

A titre illustratif, considérons le polynôme suivant $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines du polynôme $A(z)$ soient situées dans le disque de centre l'origine et de rayon unitaire sont obtenues à partir du tableau de \mathcal{J} ury 5.2. On aura

$$1 - a_2^2 > 0 \text{ et } 1 - a_2^2 - \frac{a_1^2(1 - a_2)}{1 + a_2} = \frac{1 - a_2}{1 + a_2} \left((1 + a_2)^2 - a_1^2 \right)$$

ou d'une manière équivalente

$$-1 < a_2 < 1 \text{ et } (1 + a_2)^2 > a_1^2$$

soit les relations

$$(1 + a_2 > a_1 \text{ si } a_1 \geq 0) \text{ et } (1 + a_2 > -a_1 \text{ si } a_1 \leq 0)$$

qui définissent le domaine de stabilité d'un système de second ordre.

1	a_1	a_2	
a_2	a_1	1	$\rightarrow \alpha_2 = a_2$
$1 - (a_2)^2$	$a_1(1 - a_2)$		
$a_1(1 - a_2)$	$1 - (a_2)^2$		$\rightarrow \alpha_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$
$1 - (a_2)^2 - \frac{(a_1)^2(1 - a_2)}{1 + a_2}$			

TABLE 5.2 – Tableau de Jury du polynôme $A(z) = z^2 + a_1z + a_2$

Remarque 5.7 *Le critère algébrique de Jury est relativement limité pour en faire un outil ingénieur comme l'indiquent les faits suivants.*

- F1. Il ne permet de répondre à la question de stabilité que d'une manière dichotomique, i.e. par un oui ou un non.*
- F2. Il est sensible aux incertitudes, sur les paramètres du polynôme considéré, issues des erreurs de modélisation inéluctables.*
- F3. Le volume de calcul mis en jeu augmente fortement avec l'ordre du système à analyser.*

5.4 Résultats remarquables

En vertu des résultats fondamentaux de modélisation et de stabilité externe, on peut en déduire trois résultats remarquables sur la caractérisation de la réponse d'un système stable à des classes spécifiques d'entrée. Ces résultats constituent les outils fondamentaux pour l'analyse des performances des systèmes asservis.

Résultat 5.11 *La réponse d'un système stable à une entrée asymptotiquement nulle est asymptotiquement nulle. Plus précisément, considérons un système stable décrit par*

$$y(kT_e) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(kT_e)$$

Alors on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(kT_e) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_e) = 0$$

Résultat 5.12 *La réponse d'un système stable à une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies est une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies. Plus précisément, considérons un système stable décrit par*

$$y(kT_e) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(kT_e)$$

Alors on aura

$$\left(\mathcal{E} \{u(kT_e)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E} \{u^2(kT_e)\} = \sigma^2 \right) \implies \left(\mathcal{E} \{y(kT_e)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E} \{y^2(kT_e)\} = \gamma\sigma^2 \right)$$

Résultat 5.13 *La réponse d'un système stable à une entrée bornée que l'on peut considérer comme la réponse impulsionnelle d'un système marginalement stable est asymptotiquement nulle si et seulement si les pôles du générateur de cette entrée situés sur le cercle unitaire sont des zéros du système. Plus précisément, considérons un système stable décrit par*

$$y(kT_e) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(kT_e)$$

et supposons que la séquence d'entrée est générée comme suit

$$u(kT_e) = \frac{C(q^{-1})}{D_{sa}(q^{-1})D_{su}(q^{-1})} \delta(kT_e)$$

avec

$$(D_{sa}(q^{-1}), D_{su}(q^{-1})) \in \mathbb{R}_{sa}[z^{-1}] \times \mathbb{R}_{su}[z^{-1}]$$

Alors on aura

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_e) = 0 \iff D_{su}(q^{-1}) \text{ divise } B(q^{-1})$$

Ce dernier résultat conforte le fait que les zéros d'un système sont perceptibles dans la nature des entrées qui produisent des sorties nulles.

5.5 Conclusion.

Ce chapitre est une présentation compréhensible sur la stabilité des systèmes linéaires échantillonnés à partir d'une lecture attentive des résultats disponibles. Cette présentation a été faite progressivement en trois parties. La première partie a été réservée au concept de stabilité externe qui a été défini à partir du comportement de la réponse impulsionnelle du système en vertu d'un résultat fondamental sur la stabilité \mathcal{EBSB} . Cette définition a été confortée par un résultat fondamental sur la caractérisation de la nature de la stabilité d'un système en fonction de la localisation de ses pôles. Ce résultat a été utilisé pour mettre en exergue la limitation du concept de stabilité externe à partir d'une étude du comportement d'une cascade de deux systèmes convenablement choisis. Cette limitation nous amène naturellement à la seconde partie consacrée au concept de la stabilité interne qui a été défini à partir conformément à l'approche de Lyapunov qui s'est avérée vitale pour les sciences pour l'ingénieur. Des résultats fondamentaux ont été présentés pour illustrer l'approche et montrer comment effectuer une analyse efficace de stabilité des systèmes linéaires échantillonnés. La troisième partie est dédiée au test de stabilité et la caractérisation de la réponse d'un système asymptotiquement stable à des entrées spécifiques. Deux critères algébriques sont proposés pour le test de stabilité. Le premier est réalisé par des solveurs efficaces issu de l'approche de Lyapunov, alors que le second n'est autre qu le critère de Jury qui ne constitue pas un outil ingénieur. Et pour investir dans la mémoire ingénieur, on peut retenir les aspects suivants sur les systèmes échantillonnés issus des systèmes linéaires invariants dans le temps.

- Les domaines de stabilité (rep. stabilité asymptotique) est le disque de centre l'origine du plan complexe en z et de rayon un (resp. le disque de centre l'origine du plan complexe en z et de rayon strictement inférieur à un), i.e.

$$\mathcal{D}_s \triangleq \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\} \left(\text{resp. } \mathcal{D}_{sa} \triangleq \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \right)$$

- Un système est stable au sens \mathcal{EBSB} (resp. asymptotiquement stable) si et seulement si tous ses pôles (resp. ses modes) sont situés à l'intérieur du domaine de stabilité, i.e. $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sa}$ (resp. $\mathcal{CM}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sa}$).
- Un système asymptotiquement stable est stable au sens \mathcal{EBSB} mais la réciproque n'est pas vraie.
- Un système asymptotiquement stable est un système exponentiellement stable.
- Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses modes sont situés à l'intérieur du domaine de stabilité, i.e.

$$\mathcal{V}(A) \subset \mathcal{D}_{sa} \iff \exists! P = P^T > 0 / F^T P F - P < 0_n$$

- Un système est stable au sens de \mathcal{L} apunov si et seulement si tous ses modes sont situés dans le domaine de stabilité et les modes situés sur la frontière du domaine de stabilité correspondent à des valeurs propres non défectives de la matrice d'état, i.e.

$$\exists! P = P^T > 0 / F^T P F - P \leq 0_n$$

- Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur borné $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \iff \mathcal{V}(A) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

5.6 Problèmes.

Outre une auto-évaluation des connaissances acquises tout au long de ce chapitre, on suggère d'effectuer les preuves qui ont été jugées relativement faciles pour mieux apprécier le potentiel minimal souhaité.

Problème 5.1 *Considérons un système décrit par sa fonction de transfert*

$$\mathcal{SYS} \{ Y(z) = \mathcal{G}(z)U(z) \}$$

avec

$$G(z^{-1}) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - 2\cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2})}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})} \text{ avec } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

On demande de traiter les aspects suivants du système

- 1) Donner la configuration pôles-zéros du système et étudier sa stabilité en fonction des scalaires α_1 et α_2 comme l'indique le tableau suivant. On utilisera les acronymes SST , SMS et SIS pour désigner que le système est stable, marginalement stable et instable, respectivement.
- 2) Préciser le cas où le système admet une réponse harmonique et en déduire son gain statique.

	$ \alpha_2 > 1$	$\alpha_2 = 1$	$ \alpha_2 < 1$
$ \alpha_1 > 1$			
$\alpha_1 = 1$			
$ \alpha_1 < 1$			

- 3) Donner l'équation aux différences du système.
- 4) Supposons que le système est stable, préciser la classe des entrées qui sont asymptotiquement rejetées par le système.

Problème 5.2 Considérons la classe des systèmes échantillonnés décrite par la réalisation d'état

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H = [h_1 \quad h_2]$$

où f_1, f_2, g_1, g_2, h_1 et h_2 sont des scalaires qui représentent les paramètres du système. Donner les expressions des trajectoires d'état et de sortie du système et étudier la stabilité interne du système en fonction de ses paramètres.

Problème 5.3 Etudier la stabilité des systèmes autonomes linéaires invariants dans le temps décrits par l'équation (5.6) en supposant que la matrice d'état F est diagonalisable.

Problème 5.4 Etablir les preuves des résultats remarquables 5.11, 5.12 et 5.13 à partir des résultats fondamentaux sur la stabilité des systèmes linéaires échantillonnés.

Problème 5.5 Etudier la stabilité des systèmes linéaires vraits dans le temps décrits par

$$\text{SALVT} \{ x((k+1)T_e) = F(kT_e) x(kT_e) \}$$

où la séquence matricielle $\{F(kT_e)\}$ est bornée et vérifie la propriété suivante

$$F^T(kT_e)PF(kT_e) - P < 0 \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

pour une certaine matrice symétrique et définie positive P .

Chapitre 6

Systemes asservis

La figure 6.1 montre un diagramme fonctionnel d'un système asservi qui résulte naturellement d'une interconnection du type rétroaction de deux systèmes dynamiques qui ne sont autres que le système et le régulateur. $\{u(t)\}$ et $\{y(t)\}$ désignent respectivement les séquences d'entrée et de sortie du système, $\{y_m(t)\}$ désigne la séquence de sortie mesurée du système, $\{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$ représentent respectivement les perturbations qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure inéluctables et $\{y^*(t)\}$ est la séquence de référence. L'ultime motivation d'un asservissement est de

maintenir la séquence de sortie du système dans un voisinage d'une séquence de référence indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure inéluctables, soit $\{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^(t)\}) / (\{v(t)\}, \{\eta(t)\})$*

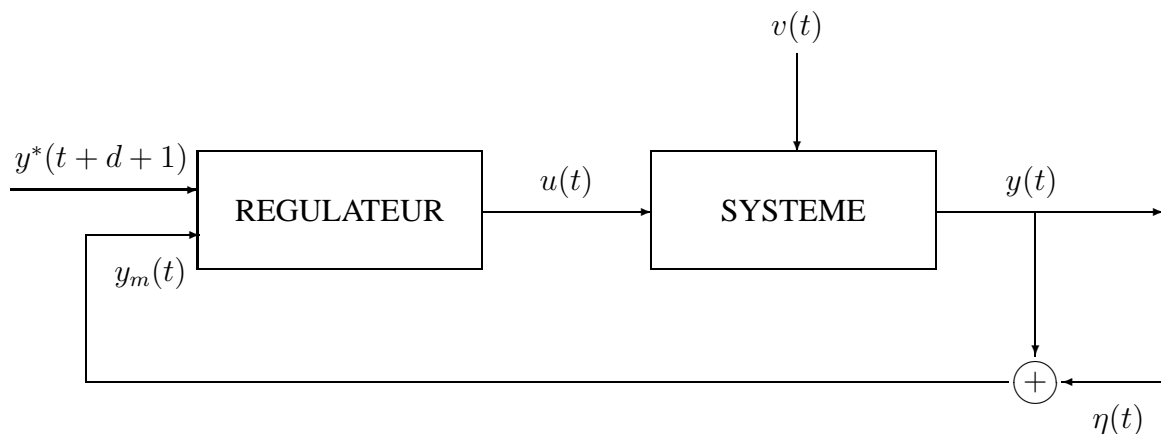


FIGURE 6.1 – Diagramme fonctionnel d'un système asservi

La synthèse d'un asservissement est généralement effectuée à partir d'un modèle de commande qui reproduit au mieux le comportement entrée-sortie du système et d'un ensemble de spécifications qui constituent le cahier des charges du système asservi. On distingue cinq propriétés fondamentales d'un asservissement.

- La stabilité interne.
- Les performances dynamiques, en l'occurrence une dynamique de poursuite admissible avec une dynamique de régulation appropriée.

- L'insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.
- La compensation des perturbations qui affectent le fonctionnement des systèmes avec une précision adéquate, i.e une erreur de poursuite aussi petite que possible.
- La robustesse par rapport aux erreurs de modélisation inéluctables.
- La simplicité du régulateur, i.e une mise en œuvre aisée et une interprétation compréhensible de ses actions principales.

On présente dans ce chapitre les bases de la commande linéaire des systèmes échantillonnés à partir d'une structure générale des systèmes asservis. Les modèles de commande considérés sont ceux qui sont communément utilisés pour représenter au mieux le comportement entrée-sortie des systèmes. Les régulateurs utilisés sont dotés d'une structure suffisamment flexible pour pouvoir y incorporer toutes les lois de commande linéaires disponibles. Les équations du système asservi sont établies sous des formes appropriées pour effectuer une analyse fondamentale de stabilité et de performances du système asservi. Une attention particulière est accordée aux quantificateurs de performances des systèmes asservis, en l'occurrence les réponses harmoniques de la dynamique de poursuite et des fonctions de sensibilité usuelles qui représentent la dynamique de régulation, et les erreurs de poursuite entrée-sortie sous-jacentes. Les résultats de cette analyse ont permis de caractériser la classe de régulateurs admissibles par rapport à l'ultime motivation d'un asservissement. Une analyse de robustesse du système asservi est faite pour montrer que les fonctions de sensibilité usuelles sont aussi des quantificateurs de robustesse en stabilité.

6.1 Le système

Le système à commander est la cascade constituée du convertisseur numérique analogique, du système continu et du convertisseur analogique numérique comme l'indique la figure 6.2.

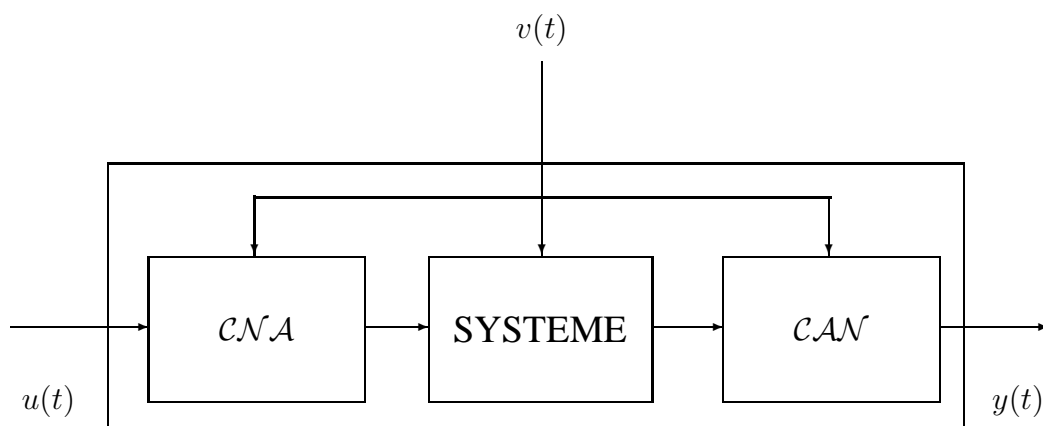


FIGURE 6.2 – Le système

Le comportement entrée-sortie du système et son environnement est généralement approximé par des équations aux différences de la forme

$$\mathcal{MC} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

où $\{\delta_v(t)\}$ est une impulsion d'amplitude inconnue v , i.e. $v(t) = v\delta(t)$. Ces équations représentent un modèle de commande du système que l'on peut récrire sous la forme

$$\mathcal{MC} \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_\sigma(q^{-1}) u(t) + \mathcal{G}_p(q^{-1}) v(t) \\ v(t) = \mathcal{H}(q^{-1}) \delta_v(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

avec

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad \mathcal{G}_p(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \quad (6.3)$$

Cette représentation est à la base de la figure 6.3. La fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ représente la dynamique dominante du système alors que les fonctions de transfert $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ et $\mathcal{H}(z^{-1})$ sont des descriptions des effets des perturbations externes.

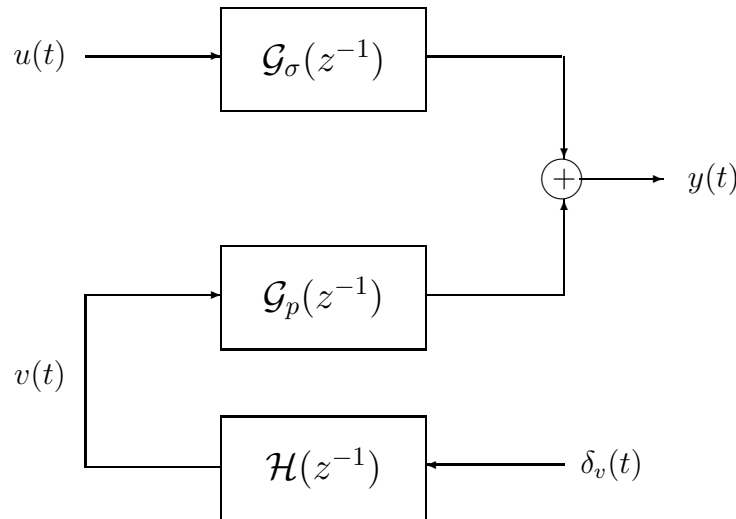


FIGURE 6.3 – Modèle de commande

Remarque 6.1 Comme la séquence des perturbations n'est pas nécessairement de moyenne nulle et que la séquence d'entrée $\{\delta_v(t)\}$ est bornée, on peut conclure naturellement que le générateur des perturbations est marginalement stable et que son inverse est stable, soit

$$D(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{dn}[z^{-1}] \cup \mathbb{R}_{su}[z^{-1}] \quad \text{et} \quad C(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sa}[z^{-1}]$$

Le polynôme $D(z^{-1})$ représente la nature des perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système, e.g. les perturbations du type échelon et du type harmonique sont respectivement caractérisées par

$$v(t) = v\alpha(t) \quad \implies \quad D(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

ou

$$v(t) = v\sin(\omega t + \varphi)\alpha(t) \quad \implies \quad D(z^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e) z^{-1} + z^{-2}$$

6.2 Le régulateur

Le régulateur est un système dynamique qui a deux entrées, i.e. la séquence de sortie mesurée du système $\{y_m(t)\}$ et la séquence de référence $\{y^*(t)\}$, et une sortie, i.e. la séquence d'entrée du système $\{u(t)\}$, comme l'indique la figure 6.4. Il peut être alors décrit par les équations différences données par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases} \quad (6.4)$$



FIGURE 6.4 – Le régulateur

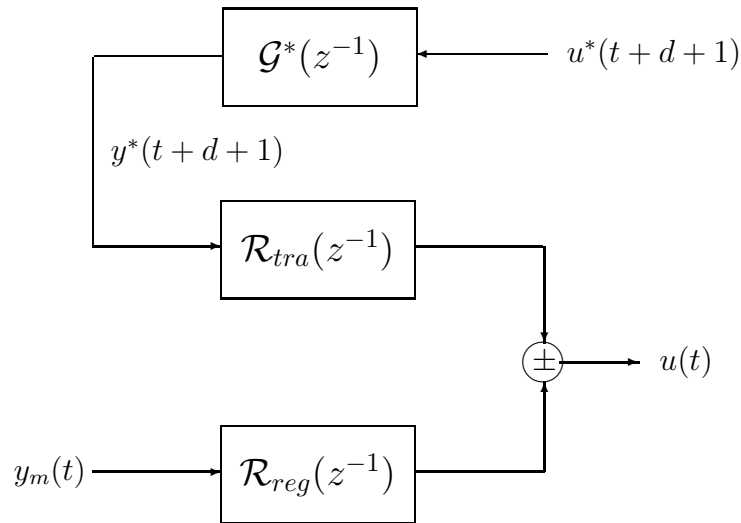


FIGURE 6.5 – Régulateur à deux degrés de liberté

Pour mieux apprécier la nature du régulateur considéré, on notera que son équation peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}_{reg}(q^{-1}) y_m(t) + \mathcal{R}_{tra}(q^{-1}) y^*(t+d+1) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases} \quad (6.5)$$

avec

$$\mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \quad \mathcal{R}_{tra}(z^{-1}) = \frac{T_r(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^*(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} \quad (6.6)$$

On distingue deux degrés de liberté comme le montre la figure 6.5. Le premier degré de liberté, i.e. $\mathcal{R}_{reg}(z^{-1})$, est consacré aux performances en régulation alors que le second degré de liberté, i.e. $\mathcal{R}_{tra}(q^{-1})$, permet de modéliser les performances en poursuite par rapport à celles de la régulation en utilisant la dynamique du générateur de la séquence de référence, i.e. $\mathcal{G}^*(z^{-1})$.

Remarque 6.2 *L'avance de la séquence de référence adoptée dans l'équation du régulateur (6.4) est essentiellement motivée par des considérations de poursuite parfaite dans la mesure du possible. Dans le cas où les valeurs de la séquence de référence $\{y^*(t+i)\}_{i \in [1, d+1]}$ ne sont pas disponibles à l'instant t , on peut toujours utiliser le régulateur (6.4) avec $T_r(q^{-1}) = q^{-d-1}\Gamma(q^{-1})$.*

Remarque 6.3 *Le cas $T_r(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1})$ correspond à la classe des régulateurs avec retour unitaire décrits par l'équation aux différences*

$$\mathcal{RU} \left\{ u(t) = \mathcal{R}(q^{-1}) (y^*(t) - y_m(t)) \right. \quad (6.7)$$

Cette classe de régulateurs est décrite par les fonctions de transfert $\mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) = \mathcal{R}(z^{-1})$ et $\mathcal{R}_{tra}(z^{-1}) = z^{-d-1}\mathcal{R}_{reg}(z^{-1})$ et n'admettent donc qu'un seul degré de liberté. Ils sont communément utilisés dans les asservissements industriels où la séquence de référence et les perturbations qui affectent le fonctionnement du système sont du type échelon. Une action intégrale est incorporée dans la synthèse de ces asservissements pour les doter d'une erreur statique nulle.

Remarque 6.4 *Le régulateur PID est issu d'une composition d'une action proportionnelle, d'une action intégrale et d'une action dérivée filtrée, soit*

$$\mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) = \gamma_p + \gamma_i \frac{1}{1 - z^{-1}} + \gamma_d \frac{1 - z^{-1}}{1 + \varphi_d z^{-1}}$$

Il peut être ainsi décrit par une fonction de transfert de second ordre avec deux zéros et deux pôles avec un pôle en un.

$$\mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) = \frac{r_o + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(s_o + s_1 z^{-1})}$$

On montre que l'action intégrale est l'essence de ce type de régulateur dans la mesure où elle permet de réaliser un rejet asymptotique des perturbations du type échelon.

6.3 Le système de commande

La figure 6.6 montre une représentation du système de commande qui met en évidence ses trois entrées, en l'occurrence la séquences de référence et celle des perturbations et du bruit de mesure, et ses deux sorties, notamment les sorties du système et du régulateur. On distingue le système de commande réel du système de commande nominal qui lui est associé. Le premier est constitué par le système en rétroaction avec le régulateur comme l'indique la figure 6.7. Le système de commande nominal sous-jacent est obtenu à partir du système de commande réel en supposant que le comportement entrée-sortie du système est parfaitement décrit par le modèle de commande comme l'indique la figure 6.8. Le comportement entrée-sortie du système

de commande est complètement caractérisé par ceux du système d'une part et du régulateur d'autre part. Comme un modèle de commande n'est qu'une approximation, aussi bonne qu'elle puisse être du comportement entrée-sortie du système et de l'influence de son environnement, les performances du système de commande et de sa version nominale sont généralement différentes. Cette différence dépend essentiellement de l'erreur entre la dynamique du système et celle de son modèle de commande. Une bonne modélisation du système est donc impérative pour réaliser les performances requises. En effet, ces performances sont, par conception, réalisées par le système de commande nominal.

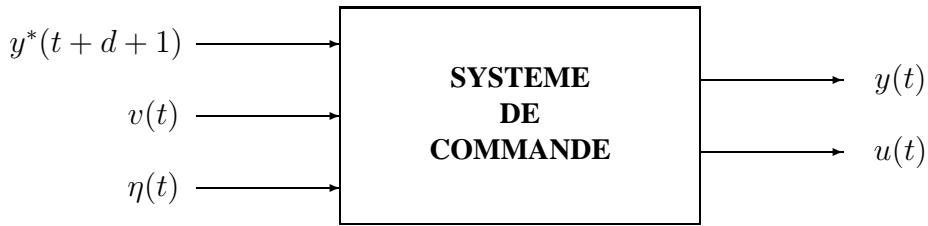


FIGURE 6.6 – Système de commande

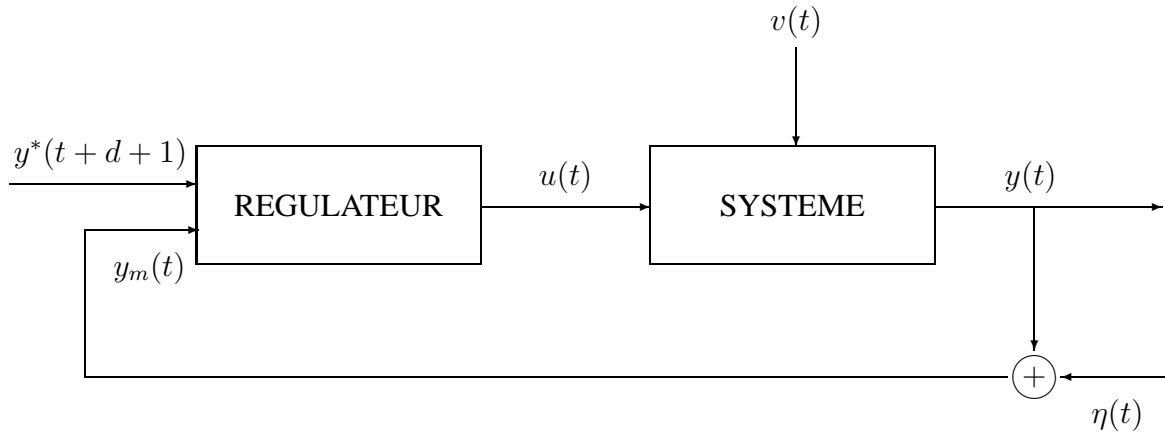


FIGURE 6.7 – Système de commande

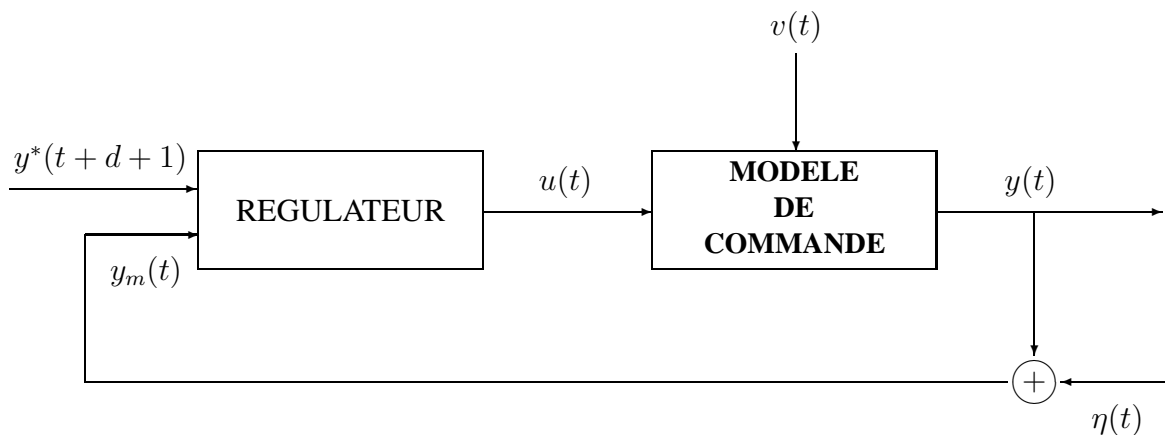


FIGURE 6.8 – Système de commande nominal

6.3.1 Performances entrée-sortie

Les équations entrée-sortie du système de commande sont obtenues en éliminant respectivement l'entrée et la sortie du système entre les équations du modèle de commande (6.1) et du régulateur (6.4). L'élimination de l'entrée peut être obtenue en opérant sur les deux membres de l'équation du modèle de commande par $R_d(q^{-1})$ pour faire apparaître le produit de convolution $R_d(q^{-1})u(t)$. En effet, l'opération par $R_d(q^{-1})$ sur les deux membres de l'équation (6.1) donne

$$\begin{aligned} R_d(q^{-1}) (A(q^{-1})y(t)) &= R_d(q^{-1}) (q^{-d-1}B(q^{-1})u(t)) + R_d(q^{-1}) (E(q^{-1})v(t)) \\ \Leftrightarrow \\ (A(q^{-1})R_d(q^{-1})) y(t) &= q^{-d-1}B(q^{-1}) (R_d(q^{-1})u(t)) + (E(q^{-1})R_d(q^{-1})) v(t) \end{aligned}$$

Et compte tenu de l'équation du régulateur, on peut effectuer la substitution requise du terme $R_d(q^{-1})u(t)$ dans l'équation du modèle de commande ci-dessus afin de réaliser l'élimination de la commande dans l'équation de sortie du système de commande comme suit.

$$\begin{aligned} A(q^{-1})R_d(q^{-1})y(t) &= q^{-d-1}B(q^{-1}) (T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) - R_n(q^{-1}) (y(t) + \eta(t))) \\ &\quad + E(q^{-1})R_d(q^{-1})v(t) \\ &= q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})y(t) \\ &\quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) + E(q^{-1})R_d(q^{-1})v(t) \\ \Leftrightarrow \\ (A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})) y(t) &= q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ &\quad + E(q^{-1})R_d(q^{-1})v(t) \\ &\quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

Quant à l'élimination de la sortie, elle peut être obtenue en opérant sur l'équation du régulateur (6.4) par $A(q^{-1})$ pour faire apparaître le produit de convolution $A(q^{-1})y(t)$ que l'on élimine ensuite en utilisant l'équation du modèle de commande (6.1). En effet, l'opération par $A(q^{-1})$ sur les deux membres de l'équation (6.4) donne

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) (R_d(q^{-1})u(t)) &= A(q^{-1}) (T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) - R_n(q^{-1}) (y(t) + \eta(t))) \\ \Leftrightarrow \\ (A(q^{-1})R_d(q^{-1})) u(t) &= (A(q^{-1})T_r(q^{-1})) y^*(t+d+1) - R_n(q^{-1}) (A(q^{-1})y(t)) \\ &\quad - (A(q^{-1})R_n(q^{-1})) \eta(t) \end{aligned}$$

Et compte tenu l'équation du modèle de commande (6.1), on peut effectuer la substitution requise du terme $A(q^{-1})y(t)$ dans l'équation du régulateur ci-dessus afin de réaliser l'élimination de la sortie dans l'équation d'entrée du système de commande comme suit.

$$\begin{aligned} A(q^{-1})R_d(q^{-1})u(t) &= A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})u(t) \\ &\quad - E(q^{-1})R_n(q^{-1})v(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})) u(t) = & A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ & - E(q^{-1})R_n(q^{-1})v(t) \\ & - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

Le comportement entrée-sortie du système asservi peut être alors décrit par les équations suivantes

$$\mathcal{SAS} \begin{cases} P_c(q^{-1})y(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ \quad + E(q^{-1})R_d(q^{-1})v(t) - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\ P_c(q^{-1})u(t) = A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ \quad - E(q^{-1})R_n(q^{-1})v(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{cases} \quad (6.8)$$

où $P_c(q^{-1})$ désigne le polynôme caractéristique du système de commande donné par

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1}) \quad (6.9)$$

6.3.2 Fonctions de transfert remarquables

Un système asservi se distingue par une boucle de rétroaction que l'on peut mettre en exergue en occultant toutes ses entrées comme le montre la figure 6.9.

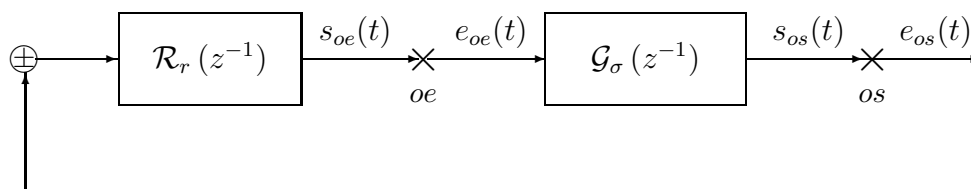


FIGURE 6.9 – Boucle du système asservi

Et si l'on ouvre la boucle en entrée, i.e. au point \times_{oe} (resp. en sortie, i.e. au point \times_{os}), on aura

$$\begin{aligned} S_{oe}(z) = -\mathcal{R}_r(z^{-1})\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})E_{oe}(z) \text{ et } E_{oe}(z) - S_{oe}(z) = (1 + \mathcal{R}_r(z^{-1})\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})) E_{oe}(z) \\ (\text{resp. } S_{os}(z) = -\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})\mathcal{R}_r(z^{-1})E_{os}(z) \text{ et } E_{os}(z) - S_{os}(z) = (1 + \mathcal{G}_\sigma(z^{-1})\mathcal{R}_r(z^{-1})) E_{os}(z)) \end{aligned}$$

Ces équations permettent de définir les fonctions de transfert remarquables d'un système asservi, en l'occurrence

- Les fonctions de transfert en boucle ouverte en entrée et en sortie respectivement données par

$$\mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{R}_r(z^{-1}) \mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) \mathcal{R}_r(z^{-1}) \quad (6.10)$$

- Les différences de retour en entrée et en sortie respectivement données par

$$\mathcal{D}_{re}(z^{-1}) \triangleq 1 + \mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{D}_{rs}(z^{-1}) \triangleq 1 + \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \quad (6.11)$$

- Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire en entrée et en sortie respectivement données par

$$\mathcal{S}_e(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{D}_{re}(z^{-1}))^{-1}, \quad \mathcal{S}_s(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{D}_{rs}(z^{-1}))^{-1} \quad (6.12)$$

et

$$\mathcal{T}_e(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{D}_{re}(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_{oe}(z^{-1}), \quad \mathcal{T}_s(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{D}_{rs}(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \quad (6.13)$$

Et elles sont reliées entre elles par la relation algébrique

$$\mathcal{S}_e(z^{-1}) + \mathcal{T}_e(z^{-1}) = 1 = \mathcal{S}_s(z^{-1}) + \mathcal{T}_s(z^{-1}) \text{ pour tout } z \in \mathcal{C}$$

Dans le cas des systèmes monovariables, qui nous préoccupe dans cet ouvrage, les fonctions de transfert remarquables d'un système asservi en boucle ouverte en entrée et en sortie sont égales, soit

$$\mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}_o(z^{-1})$$

$$\mathcal{D}_{re}(z^{-1}) = \mathcal{D}_{rs}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{D}_r(z^{-1})$$

$$\mathcal{S}_e(z^{-1}) = \mathcal{S}_s(z^{-1}) \triangleq \mathcal{S}(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{T}_e(z^{-1}) = \mathcal{T}_s(z^{-1}) \triangleq \mathcal{T}_r(z^{-1})$$

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires du système asservi sont alors respectivement données par

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \text{ et } \mathcal{T}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \quad (6.14)$$

Remarque 6.5 *Compte tenu qu'un système asservi est asymptotiquement stable, on montre aisément que la fonction de sensibilité réalise un filtrage passe-haut, alors que la fonction de sensibilité complémentaire réalise un filtrage passe-bas.*

6.3.3 Interprétation systemique

Rappelons que le système asservi est un système dynamique qui a trois entrées et deux sorties, comme le montre la figure 6.6, que l'on peut regrouper dans deux vecteurs comme suit

$$u_{sas}(t) = \begin{pmatrix} y^*(t+d+1) \\ v(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \text{ et } y_{sas}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

En appliquant la transformée en z aux équations (6.8)-(6.9) du système asservi, on peut le représenter comme suit

$$\mathcal{SAS} \left\{ Y_{sas}(z) = \mathcal{G}_{sas}(z^{-1})U_{sas}(z) \right. \quad (6.16)$$

avec

$$\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

où $U_{sas}(z)$ et $Y_{sas}(z)$ désignent respectivement les transformées en z des vecteurs d'entrée et de sortie du système de commande et les $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$ pour $(i, j) \in [s, e] \times [r, p, b]$ désignent ses différentes fonctions de transfert respectivement données par

$$\mathcal{FTR} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) \triangleq \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) \triangleq -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Ces fonctions de transfert ont le même dénominateur, qui n'est autre que le polynôme $P_c(z^{-1})$, et ne sont pas nécessairement irréductibles. Les racines du polynôme $P_c(z^{-1})$ constituent alors les modes du système asservi, soit

$$\mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) = \{z \in \mathcal{C} / P_c(z^{-1}) = 0\}$$

Cette relation est l'essence de l'appellation polynôme caractéristique du système asservi attribuée au polynôme $P_c(z^{-1})$, confortée par la remarque suivante.

Remarque 6.6 *On montre que le système asservi peut être aussi décrit par une représentation d'état*

$$\mathcal{SAS} \left\{ \begin{array}{l} x_{sas}(t+1) = F_{sas}x_{sas}(t) + G_{sas}u_{sas}(t) \\ y_{sas}(t) = H_{sas}x_{sas}(t) + E_{sas}u_{sas}(t) \end{array} \right. \quad (6.19)$$

où $(F_{sas}, G_{sas}, H_{sas}, E_{sas})$ est une réalisation d'état de la matrice de transfert $\mathcal{G}_{sas}(z)$, i.e.

$$\mathcal{G}_{sas}(s) = H_{sas}(zI_{n_{sas}} - F_{sas})^{-1}G_{sas} + E_{sas} \quad (6.20)$$

Les figures 6.10 et 6.11 mettent en exergue les fonctions de transfert qui caractérisent complètement le système asservi, en l'occurrence les composantes de la sortie (resp. de l'entrée), que l'on désigne par $\{y_r(t)\}$, $\{y_p(t)\}$ et $\{u_b(t)\}$, et qui ne sont autres que les effets de la séquence de référence avancée $\{y^*(t + d + 1)\}$, des perturbations $\{v(t)\}$ et des bruits de mesure $\{\eta(t)\}$ sur la sortie $\{y(t)\}$ (resp. l'entrée $\{u(t)\}$) du système.

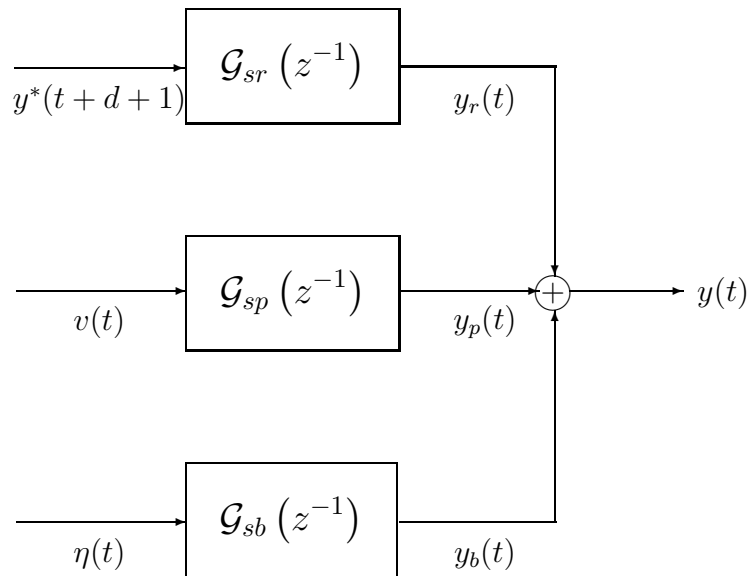


FIGURE 6.10 – Performances nominales en sortie

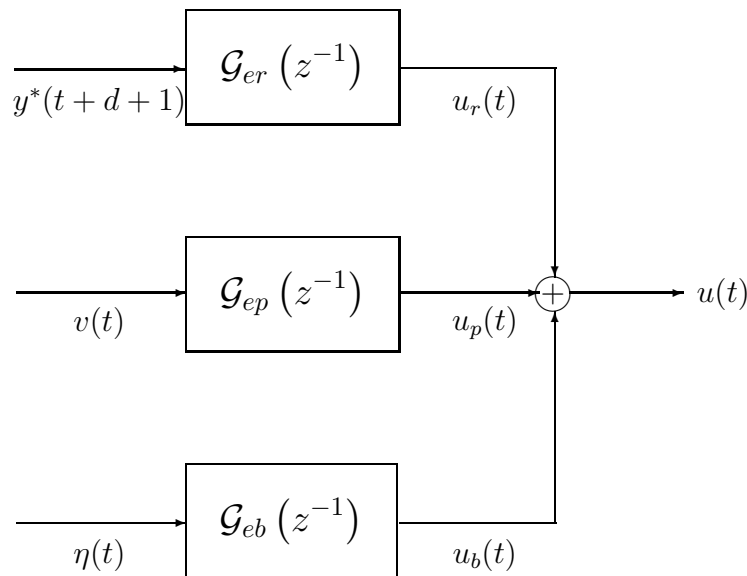


FIGURE 6.11 – Performances nominales en entrée

Les fonctions de transfert d'un asservissement suggèrent une interprétation systemique que l'on peut utiliser à bon escient aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse des asservissements linéaires. La base fondamentale de cette interprétation est donnée par les éléments suivants.

- Le système est asymptotiquement stable si et seulement si ses modes sont tous situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$\mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) \subset \mathcal{D}_{sa} \iff P_c(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sa}[z^{-1}]$$

Le test de stabilité asymptotique peut être effectué en utilisant un critère algébrique issu de l'approche de Lyapunov. Et si l'on adopte une forme canonique d'observabilité pour la réalisation d'état du système asservi, la matrice d'état est particulièrement donnée par

$$F_{sas} = \begin{pmatrix} -p_1 & & & & \\ -p_2 & & I_{n_{sas}-1} & & \\ \vdots & & & & \\ -p_{n_{sas}} & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

On peut alors conclure, en vertu du résultat de stabilité (5.8), que le système asservi est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\exists! P_{sas} = P_{sas}^T > 0 / F_{sas}^T P_{sas} F_{sas} - P_{sas} < 0_{n_{sas}}$$

- La dynamique de poursuite du système asservi est caractérisée par la fonction de transfert entre la composante $\{y_r(t)\}$ de la sortie du système et la séquence de points de consigne $\{u^*(t)\}$, soit

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) z^{d+1} \mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1}) T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} z^{d+1} \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

On peut alors postuler que le retard du système est invariant par rétroaction et qu'il en est de même pour les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ pourvu qu'ils ne soient pas des modes du systèmes asservi.

Remarque 6.7 *L'avance de la séquence de référence d'un horizon égal au retard du système est principalement motivée par une compensation parfaite du retard du système pour avoir une dynamique de poursuite sans retard. Autrement la poursuite se fera avec un retard égal au retard du système comme l'indique la remarque 6.2.*

Remarque 6.8 *La dynamique de poursuite d'un asservissements avec retour unitaire, i.e. $T_r(q^{-1}) = q^{-d-1} R_n(q^{-1})$, est donnée par*

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1}) = \mathcal{T}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

Et comme la fonction de sensibilité complémentaire n'est pas identiquement égale à un, on en déduit naturellement que la poursuite parfaite n'est pas réalisable par un asservissement avec retour unitaire indépendamment de la nature de la séquence de référence.

- La dynamique de régulation est caractérisée par la fonction de transfert entre la composante $\{y_p(t)\}$ de la sortie du système et la séquence des perturbations $\{v(t)\}$, soit

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}$$

On peut alors postuler que les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ du système sont invariants par rétroaction puisqu'ils se retrouvent dans la dynamique de régulation associée aux perturbations de charge pourvu qu'ils ne soient pas des modes du système asservi. Par ailleurs, cette dynamique de régulation peut s'exprimer à partir de la fonction de sensibilité dans le cas où toutes les perturbations peuvent être ramenées en sortie (resp. en entrée). En effet, on a

$$\mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \mathcal{S}(z^{-1}) \iff E(q^{-1}) = A(q^{-1})$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{GS}(z^{-1}) \iff E(q^{-1}) = q^{-d-1}B(q^{-1}) \right)$$

- La sensibilité du système de commande par rapport aux bruits de mesure est caractérisée par les fonctions de transfert qui relient la composante $\{y_b(t)\}$ de la sortie et la composante $\{u_b(t)\}$ de l'entrée du système aux bruits de mesure $\{\eta(t)\}$, soit

$$\mathcal{SB}(z^{-1}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ -\frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \end{pmatrix}$$

On peut alors postuler que ces fonctions de transfert peuvent s'exprimer en fonction des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire comme suit

$$\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) = -\mathcal{T}(z^{-1})$$

et

$$\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) = -\mathcal{R}(z^{-1})\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq -\mathcal{RS}(z^{-1})$$

- La propagation en entrée des perturbations que l'on peut ramener en sortie, i.e. $E(q^{-1}) = A(q^{-1})$, et des bruits de mesure est percevable à partir des fonctions de transfert qui relient l'entrée du système aux perturbations en sortie, et aux bruits de mesure respectivement données par

$$\mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) = -\mathcal{RS}(z^{-1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) = -\mathcal{RS}(z^{-1})$$

On peut alors postuler que la propagation en entrée de toutes les imperfections que l'on peut ramener en sortie du système peut être complètement décrite par la fonction de transfert $-\mathcal{RS}(z^{-1})$.

- Et si l'on désigne par $\{y_{ind}(t)\}$ et $\{u_{ind}(t)\}$ l'ensemble des composantes indésirables en sortie et le résultat de leur propagation en entrée, alors on a

$$u_{ind}(t) = -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} y_{ind}(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1}) y_{ind}(t)$$

Cette interprétation montre clairement que les fonctions de transfert $\mathcal{S}(z^{-1})$, $\mathcal{T}(z^{-1})$, $\mathcal{GS}(z^{-1})$ et $\mathcal{RS}(z^{-1})$ sont les fonctions de sensibilité usuelles d'un système asservi standard où les perturbations et les bruits de mesure sont ramenés en entrée et en sortie du système comme le montre la figure 6.12. Elle suggère naturellement une méthodologie de synthèse des asservissements basée sur un modelage admissible des dynamiques de poursuite et de régulation à partir de leurs réponses harmoniques. Le qualificatif usuel est principalement motivé par le fait que ces fonctions de transfert constituent des quantificateurs de performances nominales des asservissements puisque $\mathcal{S}(z^{-1})$, $\mathcal{T}(z^{-1})$ et $\mathcal{GS}(z^{-1})$ réalisent respectivement un filtrage passe haut, passe-bas et passe-bande et que $\mathcal{RS}(z^{-1})$ réalise un filtrage passe bande pourvu que le gain de la réponse fréquentielle du régulateur soit relativement petit au voisinage de la fréquence de Nyquist. Cette méthodologie exploite judicieusement les résultats fondamentaux disponibles sur la robustesse en stabilité et les limitations des performances intrinsèques aux configurations des pôles et des zéros du système pour trouver un compromis robustesse \rightleftharpoons performances admissible ([4], [11],[20], [23]). Elle requiert un système de conception assistée par ordinateur basée sur des synthèses rationnelles et efficaces. Rappelons que la bande passante de la dynamique de régulation doit être relativement grande par rapport à la bande passante de la dynamique de poursuite et que cette propriété générique d'un asservissement est satisfaite en spécifiant judicieusement le générateur de la séquence de référence $\mathcal{G}^*(z^{-1})$.

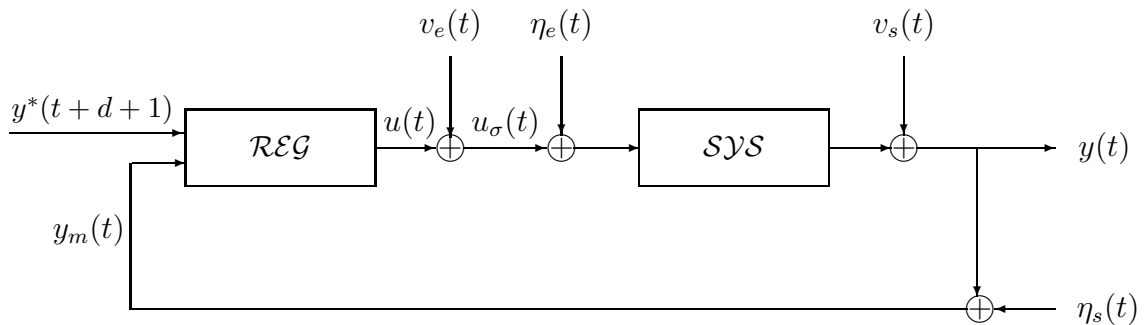


FIGURE 6.12 – Système de commande standard

Remarque 6.9 Les performances nominales peuvent être déterminées à partir du système de commande standard de la figure 6.12 en éliminant respectivement l'entrée et la sortie du système entre les équations du modèle de commande standard et du régulateur respectivement donnés par les équations.

$$MCS \left\{ A(q^{-1})y(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})(u_{\sigma}(t) + \eta_e(t)) + A(q^{-1})v_s(t) \right. \quad (6.21)$$

et

$$REG \left\{ R_d(q^{-1})(u_{\sigma}(t) - v_e(t)) + R_n(q^{-1})(y(t) + \eta_s(t)) = T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \right. \quad (6.22)$$

On montre aisément que le comportement entrée-sortie du système commande standard est décrit par

$$\mathcal{SAS} \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) y^*(t+d+1) + \mathcal{S}(q^{-1}) v_s(t) - \mathcal{T}(q^{-1}) \eta_s(t) \\ \quad + \mathcal{GS}(q^{-1}) (v_e(t) + \eta_e(t)) \\ u_\sigma(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1}) y^*(t+d+1) + \mathcal{S}(q^{-1}) v_e(t) - \mathcal{T}(q^{-1}) \eta_e(t) \\ \quad - \mathcal{RS}(q^{-1}) (v_s(t) + \eta_s(t)) \end{cases} \quad (6.23)$$

6.3.4 Régulateurs admissibles

Les équations du comportement entrée-sortie du systèmes asservi (6.16) peuvent se récrire sous la forme

$$\mathcal{SAS} \begin{cases} y(t) = y_r(t) + y_p(t) + y_b(t) \\ u(t) = u_r(t) + u_p(t) + u_b(t) \end{cases} \quad (6.24)$$

avec

$$\mathcal{CSAS} \begin{cases} y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) y^*(t+d+1) \\ y_p(t) = \mathcal{G}_{sp}(q^{-1}) v(t) \\ y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) \eta(t) \\ u_r(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1}) y^*(t+d+1) \\ u_p(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) v(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1}) \eta(t) \end{cases} \quad (6.25)$$

Cette expression nous amène à définir naturellement les erreurs de poursuite du système asservi, que nous utiliserons pour caractériser la classe des régulateurs admissibles par rapport à l'ultime motivation d'un asservissement, en l'occurrence

maintenir la séquence de sortie du système dans un voisinage d'une séquence de référence indépendamment des perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure inéluctables, soit $\{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^(t)\}) / (\{v(t)\}, \{\eta(t)\})$*

- Les erreurs de poursuite en sortie et en entrée sont respectivement définies par

$$\mathcal{ERPESES} \begin{cases} e_y(t) \triangleq y(t) - y_r(t) \\ e_u(t) \triangleq u(t) - u_r(t) \end{cases} \quad (6.26)$$

Elles représentent plus précisément les erreurs de poursuite d'entrée et de sortie par rapport aux trajectoires nominales de la sortie et de l'entrée, respectivement définies par les séquences $\{y_r(t)\}$ et $\{u_r(t)\}$. C'est pourquoi, elles sont utilisées comme des quantificateurs temporels des performances d'un asservissement, que l'on peut représenter comme

l'indiquent les figures 6.13 et 6.14 qui mettent en exergue les effets des perturbations et des bruits de mesure sur les performances du système asservi.

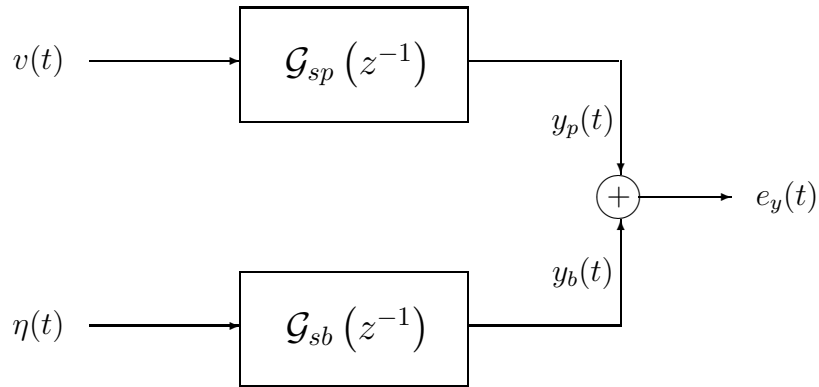


FIGURE 6.13 – Erreur de poursuite en sortie

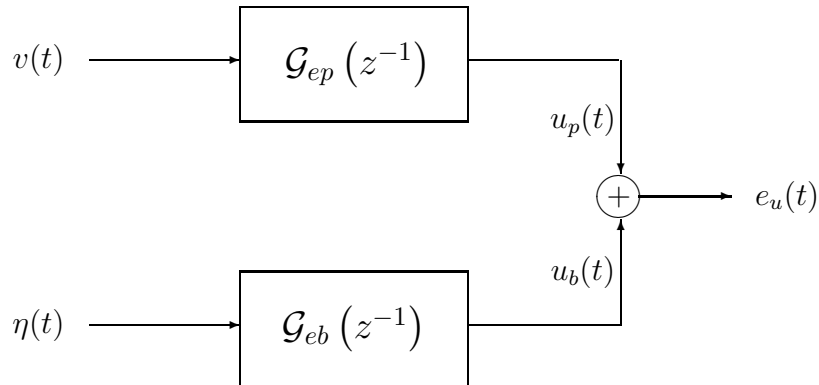


FIGURE 6.14 – Erreur de poursuite en entrée

- L'erreur de poursuite d'un système asservi est communément définie à partir de la sortie du système, et non la mesure de la sortie du système, comme suit

$$e(t) \triangleq y^*(t) - y(t)$$

L'équation de cette erreur de poursuite peut être déduite de l'équation de la sortie (6.8) du système asservi, soit

$$\begin{aligned} P_c(q^{-1})e(t) &= (A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + B(z^{-1})(z^{-d-1}R_n(z^{-1}) - T_r(z^{-1})))y^*(t) \\ &\quad - E(q^{-1})R_d(q^{-1})v(t) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

Et compte tenu de la définition des composantes $\{y_p(t)\}$ et $\{y_b(t)\}$ de la sortie du système $\{y(t)\}$, cette équation peut alors se récrire comme suit

$$\mathcal{ERP} \{ e(t) = e_c(t) - y_p(t) - y_b(t) \}$$

où $\{e_c(t)\}$ désigne la composante de l'erreur de poursuite associée à la séquence de

consigne $\{u^*(t)\}$ donnée par

$$e_c(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})u^*(t) \quad (6.27)$$

avec

$$\mathcal{G}_{ec}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + B(z^{-1})(z^{-d-1}R_n(z^{-1}) - T_r(z^{-1}))}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) \quad (6.28)$$

L'erreur de poursuite d'un asservissement peut être alors représentée comme l'indique la figure 6.15 qui permet de mieux percevoir la vraisemblance des effets de la séquence de référence et des perturbations sur l'erreur de poursuite.

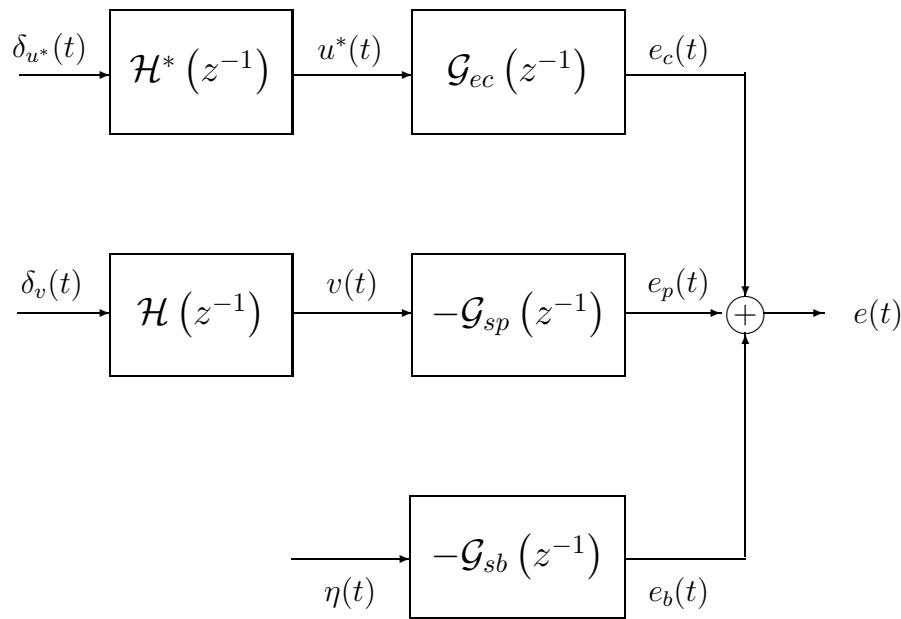


FIGURE 6.15 – Erreur de poursuite

Remarque 6.10 Dans le cas des systèmes asservis avec retour unitaire caractérisés par $T_r(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1})$, la fonction de transfert $\mathcal{G}_{ec}(z^{-1})$ est simplifiée comme suit

$$\mathcal{G}_{ec}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) = \mathcal{S}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

Rappelons que la dynamique de poursuite d'un système asservi avec retour unitaire est donnée par sa fonction de sensibilité complémentaire modulo une multiplication par la fonction de transfert du modèle générateur de la séquence de référence, soit

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{T}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

Compte tenu des équations du système de commande (6.24)-(6.25), on distingue cinq conditions essentielles pour caractériser la classe des régulateurs admissibles par rapport à l'ultime motivation d'un asservissement.

C1. Le système de commande réalise les performances dynamiques requises, i.e.

$$\mathcal{RPD} \left\{ \mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) \subset \mathcal{D}_{sp} \right. \quad (6.29)$$

C2. Le système de commande est insensible aux bruits de mesures inéluctables, i.e.

$$\mathcal{IBM} \left\{ \{y_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \text{ et } \{u_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \right. \quad (6.30)$$

C3. Le système de commande réalise une compensation parfaite des perturbations qui affectent ses performances en sortie, i.e.

$$\mathcal{CPP} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) = 0 \right. \quad (6.31)$$

C4. Le système de commande réalise une dépollution du signal de commande des composantes indésirables en sortie si

$$\mathcal{DSC} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \text{ avec } u_{ind}(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})y_{ind}(t) \right. \quad (6.32)$$

où la séquence $\{y_{ind}(t)\}$ englobe l'ensemble des effets des composantes indésirables en sortie. Cette propriété n'est autre qu'une compensation parfaite des effets des perturbations en sortie sur les performances du système de commande en entrée.

C5. Le système de commande réalise une poursuite admissible (resp. une précision maximale) si l'erreur de poursuite en sortie (resp. l'erreur de poursuite) est aussi petite que possible, i.e.

$$\mathcal{PA} \left\{ \begin{array}{l} \{e_y(t)\} \in \mathcal{SAZI} \\ \text{avec} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \text{ lorsque } \eta(t) = 0 \text{ pour tout } t \end{array} \right. \quad (6.33)$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{PM} \left\{ \begin{array}{l} \{e(t)\} \in \mathcal{SAZI} \\ \text{avec} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ lorsque } \eta(t) = 0 \text{ pour tout } t \end{array} \right. \right) \quad (6.34)$$

Nous donnons dans ce qui suit les propriétés requises pour caractériser la classe des régulateurs admissibles par rapport à l'ultime motivation d'un asservissement en supposant qu'il est asymptotiquement stable.

La condition \mathcal{RPD} est naturellement réalisée par les synthèses disponibles modulo une spécification appropriée des paramètres de synthèse associés. Elle requiert que la réduction de la fraction rationnelle qui conduit à la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(z^{-1})$ porte sur des racines qui sont situées dans le domaine de stabilité et de performances \mathcal{D}_{sp} , soit

$$\text{pgcd}(A(z^{-1})R_d(z^{-1}), z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sp}$$

Et comme la fonction de transfert du système est irréductible, elle interdit toute compensation, par les pôles (resp. les zéros) du régulateur, des zéros (resp. des pôles) du système qui ne sont pas situés dans le domaine de stabilité et de performances \mathcal{D}_{sp} .

La condition \mathcal{IBM} est satisfaite si les fonctions sensibilité $\mathcal{T}(z^{-1})$ et $\mathcal{RS}(z^{-1})$ réalisent un filtrage passe-bas. Il suffit de remarquer que l'insensibilité aux bruits de mesure inéluctables est caractérisée par les fonctions de transfert $\mathcal{G}_{sb}(z^{-1})$ et $\mathcal{G}_{eb}(z^{-1})$ et d'appliquer le résultat 5.12. On notera que la fonction de sensibilité complémentaire d'un asservissement linéaire réalise naturellement un filtrage passe-bas.

La condition \mathcal{CPP} est satisfaite si la propriété suivante est vraie

$$\mathcal{CPP} \{ D(z^{-1}) \text{ divise } E(z^{-1})R_d(z^{-1}) \} \quad (6.35)$$

Une telle propriété est naturellement issue du résultat 5.13, qui est connue dans la littérature sous l'appellation de principe du modèle interne. Elle requiert que les pôles du générateur des perturbations qui ne sont pas des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ du système sont aussi des pôles du régulateur $\mathcal{R}(z^{-1})$, i.e. le polynôme $R_d(z^{-1})$ est particulièrement factorisé comme suit

$$R_d(z^{-1}) = S(z^{-1})D_r(z^{-1}) \quad \text{avec} \quad D_r(z^{-1}) = \frac{D(z^{-1})}{\text{pgcd}(E(z^{-1}), D(z^{-1}))} \quad (6.36)$$

Remarque 6.11 Si tous les pôles du générateur des perturbations $\mathcal{H}(z^{-1})$ sont aussi des zéros du système par rapport aux perturbations, on aura naturellement une compensation parfaite des perturbations par un régulateur admissible sans aucune condition sur la configuration de ses pôles puisque

$$\text{pgcd}(E(z^{-1}), D(z^{-1})) = D(z^{-1}) \implies D_r(z^{-1}) = 1$$

Si la configuration des pôles du générateur des perturbations et celle des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ du système sont disjointes, alors la compensation parfaite des perturbations requiert que tous les pôles du générateur des perturbations soient des pôles du régulateur

$$\text{pgcd}(E(z^{-1}), D(z^{-1})) = 1 \implies D_r(z^{-1}) = D(z^{-1})$$

La condition \mathcal{DSC} consiste à bloquer la propagation des composantes indésirables de la sortie sur la commande du système en supposant que leurs modèles générateurs sont connus : une spécification qui s'est avérée vitale pour préserver l'état de santé des actionneurs. Supposons que ces composantes indésirables sont décrites par

$$D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta(t) \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(D_{ind}(z^{-1}), A(z^{-1})) = 1 \quad (6.37)$$

Alors, cette condition est satisfaite par tout asservissement satisfaisant la condition \mathcal{RPD} et vérifiant la propriété suivante

$$\mathcal{DSC} \{ D_{ind}(z^{-1}) \text{ divise } R_n(z^{-1}) \} \quad (6.38)$$

Une telle propriété est naturellement issue du résultat 5.13 : elle requiert que les pôles du générateur de la composante indésirable soient des zéros du régulateur, i.e. le polynôme $R_n(z^{-1})$ est particulièrement factorisé comme suit

$$R_n(z^{-1}) = R(z^{-1})D_{ind}(z^{-1}) \quad (6.39)$$

Remarque 6.12 *La compensation parfaite des perturbations en sortie du système (resp. des composantes indésirables de la sortie en entrée du système) requiert d'assigner une partie des pôles (resp. des zéros) du régulateur comme l'indique l'expression (6.36) (resp. (6.39)). Il a été montré dans plusieurs études, motivées par l'affinement des performances nominales et de la robustesse en stabilité des systèmes de commande, qu'un assignement d'une partie des pôles d'un régulateur doit être accompagnée d'un assignement d'une partie de ses zéros même si la compensation des composantes indésirables de la sortie ne fait pas partie du cahier des charges. $R_n(z^{-1})$ est généralement factorisé comme suit*

$$R_n(z^{-1}) = R(z^{-1})D_c(z^{-1}) \text{ avec } D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si la DSC est requise} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

où $D_{apa}(z^{-1})$ est un paramètre de synthèse auxiliaire que l'on peut utiliser judicieusement pour affiner le modelage des fonctions de sensibilité usuelles du système de commande, e.g. $D_{apa}(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$.

La condition \mathcal{PA} est naturellement satisfaite si les conditions \mathcal{IBM} et \mathcal{CPP} sont satisfaites puisque $e_y(t) = y_p(t) + y_b(t)$. On distingue deux solutions selon la configuration des zéros du système qui est invariante par rétroaction.

- Une poursuite parfaite définie par

$$\mathcal{PP} \{ y_r(t) = y^*(t) \text{ pour tout } t$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{PP} \left\{ \mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{G}^*(z^{-1}) \iff \frac{B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \right.$$

Les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ du système sont nécessairement des modes du système asservi et doivent être situés dans le domaine de stabilité et de performances requis, i.e.

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})) \subset \mathcal{D}_{sp} \subset \mathcal{D}_{sa}$$

On notera que cette condition est beaucoup plus une exception qu'une règle dans la pratique comme l'indique la remarque (4.5). Par ailleurs, il est important de remarquer que l'erreur de poursuite en sortie est identique à l'erreur de poursuite dans le cas d'une poursuite parfaite.

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{G}^*(z^{-1}) \implies e_y(t) = e(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

- Une poursuite semi-parfaite définie par

$$\mathcal{PSP} \left\{ y_r(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t) \text{ pour tout } t \text{ avec } \beta = \frac{1}{B(1)} \right.$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{PSP} \left\{ \mathcal{DP}(z^{-1}) = \beta B(z^{-1})\mathcal{G}^*(z^{-1}) \iff T_r(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1}) \right.$$

Le scalaire β est essentiellement introduit pour réaliser la propriété élémentaire d'une dynamique de poursuite, en l'occurrence un gain statique unitaire, qui requiert que la fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ du système n'admette aucun zéro en un, i.e.

$$B(1) \neq 0$$

On notera que les erreurs de poursuite d'entré-sortie d'un système asservi réalisant une poursuite semi-parfaite sont respectivement données par

$$\mathcal{ERPS} \begin{cases} e_y(t) = y(t) - B(q^{-1})\beta y^*(t) \\ e_u(t) = u(t) - A(q^{-1})\beta y^*(t + d + 1) \end{cases}$$

La condition \mathcal{PM} requiert une compensation parfaite des composantes $\{e_c(t)\}$ et $\{e_p(t)\}$ de l'erreur de poursuite. L'essence d'une telle compensation peut être mieux apprécié si l'on réécrit le modèle de commande en substituant l'erreur de poursuite à la sortie du système, soit

$$\mathcal{MC} \begin{cases} A(q^{-1})e(t) = -B(q^{-1})u(t - d - 1) - E(q^{-1})v(t) + A(q^{-1})y^*(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{cases} \quad (6.40)$$

En effet, cette expression du modèle de commande permet d'interpréter la précision maximale comme un objectif de régulation de l'erreur de poursuite pourvu que la séquence de référence soit considérée comme une perturbation dont le modèle générateur est connu, soit

$$\mathcal{MGR} \begin{cases} A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \\ D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \end{cases} \quad (6.41)$$

où $\{\delta^*(t)\}$ est une impulsion d'amplitude u^* . En effet, le résultat 5.13 suggère de réaliser l'objectif \mathcal{PM} par un asservissement avec retour unitaire satisfaisant la propriété

$$\mathcal{PM} \left\{ D(z^{-1}) \text{ divise } E(z^{-1})R_d(z^{-1}) \text{ et } D^*(z^{-1}) \text{ divise } A(z^{-1})R_d(z^{-1}) \right. \quad (6.42)$$

Ainsi, on peut postuler naturellement que la précision maximale est réalisable par un asservissement avec retour unitaire satisfaisant la condition \mathcal{RPD} si et seulement si les pôles du générateur des perturbations qui ne sont pas des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ du système et les pôles du générateur de la séquence de points de consigne qui ne sont pas des pôles du système sont des pôles du régulateur, i.e. la structure d'un tel régulateur est particulièrement donnée par

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})D_r(z^{-1})} \quad (6.43)$$

avec

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm} \left(\frac{D^*(z^{-1})}{\text{pgcd}(A(z^{-1}), D^*(z^{-1}))}, \frac{D(z^{-1})}{\text{pgcd}(E(z^{-1}), D(z^{-1}))} \right) \quad (6.44)$$

Compte tenu de toutes les propriétés données ci-dessus, on distingue deux classes de régulateurs admissibles par rapport à l'ultime motivation d'un asservissement selon l'objectif de poursuite considéré

- Dans le cas d'une poursuite admissible, la classe des régulateurs admissibles est donnée par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases} \quad (6.45)$$

avec

$$P_c(z^{-1}) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sp} \quad (6.46)$$

$$D_r(z^{-1}) = \frac{D(z^{-1})}{\text{pgcd}(E(z^{-1}), D(z^{-1}))} \quad (6.47)$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si la DSC est requise} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.48)$$

$$T_r(z^{-1}) = \begin{cases} \beta P_c(z^{-1}) & \text{dans le cas d'une PSP} \\ \frac{P_c(z^{-1})}{B(z^{-1})} & \text{dans le cas d'une PP} \end{cases} \quad (6.49)$$

- Dans le cas d'une précision maximale, la classe des régulateurs admissibles est donnée par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) = R(q^{-1})D_c(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t)) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \\ D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \end{cases} \quad (6.50)$$

avec

$$P_c(z^{-1}) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sp} \quad (6.51)$$

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm} \left(\frac{D^*(z^{-1})}{\text{pgcd}(A(z^{-1}), D^*(z^{-1}))}, \frac{D(z^{-1})}{\text{pgcd}(E(z^{-1}), D(z^{-1}))} \right) \quad (6.52)$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si la DSC est requise} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.53)$$

où $D_{apa}(z^{-1})$ est un paramètre de synthèse que l'on peut utiliser pour réaliser un compromis admissible entre les performances nominales et la robustesse en stabilité, notamment

$$D_c(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \implies \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{T}(e^{j\omega T_e}) = 0 \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{RS}(e^{j\omega T_e}) = 0$$

Remarque 6.13 La structure de régulateur est obtenue à partir de la structure générale (6.4) modulo un assignement d'une partie de la configuration des pôles et des zéros du régulateur et un changement de notation particulièrement motivé par des considérations de conformité aux notations communément utilisées dans la littérature où la structure \mathcal{RST} s'est imposée par les récents acteurs de la régulation industrielle.

Remarque 6.14 Le cas $D(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ permet d'incorporer une action intégrale explicite dans le système de commande indépendamment de la méthode de sa synthèse. On assure ainsi une compensation des perturbations du type échelon. Cette propriété représente l'essence des performances de la commande \mathcal{PID} qui domine encore le marché de la régulation industrielle en dépit de sa grande sensibilité par rapport aux bruits de mesure.

Remarque 6.15 La précision maximale est une poursuite parfaite d'une séquence de référence spécifique modulo une configuration des pôles du régulateur élargie aux pôles du modèle générateur de la séquence de consigne en vertu du célèbre principe du modèle interne. La structure du régulateur est relativement complexe par rapport au cas d'une poursuite admissible dans le cas où la nature de la séquence de consigne est différente de celles des perturbations. Néanmoins, la précision maximale est satisfaite en dépit des erreurs de modélisation inéluctables tant que la stabilité du système asservi est préservée. Cette robustesse en performance n'est pas satisfaite dans le cas d'une poursuite admissible qui requiert une modélisation parfaite par rapport aux performances en régulation requises. On peut alors postuler que dans le cas usuel où les perturbations sont ramenées en entrée et en sortie et sont de même nature que la séquence de consigne, la précision maximale s'impose à la poursuite parfaite par son privilège de robustesse. Le problème 6.3 permet de mieux apprécier un tel privilège.

Le **table 9.2** précise la classe des régulateurs admissibles par rapport aux spécifications élémentaires d'un asservissement que l'on peut représenter comme l'indique la figure 6.16 en fonction du modèle du système et des modèles générateurs des perturbations et des séquences de référence et de consigne.

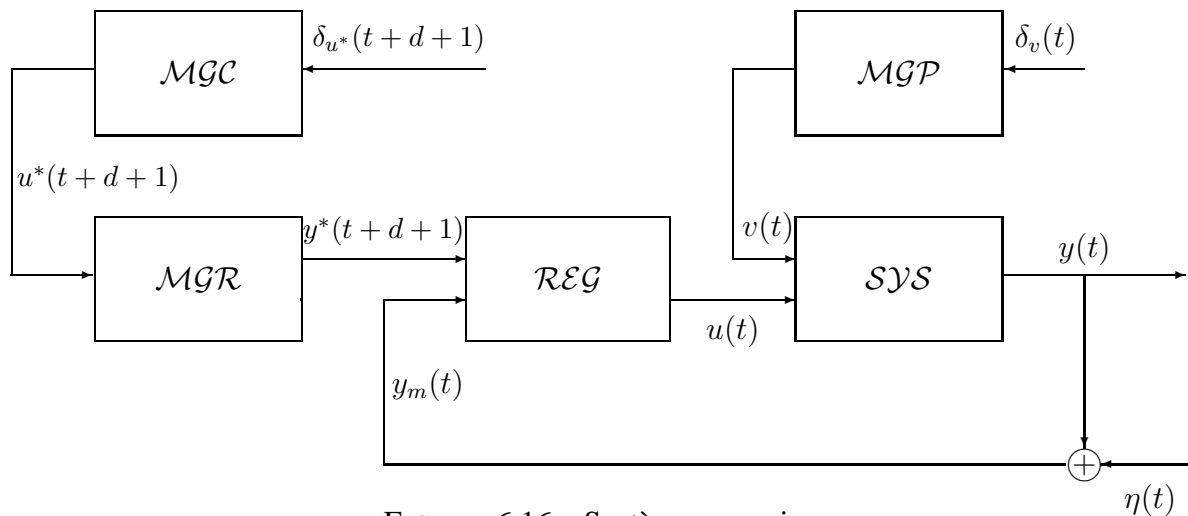


FIGURE 6.16 – Système asservi

ADP	Propriétés	Conditions requis	Structure du Régulateur
SPD	$\mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$	$P_c(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sp}[z^{-1}]$	
IBM	$\{y_b(t)\} \in \mathcal{SAZI}$ et $\{e_b(t)\} \in \mathcal{SAZI}$	$\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \in \mathcal{EFPB}$ et $\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \in \mathcal{EFPB}$	$D_c(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$
CPP	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) = 0$	$D(z^{-1})$ divise $E(z^{-1})R_d(z^{-1})$	$R_d(z^{-1}) = D_r(z^{-1})S(z^{-1})$ \uparrow $D_{rp}(z^{-1})$
DSC	$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0$	$D_{ind}(z^{-1})$ divise $R_n(z^{-1})$	$R_n(z^{-1}) = D_c(z^{-1})R(z^{-1})$ \uparrow $D_{ind}(z^{-1})$
\mathcal{PM}	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$	$D(z^{-1})$ divise $E(z^{-1})R_d(z^{-1})$ et $D^*(z^{-1})$ divise $A(z^{-1})R_d(z^{-1})$	$T_r(z^{-1}) = D_c(z^{-1})R(z^{-1})$ et $R_d(z^{-1}) = D_r(z^{-1})S(z^{-1})$ \uparrow $ppcm(D_{rp}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$
\mathcal{PP}	$\mathcal{G}_{sr}(z) = z^{-d-1}$	$\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$	$T_r(z^{-1}) = \frac{P_c(z^{-1})}{B(z^{-1})}$
\mathcal{PSP}	$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \beta z^{-d-1}B(z^{-1})$	$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS})$	$T_r(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1})$

$$D_{rp}(z^{-1}) = \frac{D(z^{-1})}{pgcd(D(z^{-1}), B(z^{-1}))} \text{ et } D_{rc}(z^{-1}) = \frac{D^*(z^{-1})}{pgcd(D^*(z^{-1}), A(z^{-1}))}$$

TABLE 6.1 – Propriétés fondamentales d'un asservissement

6.4 Robustesse en stabilité

La robustesse en stabilité d'un système asservi est étroitement liée à son aptitude à préserver sa stabilité en présence des erreurs de modélisation inévitables. On distingue deux résultats fondamentaux pour étudier la robustesse en stabilité, en l'occurrence le célèbre critère de Nyquist et le théorème des petits gains. Le critère de Nyquist est une ingénieuse application du principe de l'argument que nous rappelons ci-dessous.

Résultat 6.1 Soient \mathcal{C} un contour simple fermé parcouru dans le sens trigonométrique et F une application complexe analytique à l'intérieur et sur le contour \mathcal{C} , sauf éventuellement en un nombre fini de pôles de $F(z)$ à l'intérieur de \mathcal{C} , et qui ne s'annule pas sur le contour \mathcal{C} . Alors la relation suivante est satisfaite.

$$N_{t/o}^{F(\mathcal{C})} = N_z^i - N_p^i$$

où $N_{t/o}^{F(\mathcal{C})}$ désigne le nombre de tours, comptés dans le sens trigonométrique, autour de l'origine de l'image par la fonction F du contour \mathcal{C} , soit la courbe $F(\mathcal{C})$, N_z^i et N_p^i sont respectivement les nombres de zéros et de pôles de $F(z)$ à l'intérieur du contour \mathcal{C} , en comptant leurs multiplicités.

6.4.1 Critère de Nyquist

Le système à rétroaction de la figure 6.17 est semblable au système asservi du point de vue de l'analyse de la stabilité puisque la séquence de référence et les perturbations qui n'ont aucune influence sur la propriété de stabilité.

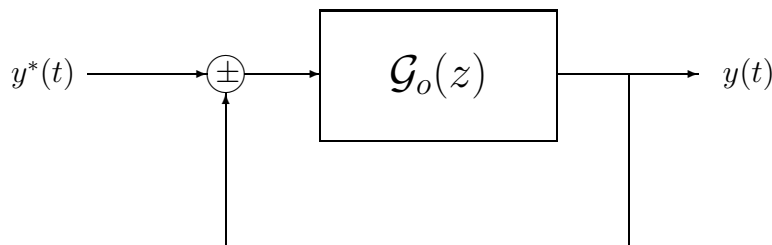


FIGURE 6.17 – Système à rétroaction

Le critère de Nyquist a été principalement développé pour l'analyse de la stabilité des systèmes à rétroaction de la figure 6.17 à partir du lieu Nyquist de leur fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(z)$ qui n'est autre que l'image par la fonction complexe \mathcal{G}_o du contour de Nyquist \mathcal{C}_n , soit $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$. Le contour de Nyquist \mathcal{C}_n est un contour parcouru dans le sens trigonométrique et formé par le cercle de centre l'origine et de rayon unité éventuellement modifié pour éviter, arbitrairement par l'extérieur, les pôles de la fonction de transfert $\mathcal{G}_o(z)$ qui se trouvent sur le cercle unité par des demi-cercles de rayon infiniment petit centré en ces pôles.

Le résultat suivant représente l'essence du critère de Nyquist qui permet d'analyser la stabilité du système à rétroaction de la figure 6.17 à partir du lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$ et du nombre de ses pôles à l'extérieur du domaine de stabilité \mathcal{D}_{sa} .

Résultat 6.2 Le système à rétroaction de la figure 6.17 est stable si et seulement si l'image du contour de Nyquist par l'application $\mathcal{G}_o : z \rightarrow \mathcal{G}_o(z)$ entoure le point critique $(-1, j0)$

dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles, en comptant leurs multiplicités, de $\mathcal{G}_o(z)$ à l'extérieur du cercle unité.

Preuve. Considérons la fonction complexe définie par la différence de retour

$$\mathcal{D}_r : z \in \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_r(z) \in \mathcal{C}$$

et le contour de Nyquist \mathcal{C}_n . On notera que $\mathcal{D}_r(z)$ n'admet aucun pôle sur le contour de Nyquist par construction et ne doit pas s'y annuler dans la mesure où le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(z)$ ne doit pas passer par le point critique $(-1, j0)$, que les pôles des fonctions de transfert $\mathcal{G}_o(z)$ et $\mathcal{D}_r(z)$ sont identiques et que le système à rétroaction est stable si et seulement si les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{D}_r(z)$ sont situés dans le domaine de stabilité. Les applications complexes $\mathcal{G}_o : z \longrightarrow \mathcal{G}_o(z)$ et $\mathcal{D}_r : z \longrightarrow \mathcal{D}_r(z)$ sont alors analytiques sur le contour de Nyquist et à l'intérieur de ce contour sauf éventuellement en un nombre fini de pôles. Le résultat 6.1 permet alors de conclure que la variation de l'argument de $\mathcal{D}_r(z)$ le long du contour de Nyquist \mathcal{C}_n est donnée par

$$\Delta_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{D}_r(z)) = 2\pi (N_z^i - N_p^i)$$

où N_z^i et N_p^i désignent respectivement le nombre de zéros et de pôles, en comptant leurs multiplicités, de $\mathcal{D}_r(z)$ à l'intérieur du contour de Nyquist. Comme les nombres de pôles et de zéros de $\mathcal{D}_r(z)$ sont égaux, on aura

$$\Delta_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{D}_r(z)) = 2\pi (N_p^e - N_z^e)$$

où N_z^e et N_p^e désignent respectivement le nombre de zéros et de pôles, en comptant leurs multiplicités, de $\mathcal{D}_r(z)$ à l'extérieur du contour de Nyquist. Les zéros de $\mathcal{D}_r(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité si et seulement si $N_z^e = 0$, soit

$$\Delta_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{D}_r(z)) = 2\pi N_p^e$$

Par ailleurs, il suffit de remarquer que lorsque z parcourt le contour de Nyquist, l'argument de $\mathcal{D}_r(z)$ varie de 2π et donc l'image du contour de Nyquist par \mathcal{D}_r ($\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$) entoure une fois l'origine dans le sens trigonométrique. La condition

$$\Delta_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{D}_r(z)) = 2\pi N_p^e$$

est satisfaite si et seulement si la courbe $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$ entoure l'origine dans le sens trigonométrique N_p^e fois. Le critère de Nyquist se déduit alors du fait que le nombre de tours de la courbe $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$ autour de l'origine est égal au nombre de tours du lieu de Nyquist $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$ autour du point critique $(-1, j0)$.

CQFD.

Les remarques suivantes précisent la généralité du critère de Nyquist tout en mettant en évidence sa simplicité.

Remarque 6.16 *Comme la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(z)$ est propre et à coefficient réels, le lieu de Nyquist $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$ peut être facilement obtenu à partir du diagramme de Nyquist de $\mathcal{G}_o(z)$. On peut ainsi analyser la stabilité d'un système avec rétroaction à partir de l'information contenue dans sa fonction de transfert harmonique en boucle ouverte.*

Remarque 6.17 *Le théorème de Nyquist ne peut être appliqué lorsque $\mathcal{D}_r(z)$ s'annule sur le contour de Nyquist. Cette situation signifie que l'équation $\mathcal{G}_o(z) = -1$ possède une ou plusieurs solutions sur le contour de Nyquist et par conséquent la courbe $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$ doit passer par le point critique $(-1, j0)$. Le système avec rétroaction n'est donc pas stable au sens EBSB car il admet des pôles sur le cercle unité.*

Si la transformation $\mathcal{G}_o : z \rightarrow \mathcal{G}_o(z)$ est conforme sur le contour de Nyquist, soit

$$\mathcal{G}_o \text{ est analytique sur } \mathcal{C}_n \text{ et } \frac{d}{dz}(\mathcal{G}_o(z)) \neq 0 \text{ pour tout } z \in \mathcal{C}_n,$$

alors elle préserve les angles et les orientations. Une telle propriété conduit à la règle du revers qui n'est autre qu'une version simplifiée du critère de Nyquist.

Résultat 6.3 *Supposons que la transformation \mathcal{G}_o est conforme sur le contour de Nyquist, alors le système à rétroaction de la figure 6.17 est stable si et seulement si lorsqu'on parcourt le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte sous-jacente, dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique $(-1, j0)$ à gauche.*

Remarque 6.18 *La propriété de conformité requise n'est manifestement pas vérifiée dans le cas général et plus particulièrement dans le cas où les fonctions de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(z)$ admettent des pôles et des zéros à l'extérieur du domaine de stabilité. On notera néanmoins que le critère du revers est utilisé dans la plupart des études de stabilité des systèmes de commande marginalement stables en boucle ouverte. Ces derniers sont beaucoup plus une règle qu'une exception dans le contexte de régulation industrielle.*

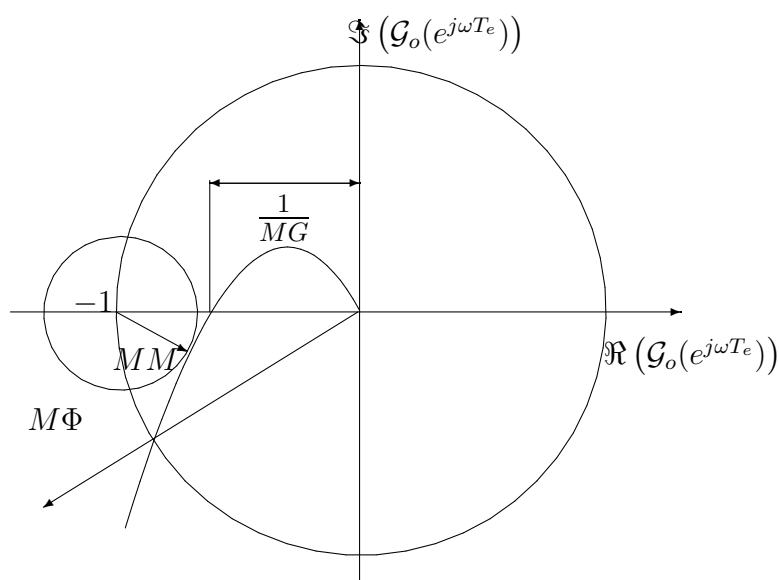


FIGURE 6.18 – Marges de stabilité

L'importance du critère de Nyquist réside dans le fait qu'il fournit des marges de stabilité intrinsèques du système avec rétroaction, en l'occurrence certaines distances du point critique $(-1, j0)$ au diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte comme l'indique la figure 6.18. On distingue

- **La marge de gain MG** qui est le facteur par lequel le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte peut être multiplié pour atteindre la limite de la stabilité. Elle est alors égale à l'inverse du gain de la fonction de transfert harmonique en boucle ouverte du système à la pulsation critique ω_c correspondant à un déphasage de π , soit

$$MG = \frac{1}{|\mathcal{G}_o(e^{j\omega_c T_e})|} \text{ avec } \text{Arg}(\mathcal{G}_o(e^{j\omega_c T_e})) = \pi$$

La marge de gain est généralement exprimée en dB et doit être telle que $MG \in [4dB, 6dB]$ conformément aux règles d'une bonne pratique de la régulation industrielle.

Lorsque le diagramme de \mathcal{N} quist de la fonction de transfert en boucle ouverte croise l'axe réel à plusieurs pulsations ω_{ci} pour $i \in [1, n]$ caractérisées par un déphasage de $(2i + 1)\pi$ pour $i \in [1, n]$ et des gains critiques $|\mathcal{G}_o(e^{-j\omega_{ci} T_e})|$, la marge de gain est définie par l'intervalle $[MG_{min}, MG_{max}]$ avec

$$MG_{max} = \min_{i \in [0, n]} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{G}_o(e^{j\omega_{ci} T_e})|} \text{ avec } |\mathcal{G}_o(e^{j\omega_{ci} T_e})| < 1 \right\}$$

et

$$MG_{min} = \max_{i \in [1, n]} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{G}_o(e^{j\omega_{ci} T_e})|} \text{ avec } |\mathcal{G}_o(e^{j\omega_{ci} T_e})| > 1 \right\}$$

- **La marge de phase $M\Phi$** qui est la perte de phase mesurée sur le cercle unité qui amène à la limite de la stabilité. C'est donc la phase qu'il faut ajouter au déphasage de la fonction de transfert harmonique en boucle ouverte du système avec rétroaction pour obtenir un déphasage total de π à la pulsation de croisement ω_x pour laquelle le gain du système en boucle ouverte est unitaire, soit

$$M\Phi = \text{Arg}(\mathcal{G}_o(e^{j\omega_x T_e})) - \pi \text{ avec } |\mathcal{G}_o(e^{j\omega_x T_e})| = 1$$

La marge de phase est souvent mesurée en degrés et doit être telle que $M\Phi \in [30^\circ, 60^\circ]$ conformément aux règles d'une bonne pratique de la régulation industrielle.

Lorsque le diagramme de \mathcal{N} quist de la fonction de transfert en boucle ouverte croise le cercle unité à plusieurs pulsations de croisement ω_{xi} pour $i \in [1, n]$ caractérisées par des marges de phase $M\Phi_i$ pour $i \in [1, n]$, la marge de phase du système avec rétroaction est donnée par

$$M\Phi = \min_{i \in [1, n]} \{M\Phi_i\}$$

- **La marge de retard MR** qui est le retard que l'on peut ajouter au modèle de commande pour atteindre la limite de la stabilité. C'est le rapport de la marge de phase à la pulsation de croisement ω_x pour laquelle elle a été calculée, soit

$$MR = \frac{M\Phi}{\omega_x}$$

Lorsque le diagramme de \mathcal{N} quist de la fonction de transfert en boucle ouverte croise le cercle unité à plusieurs pulsations de croisement ω_{xi} pour $i \in [1, n]$ caractérisées par des marges de retard MR_i pour $i \in [1, n]$, la marge de retard du système avec rétroaction est donnée par

$$MR = \min_{i \in [1, n]} MR_i$$

- **La marge de module MM** qui est le rayon du cercle centré en le point critique $(-1, j0)$ et tangent au diagramme de \mathcal{N} quist de la fonction de transfert en boucle ouverte du système avec rétroaction, soit

$$MM = \min_{\omega \in [0, \omega_n]} |1 + \mathcal{G}_o(e^{j\omega T_e})| \quad \text{ou} \quad \frac{1}{MM} = \max_{\omega \in [0, \omega_n]} |\mathcal{S}(e^{j\omega T_e})|$$

où $\mathcal{S}(z)$ désigne la fonction de sensibilité du système avec rétroaction. Notons qu'une bonne marge de gain, respectivement une bonne marge de phase, ne suffit pas à assurer une distance raisonnable entre le point critique $(-1, j0)$ et le diagramme de \mathcal{N} quist de la fonction de transfert en boucle ouverte. La marge du module est une mesure globale d'une telle distance et peut être interprétée comme une marge de gain et de phase puisque

$$MG \geq \frac{1}{1 - MM} \quad \text{et} \quad M\Phi \geq 2 \arcsin \frac{MM}{2}$$

La bonne pratique de la régulation industrielle suggère une marge du module dans l'intervalle $[-8dB, -6dB]$.

Ces aspects montrent l'intérêt du critère \mathcal{N} quist pour l'analyse et la synthèses des systèmes asservis.

6.4.2 Théorème des petits gains

L'aptitude des systèmes de commande à préserver leur stabilité en présence des erreurs de modélisation est illustrée à travers le théorème des petits gains qui est communément utilisé dans les études de robustesse des systèmes linéaires asservis ([9]), [23]).

Résultat 6.4 *Le système avec rétroaction de la figure 6.19 est stable pour toute fonction de transfert $\Delta(z)$ propre, stable et telle que*

$$|\Delta(e^{j\omega T_e})| \leq \gamma \quad \text{pour tout } \omega T_e \in [-\pi, +\pi]$$

si et seulement la fonction de transfert $\Sigma(z)$ est propre, stable et telle que

$$|\Sigma(e^{j\omega T_e})| < \frac{1}{\gamma} \quad \text{pour tout } \omega T_e \in [-\pi, +\pi]$$

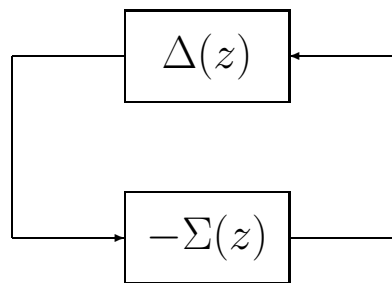


FIGURE 6.19 – Système de contre-réaction usuel

Le concept de robustesse en stabilité peut être étudié en supposant que le comportement entrée-sortie du système est décrit par un modèle de commande nominal $\mathcal{G}(z)$ et ses incertitudes $\Delta(z)$.

Ces erreurs de modélisation sont dites non-structurées par opposition aux erreurs de modélisation structurées qui portent sur les paramètres du modèle de commande ([6], [23]). Notons que la séquence de référence comme les perturbations de charge et les bruits de mesure ont été occultées dans la mesure où ils n'ont aucune influence sur les conditions de stabilité et de sa robustesse.

La représentation des incertitudes du modèle de commande peut revêtir plusieurs formes comme l'indiquent les figures 6.20 à 6.25 qui représentent les systèmes de commande correspondants. On distingue les formes additives directe et inverse, les formes multiplicatives directes et inverses à l'entrée et à la sortie du système à commander. Le choix d'une forme ou d'une autre dépend de la connaissance du système et des propriétés du système de commande que l'on souhaite mettre en évidence. Les formes additives sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur toute la bande de fréquences. Les formes multiplicatives directes sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur les actionneurs et les capteurs, alors que les formes multiplicatives inverses sont généralement utilisées pour représenter les variations des paramètres du modèle de commande.

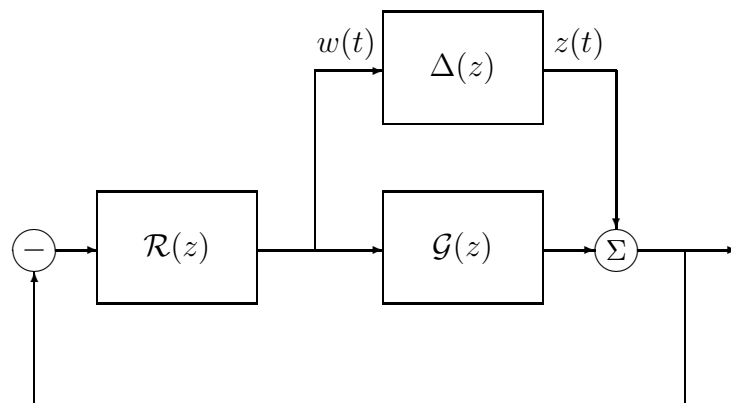


FIGURE 6.20 – Système de commande : forme additive directe

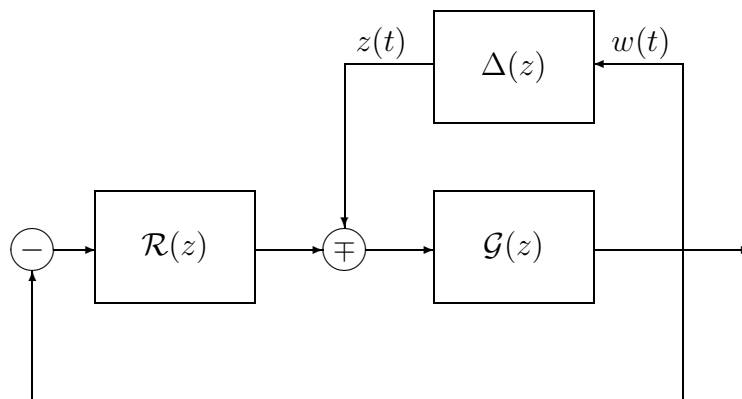


FIGURE 6.21 – Système de commande : forme additive inverse

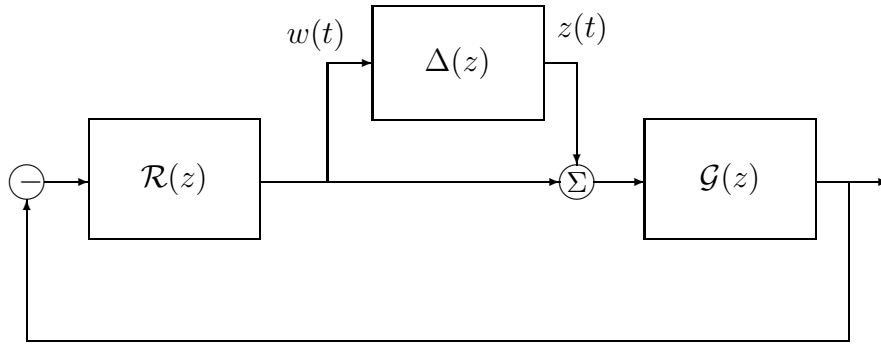


FIGURE 6.22 – Système de commande : forme multiplicative directe en entrée

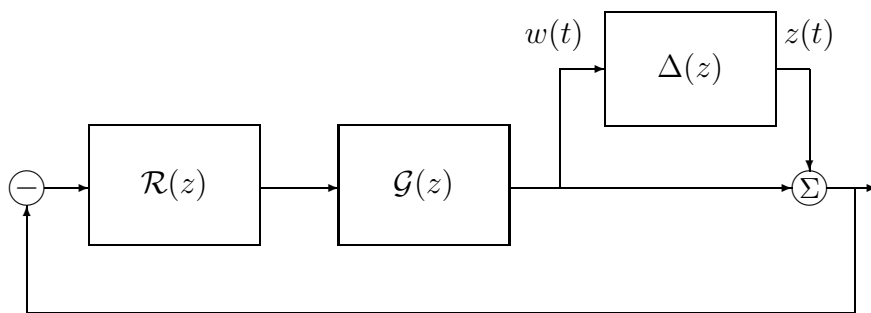


FIGURE 6.23 – Système de commande : forme multiplicative directe en sortie

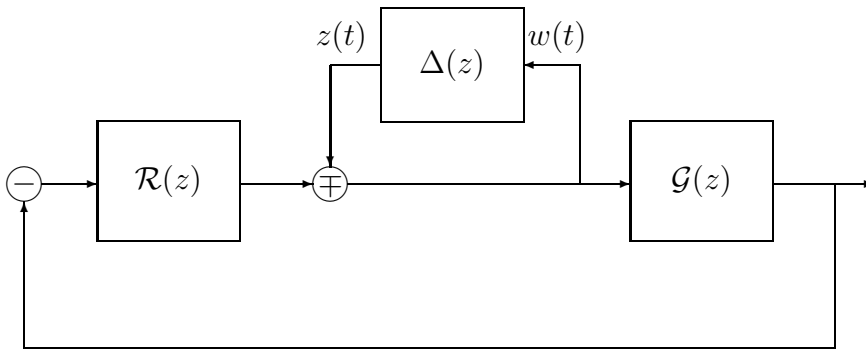


FIGURE 6.24 – Système de commande : forme multiplicative inverse en entrée

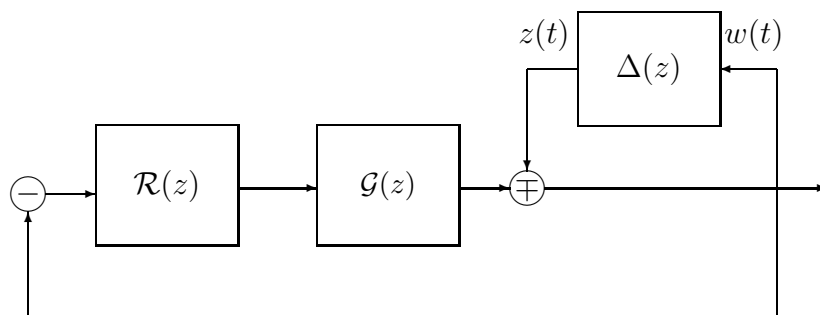


FIGURE 6.25 – Système de commande : forme multiplicative inverse en sortie

On montre facilement que tous les systèmes de commande considérés peuvent se mettre sous la forme standard de la figure 6.19 où $\Sigma(z)$ désigne la fonction de transfert qui relie la sortie du bloc d'incertitude $\{s(t)\}$ à son entrée $\{e(t)\}$. Les fonctions de transfert $\Sigma(z)$ peuvent être déterminées après quelques simples manipulations algébriques comme suit

- Pour la forme additive directe (figure 6.20), le système est décrit par

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{G}(z) + \Delta(z)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} E(z) &= -\mathcal{R}(z) (\mathcal{G}(z)E(z) + S(z)) \\ &= -\frac{1}{1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{G}(z)} \mathcal{R}(z) S(z) \\ &= -\mathcal{S}(z)\mathcal{R}(z) S(z) \end{aligned}$$

- Pour la forme additive inverse (figure 6.21), le système est décrit par

$$\frac{1}{\mathcal{P}(z)} = \frac{1}{\mathcal{G}(z)} + \Delta(z) \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}(z) = \frac{1}{1 + \mathcal{G}(z)\Delta(z)} \mathcal{G}(z)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} E(z) &= \mathcal{G}(z) (-\mathcal{R}(z)E(z) - S(z)) \\ &= -\frac{1}{1 + \mathcal{G}(z)\mathcal{R}(z)} \mathcal{G}(z)S(z) \\ &= -\mathcal{S}(z)\mathcal{G}(z) S(z) \end{aligned}$$

- Pour les formes multiplicatives directes à l'entrée et la sortie (figures 6.22 et 6.23), le système est décrit par

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{G}(z) (1 + \Delta(z)) \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}(z) = (1 + \Delta(z)) \mathcal{G}(z)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} E(z) &= -\mathcal{R}(z)\mathcal{G}(z) (E(z) + S(z)) \\ &= -\frac{\mathcal{R}(z)\mathcal{G}(z)}{1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{G}(z)} S(z) \\ &= -\mathcal{T}(z) S(z) \end{aligned}$$

- Pour les formes multiplicatives inverses à l'entrée et à la sortie (figures 6.24 et 6.25), le système est décrit par

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{G}(z) \frac{1}{1 + \Delta(z)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}(z) = \frac{1}{1 + \Delta(z)} \mathcal{G}(z)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} E(z) &= -S(z) - \mathcal{R}(z)\mathcal{G}(z)E(z) \\ &= -\frac{1}{1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{G}(z)} S(z) \\ &= -\mathcal{S}(z) S(z) \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(z)$ désigne la fonction de transfert du système et $E(z)$ et $S(z)$ sont respectivement les transformées en z de l'entrée $\{e(t)\}$ et la sortie $\{s(t)\}$ du bloc d'incertitude.

La table 6.2 donne la fonction de transfert $\Sigma(z)$ pour chaque forme d'incertitude. Les conditions de robustesse en stabilité peuvent alors être obtenues à partir du théorème des petits gains sous la forme du résultat 6.4. Ce résultat précise la classe des erreurs de modélisation admissibles en supposant que les incertitudes du modèle de commande $\Delta(z)$ sont des fonctions de transfert propres et stables et fournit la valeur maximale admissible sur leur module.

Forme d'incertitude	Fonction de sensibilité $\Sigma(z)$
Forme additive directe	$-\mathcal{R}\mathcal{S}(z)$
Forme additive inverse	$-\mathcal{G}\mathcal{S}(z)$
Forme multiplicative directe	$-\mathcal{T}(z)$
Forme multiplicative inverse	$-\mathcal{S}(z)$

TABLE 6.2 – Quantificateurs de robustesse en stabilité

Remarque 6.19 *L'hypothèse de stabilité peut être relâchée si l'on utilise le théorème de Nyquist au lieu du théorème des petits gains ([23], [9]). La condition de stabilité devient une condition d'égalité entre les pôles instables du système et ceux du modèle nominal.*

6.5 Modelage des fonctions de sensibilité

Les fonctions de sensibilité usuelles représentent aussi bien des quantificateurs de performances nominales que des mesures de robustesse en stabilité. On utilise généralement une procédure itérative qui consiste à repenser la spécification des paramètres de synthèse tant que les formes des fonctions de sensibilité usuelles ne sont pas jugées satisfaisantes. Néanmoins, on ne peut pas réaliser un modelage arbitraire des fonctions de sensibilité à cause des propriétés structurelles du système et des diverses contraintes intégrales et algébriques sur les fonctions de sensibilité. Ces contraintes dépendent particulièrement de la configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande. Une analyse compréhensive de ce problème a été faite dans [14] et [20]. On distingue plus particulièrement les deux contraintes suivantes.

- **Contrainte algébrique usuelle sur les fonctions de sensibilité.** *Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire vérifient la propriété remarquable*

$$\mathcal{S}(z^{-1}) + \mathcal{T}(z^{-1}) = 1 \text{ pour tout } z \in \mathcal{C}$$

Les performances d'un système de commande ne peuvent être réalisées conjointement pour toutes les fréquences. Comme les bruits de mesure sont plutôt dominants pour les hautes fréquences et que les effets des perturbations de charge sont particulièrement cruciaux pour les basses fréquences, il est naturel de chercher à réduire le gain de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(z^{-1})$ (resp. la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(z^{-1})$) en basses fréquences (resp. en hautes fréquences). Par ailleurs, on montre aisément que les conditions de performances nominales et de stabilité robuste données par les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire peuvent être exprimées en des conditions sur le gain en boucle ouverte du système de commande pourvu que ce dernier soit relativement

grand aux basses fréquences et suffisamment faibles aux hautes fréquences, soit

$$|\mathcal{G}(e^{-j\omega T})||\mathcal{R}(e^{-j\omega T})| < W_S(\omega) \text{ pour tout } \omega \leq \omega_b$$

et

$$|\mathcal{G}(e^{-j\omega T})||\mathcal{R}(e^{-j\omega T})| < W_T(\omega) \text{ pour tout } \omega \leq \omega_h$$

où $W_S(\omega)$ et $W_T(\omega)$ dépendent des pondérations considérées. Ces conditions définissent un gabarit fréquentiel sur la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande qui est connu sous l'appellation "open loop gain shaping" dans la littérature anglophone.

- **Contrainte intégrale sur la fonction de sensibilité.** *Considérons un système de commande asymptotiquement stable et supposons que sa fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(z^{-1})$ a un degré relatif $n_r \geq 1$. Alors on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(|\mathcal{S}(e^{-j\omega T_e})|) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(|\mathcal{S}(e^{-j\omega T_e})|) d\omega = \sum_{i=1}^{n_p} p_i$$

où $\{p_i\}_{i \in [1, n_p]}$ désigne les pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Ce résultat permet de mettre en évidence le principe de conservation de la fonction de sensibilité d'un système de commande et précise sa relation avec les pôles instables de sa fonction de transfert en boucle ouverte. On notera plus particulièrement que la valeur exacte de l'intégrale n'est pas importante en elle-même. Cependant le fait qu'elle soit positive signifie que si la fonction de sensibilité admet une bande d'atténuation, alors elle doit admettre une bande d'amplification. C'est ce que les automaticiens qualifient de **principe de conservation de la sensibilité**. Il apparaît clairement que plus la somme des pôles instables est grande, plus la compensation entre les zones d'atténuation et d'amplification des perturbations est difficile à réaliser sur une bande de fréquences finie comme c'est le cas pour les systèmes échantillonnés.

Les gabarits fréquentiels typiques des fonctions de sensibilité usuelles du système de commande consistent en des gains suffisamment faibles aux basses fréquences où les perturbations de charge sont dominantes et aux hautes fréquences où les bruits de mesure sont prépondérants. *Un compromis doit être alors recherché pour réaliser ces performances sur des bandes de fréquences différentes à travers une pondération fréquentielle adéquate.*

6.6 Commande avec modèle interne

La commande avec modèle interne s'est principalement imposée à la régulation industrielle par sa simplicité et sa robustesse qui ont été particulièrement mises en évidence d'une manière compréhensive dans [15]. Le principe de la commande avec modèle interne est très simple comme le montre la figure 6.26. On distingue un modèle de commande en parallèle avec le système pour estimer les imperfections de modélisation sous-jacentes et une rétroaction appropriée utilisant un filtre de robustification pour les atténuer. Un modèle de commande représentant au mieux le comportement entrée-sortie du système peut être aisément élaboré sous la bénédiction du potentiel disponible en matière de l'identification des systèmes, en l'occurrence des approches de

modélisation expérimentales éprouvées. Quant au filtre de robustification, il est spécifié convenablement en fonction des spécifications requises, notamment les performances dynamiques, l'insensibilité aux bruits de mesure inéluctables et la robustesse en stabilité qui est impérative pour pallier le problème des erreurs de modélisation inéluctables.

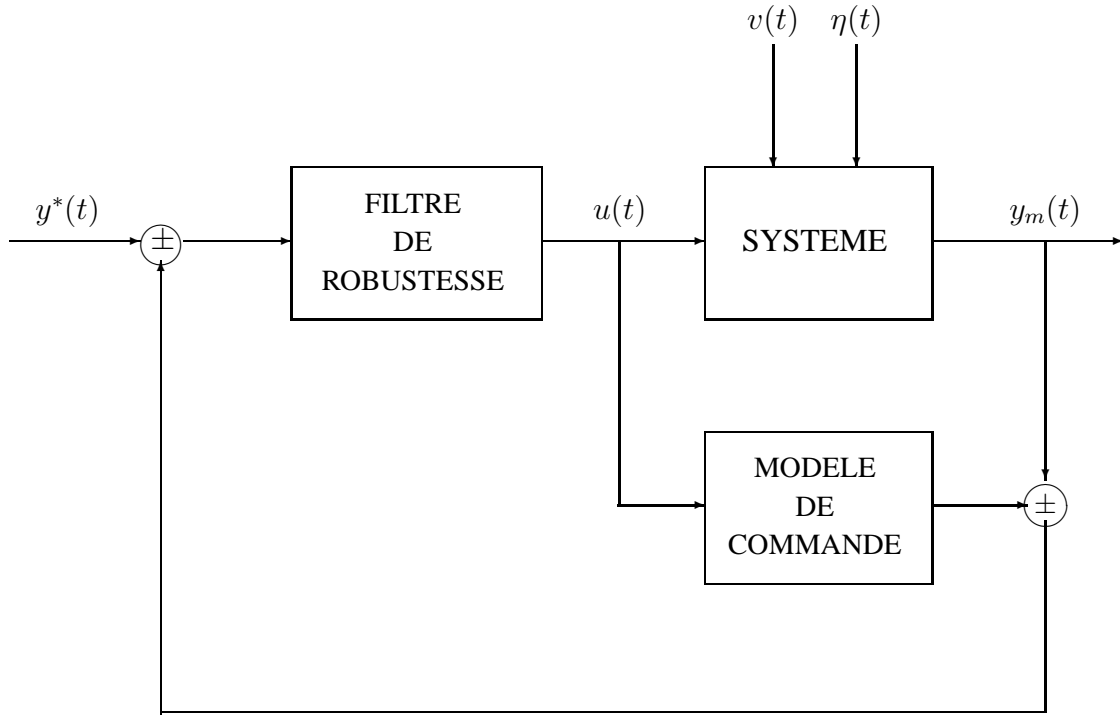


FIGURE 6.26 – Commande avec modèle interne

Supposons que le système est parfaitement décrit par les fonctions de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ et $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ et que le filtre de robustification est décrit par la fonction de transfert $\mathcal{F}(z^{-1})$. Ces fonctions de transfert sont respectivement données par

$$\left(\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \mathcal{G}_p(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right) \text{ et } \mathcal{F}(z^{-1}) = \frac{F_n(z^{-1})}{F_d(z^{-1})}$$

Alors, la loi de commande avec modèle interne peut être facilement obtenue à partir du diagramme fonctionnel du système de commande correspondant, soit

$$CMI \{ (1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1}))U(z) = \mathcal{F}(z^{-1})(Y^*(z) - Y_m(z))$$

Il s'agit d'un régulateur avec retour unitaire dont la fonction de transfert est donnée par

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{\mathcal{F}(z^{-1})}{1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})} \quad (6.54)$$

et que l'on peut récrire sous la forme usuelle

$$\mathcal{CMI} \{ R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_n(q^{-1})y^*(t) \quad (6.55)$$

avec

$$R_d(q^{-1}) = A(q^{-1})F_d(q^{-1}) - q^{-d-1}B(q^{-1})F_n(q^{-1}) \quad (6.56)$$

$$R_n(q^{-1}) = A(q^{-1})F_n(q^{-1}) \quad (6.57)$$

Compte tenu des résultats fondamentaux des systèmes asservis présentés tout au long de ce chapitre, on peut en déduire naturellement les aspects fondamentaux suivants des systèmes de commande avec modèle interne.

- Le polynôme caractéristique du système de commande avec modèle interne est donné par

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})A(z^{-1})F_d(z^{-1})$$

Les systèmes de commande sont donc stables si et seulement si le système et le filtre de robustification sous-jacent sont stables. Ainsi, la commande avec modèle interne n'est admissible que pour les systèmes dont les pôles sont situés dans le domaine de stabilité et de performances et requiert une spécification adéquate du filtre de robustification, notamment des pôles situés dans le domaine de stabilité et de performances.

- La dynamique de poursuite d'un système de commande avec modèle interne est donnée par la fonction de transfert

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}^*(z^{-1})$$

Et comme le modèle générateur de la séquence de référence a un gain statique unitaire, i.e. $\mathcal{G}^*(1) = 1$, on aura une dynamique de poursuite de gain statique unitaire pourvu que le gain statique du filtre de robustification soit inversement proportionnel à celui du modèle de commande, soit $\mathcal{F}(1)\mathcal{G}(1) = 1$. Par ailleurs, elle peut être réduite en choisissant judicieusement le filtre de robustification, notamment

$$F_n(z^{-1}) = A(z^{-1})H(z^{-1}) \text{ et } F_d(z^{-1}) = B_{sp}(z^{-1})F(z^{-1})$$

avec

$$B(z^{-1}) = B_{sp}(z^{-1})B_{\overline{sp}}(z^{-1})$$

où $B_{sp}(z^{-1})$ (resp. $B_{\overline{sp}}(z^{-1})$) comprend tous les zéros situés dans le domaine de stabilité et de performances (resp. tous les zéros situés à l'extérieur du domaine de stabilité et de performances) et la paire polynomiale ($H(z^{-1})$, $F(z^{-1})$) est spécifiée conformément aux propriétés de robustesse requises.

- La dynamique de régulation d'un système de commande avec modèle interne est caractérisée par la fonction de transfert

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{A(z^{-1})A(z^{-1})F_d(z^{-1})}$$

Comme le filtre de robustification est spécifié de manière à réaliser une dynamique de poursuite de gain statique unitaire, on a

$$\mathcal{F}(1)\mathcal{G}(1) = 1 \iff F_d(1)A(1) - F_n(1)B(1) = 0$$

Et compte tenu de l'expression du polynôme $R_d(z^{-1})$, on en déduit naturellement que le régulateur admet une action intégrale implicite puisque

$$\mathcal{F}(1)\mathcal{G}(1) = 1 \iff F_d(1)A(1) - F_n(1)B(1) = 0 \iff R_d(1) = 0$$

On peut ainsi postuler que les perturbations du type échelon sont parfaitement compensées par les systèmes de commande avec modèle interne.

- Les fonctions de sensibilité usuelles nominales des systèmes de commande avec modèle interne sont données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = 1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1})$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) = \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1})$$

$$\mathcal{GS}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1}) (1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1}))$$

$$\mathcal{RS}(z^{-1}) = \mathcal{F}(z^{-1})$$

Il apparaît clairement que le modelage de la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{RS}(z^{-1})$ est naturellement réalisé par un choix judicieux du filtre de robustification, on peut postuler que les systèmes de commande avec modèle interne sont insensibles aux bruits de mesure pourvu que le filtre de robustification soit du type passe-bas.

6.7 Conclusion

Une classe relativement générale de systèmes de commande a été étudiée pour mieux apprécier les propriétés fondamentales des asservissements, en l'occurrence la stabilité nominale, les performances nominales et la robustesse en stabilité. Les performances nominales ont été définies aussi bien dans le domaine temporel à partir des erreurs de poursuite, que dans le domaine fréquentiel à partir des dynamiques de poursuite et de régulation. L'importance des fonctions de sensibilité usuelles pour quantifier conjointement les performances nominales ainsi que la robustesse en stabilité a été particulièrement mise en exergue.

Une attention particulière a été accordée à la caractérisation de la classe des régulateurs admissible par rapport à l'ultime motivation d'un asservissement. Les problèmes d'insensibilité aux bruits de mesure inéluctables, de compensation parfaite des perturbations et de dépollution du signal de commande ont été traités d'une manière rigoureuse qui a permis de préciser la structure des régulateurs admissibles. Les concepts de poursuite admissible, e.g. une poursuite parfaite ou semi-parfaite, et de précision maximale, i.e. une poursuite parfaite d'une séquence de référence spécifique, ont été définis tout en précisant les conditions requises pour leur réalisation. On retrouve les conditions usuelles sur les zéros du système dans le cas d'une poursuite admissible et la réalisation naturelle d'une précision maximale avec un asservissement avec retour unitaire dans le cas d'une séquence de points de consigne dont le modèle générateur est connu. Les limitations des performances intrinsèques à la configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande ont été particulièrement soulignées à partir d'un ensemble de résultats fondamentaux. Ces derniers révèlent que l'on ne peut pas modéliser arbitrairement les performances d'un système de commande. Les résultats fondamentaux qui ont été obtenus ont permis de mettre en exergue les limitations intrinsèques aux systèmes de commande avec modèle interne qui sont particulièrement chéries par les artisans du Génie des Procédés.

Qui oserait infirmer qu'un automaticien est un ingénieur gestionnaire des compromis entre les performances et la robustesse ?

6.8 Problèmes

Problème 6.1 *Considérons la classe des systèmes décrits par le modèle de commande standard donné par les équations (6.21) et supposons que les modèles des perturbations sont connus, soit*

$$\mathcal{MGP} \begin{cases} v_e(t) = \frac{C_e(q^{-1})}{D_e(q^{-1})} \delta_{v_e}(t) \\ v_s(t) = \frac{C_s(q^{-1})}{D_s(q^{-1})} \delta_{v_s}(t) \end{cases}$$

Montrer que la compensation parfaite des perturbations de charges est réalisée si les pôles du générateur des perturbations en entrée (resp. en sortie) qui ne sont pas des zéros du système (resp. des pôles du système) sont des pôles du régulateur, soit

$$R_d(z^{-1}) = S(z^{-1})D(z^{-1})$$

avec

$$D(z^{-1}) = \text{ppcm} \left(\frac{D_s(z^{-1})}{\text{pgcd}(D_s(z^{-1}), A(z^{-1}))}, \frac{D_e(z^{-1})}{\text{pgcd}(D_e(z^{-1}), B(z^{-1}))} \right)$$

Problème 6.2 *Considérons la classe des systèmes décrits par le modèle de commande standard donné par les équations (6.23). Montrer que l'équation d'erreur du système de commande dans le cas d'un régulateur avec retour unitaire est donnée par*

$$e(t) = \mathcal{S}(q^{-1})(y^*(t) - v_s(t)) + \mathcal{T}(q^{-1})\eta_s(t) - \mathcal{GS}(q^{-1})(v_e(t) + \eta_e(t))$$

et en déduire la structure du régulateur réalisant une précision maximale pour une classe de séquences de points de consigne décrite par par le modèle (6.41).

Problème 6.3 On se propose d'étudier les problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes asservis échantillonnés que l'on peut représenter comme le montre la figure 9.3 où $\{v_e(t)\}$ et $\{v_s(t)\}$ désignent respectivement les perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système en entrée et en sortie.

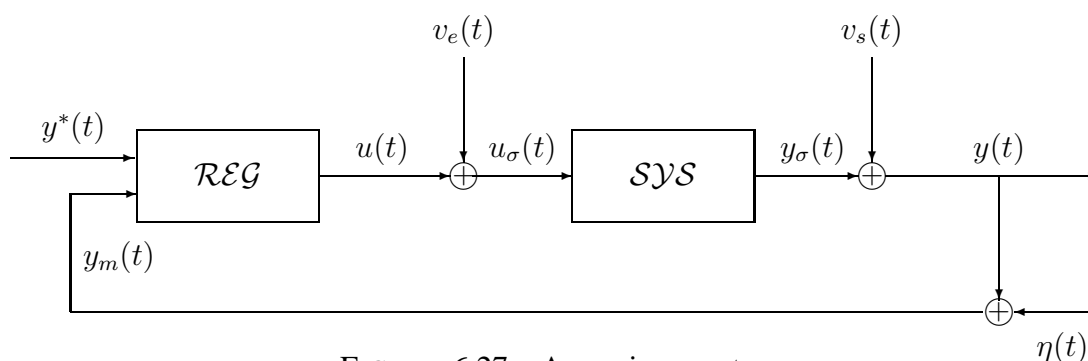


FIGURE 6.27 – Asservissement

Cette étude sera effectuée dans un contexte particulier des asservissements échantillonnés à partir d'un ensemble d'hypothèses communément rencontrées dans les problèmes de régulation industrielle ; en l'occurrence

$\mathcal{H}1$. Le système est parfaitement décrit par sa fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \text{ avec } B(1) \neq 0$$

$\mathcal{H}2$. Les perturbations de charge aussi bien en entrée qu'en sortie sont du type échelon.

$\mathcal{H}3$. Le bruit de mesure est caractérisé par une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies.

$\mathcal{H}4$. Le régulateur est décrit par

$$\text{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) = R_n(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t)) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \end{cases}$$

où $\mathcal{G}^*(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$ est la fonction de transfert du modèle générateur de la séquence de référence à partir d'une séquence de référence des points de consigne $\{u^*(t)\}$ du type échelon.

Pour ce faire, on suggère de procéder d'une manière progressive en tenant compte des hypothèses $\mathcal{H}1 \rightarrow \mathcal{H}4$.

- 1) Donner les polynômes caractéristiques $M_{con}(s)$ et $M_{ech}(z^{-1})$ correspondants à un mode Mode (ξ, ω) , dans les plans complexes en s et en z , respectivement.

- 2) Préciser comment choisir la période d'échantillonnage et comment définir le domaine de spécification des performances sous-jacent dans le plan complexe en z . Est-il nécessaire de prévoir un filtre anti-recouvrement ? Et si oui, comment le spécifier ?
- 3) Préciser les configurations des pôles et des zéros du système \mathcal{SYS} et justifier pourquoi les polynômes $B(z^{-1})$ et $D(z^{-1})$ sont premiers entre eux.
- 4) Montrer que les équations entrée-sortie du système asservi sont respectivement données par les équations

$$\mathcal{SAS} \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) y^*(t) + \mathcal{G}_{spe}(q^{-1}) v_e(t) + \mathcal{G}_{sps}(q^{-1}) v_s(t) + \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) \eta(t) \\ u_\sigma(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1}) y^*(t) + \mathcal{G}_{epe}(q^{-1}) v_e(t) + \mathcal{G}_{eps}(q^{-1}) v_s(t) + \mathcal{G}_{eb}(q^{-1}) \eta(t) \end{cases}$$

où les $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$ pour $(i, j) \in [s, e] \times [r, pe, ps, b]$ désignent les différentes fonctions de transfert du système asservi dont on précisera les expressions.

- 5) Etudier la stabilité du système asservi et préciser la classe des régulateurs réalisant les performances dynamiques requises.
- 6) Donner les dynamiques de poursuite et de régulation du système asservi et préciser les invariants par rétroaction.
- 7) Préciser les propriétés requises pour réaliser insensibilité aux bruits de mesure inévitables, une compensation parfaite des perturbations, un blocage en entrée des composantes indésirables en sortie dont le modèle générateur est donné par les équations (6.37) et une précision maximal pour la classe des séquences de référence décrite par les équations (6.41).
- 8) Proposer un régulateur permettant de réaliser un asservissement insensible au bruit de mesure dont la dynamique de régulation (rep. de poursuite) est caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et une pulsation propre ω_r (resp. ω_p).

Problème 6.4 On se propose d'effectuer une analyse du système de commande prédictive de Smith donné par la figure 6.28 dans le cas des systèmes stables soumis à des perturbations du type échelon décrit par les équations aux différences suivantes

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + A(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = v\delta(t) \end{cases}$$

avec $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$. Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit en tenant compte du fait que

$$\frac{1 - q^{-d-1}}{1 - q^{-1}} = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-d}$$

tout en remarquant que les mesures sont supposées être infiniment précises : une utopie sans aucune incidence une synthèse soucieuse de l'insensibilité aux bruits de mesure.

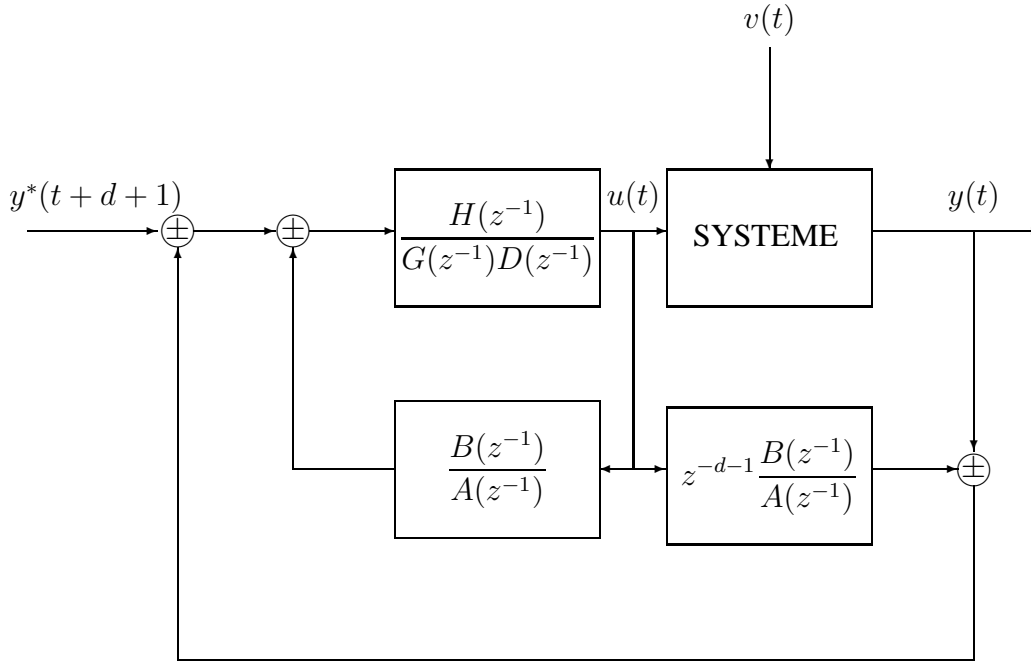


FIGURE 6.28 – Système de commande prédictive de Smith

- 1) Montrer que le système asservi peut être représenté comme l'indique la figure 6.29. On précisera l'équation de la variable $\hat{y}(t + d + 1/t)$ et on la comparera à la sortie du système à l'instant $t + d + 1$. Expliquer alors l'essence de ce système de commande et en déduire que sa stabilité requiert que

le compensateur $\frac{H(z^{-1})}{G(z^{-1})D(z^{-1})}$ stabilise le système sans retard $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$

soit

$$CNS \left\{ P(z^{-1}) \triangleq A(z^{-1})G(z^{-1})D(z^{-1}) + B(z^{-1})H(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sa}[z^{-1}] \right.$$

- 2) Montrer que la loi de commande sous-jacente peut se mettre sous la forme usuelle

$$\mathcal{REG} \left\{ R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \right.$$

avec

$$R_d(q^{-1}) = (A(q^{-1})G(q^{-1}) + B(q^{-1})E(q^{-1})H(q^{-1})) D(q^{-1})$$

$$R_n(q^{-1}) = T_r(q^{-1}) = A(q^{-1})H(q^{-1})$$

$$E(q^{-1}) = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-d}$$

En déduire le polynôme caractéristique du système de commande et justifier la nature de la classe des systèmes considérée et la condition requise sur le compensateur.

- 3) Donner les équations du système de commande et en déduire ses dynamiques de poursuite et de régulation. On précisera la classe des perturbations qui sont parfaitement compensées.

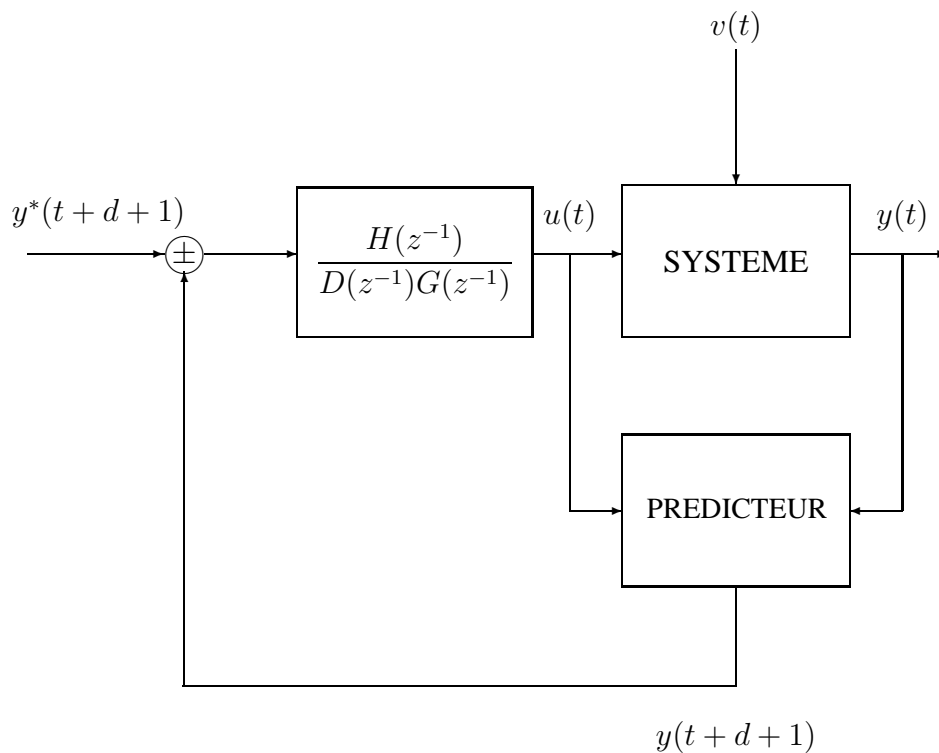


FIGURE 6.29 – Système de commande prédictive équivalent

Chapitre 7

Commande modale

La synthèse modale d'un asservissement est effectuée à partir d'un modèle de commande du système et des performances requises du système asservi sous-jacent. Rappelons que le modèle de commande est une bonne approximation du comportement dynamique du système et son environnement que l'on peut décrire par les équations

$$\mathcal{MC} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{cases} \quad (7.1)$$

où les séquences $\{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$ désignent les perturbations qui affectent le fonctionnement du système et les bruits de mesure inéluçables.

Quant aux performances requises, on distingue quatre spécifications remarquables dans le cas d'une synthèse modale.

- S1. Une compensation parfaite des perturbations (resp. une précision maximale) avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω_r .
- S2. Une poursuite admissible caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω_p .
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inéluçables.
- S4. Un blocage en entrée des composantes indésirables sur la sortie caractérisées par leurs modèles générateurs, e.g.

$$D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta(t)$$

Remarque 7.1 *La faisabilité d'un problème d'asservissement requiert que la dynamique de régulation soit relativement rapide par rapport à la dynamique de poursuite, soit $\omega_r > \omega_p$. Par ailleurs, un mode d'amortissement ζ et de fréquence propre ω est complètement défini dans le contexte des systèmes échantillonnés, avec une période d'échantillonnage T_e , par le polynôme caractéristique*

$$M(z^{-1}) = 1 - 2e^{-\zeta\omega T_e} \cos\left(\sqrt{(1-\zeta^2)}\omega T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta\omega T_e} z^{-2}$$

A la lumière des résultats fondamentaux du chapitre 6 sur la stabilité et les performances des systèmes asservis, on peut postuler naturellement que la classe des régulateurs qui permettent de réaliser les spécifications $\mathcal{S}1$ à $\mathcal{S}4$ est donnée par

$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Rappelons que cette structure de régulateur est obtenue à partir de la structure générale des régulateurs admissibles (6.45)-(6.49) et (6.50)-(6.53). $D_r(z^{-1})$ (resp. $D_c(z^{-1})$) est un polynôme qui permet d'assigner une partie des pôles (resp. des zéros) du régulateur pour le doter d'une capacité de compensation parfaite des perturbation (resp. de blocage en entrée des composantes indésirables de la sortie du système). Par ailleurs, $D_c(z^{-1})$ peut être considéré comme un paramètre de synthèse que l'on peut utiliser pour affiner le modelage des fonctions de sensibilité usuelles, i.e.

$$D_c(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \implies \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{T}(e^{j\omega T_e}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{RS}(e^{j\omega T_e}) = 0$$

Les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ sont déterminés en fonction des performances requises en régulation alors que le polynôme $T(z^{-1})$ est judicieusement choisi en fonction des performances requises en poursuite.

On se propose dans ce chapitre de présenter d'une manière concise de la synthèse modale qui se distingue par sa simplicité. Cette synthèse est utilisée pour traiter les trois cas de poursuite présentés au chapitre 6 et mettre en évidence les limitations intrinsèques à la commande PID et la commande avec modèle interne qui sont principalement utilisées en régulation industrielle. Elle est fondamentalement basée sur la résolution d'une équation polynomiale à la lumière du résultat suivant

Résultat 7.1 Soient $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ des polynômes de degrés respectifs $n_{\bar{a}}$ et $n_{\bar{b}}$ et $\bar{C}(z^{-1})$ un polynôme arbitraire de degré $n_{\bar{c}}$ tels que

$$C1. \quad \text{pgcd}(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1})) = 1$$

$$C2. \quad n_{\bar{c}} \leq n_{\bar{a}} + n_{\bar{b}} - 1$$

Alors, l'équation polynomiale

$$\mathcal{EQP} \{ \bar{A}(z^{-1})X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})Y(z^{-1}) = \bar{C}(z^{-1}) \}$$

admet une solution unique pourvu que les degrés des polynômes $X(z^{-1})$ et $Y(z^{-1})$ soient spécifiés comme suit

$$n_x = n_{\bar{b}} - 1 \quad \text{et} \quad n_y = n_{\bar{a}} - 1$$

La preuve de ce résultat est un bon exercice d'introduction au domaine de synthèse modale. Les remarques suivantes permettent de le faire sereinement

Remarque 7.2 La solution unique de l'équation polynomiale \mathcal{EQP} n'est autre que celle du système d'équations linéaires sous-jacent, soit

$$A \mathcal{X} = \mathcal{B}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \bar{a}_o & & & \bar{b}_o & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \bar{a}_o & \vdots & & \bar{b}_o \\ \bar{a}_{n\bar{a}} & & \vdots & \bar{b}_{n\bar{b}} & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \bar{a}_{n\bar{a}} & & & \bar{b}_{n\bar{b}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n\bar{b}-1} \\ y_o \\ \vdots \\ y_{n\bar{a}-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{c}_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{c}_{n\bar{a}+n\bar{b}-1} \end{bmatrix}$$

où A désigne la matrice de Sylvester associée à la paire polynomiale $(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1}))$ et $\bar{c}_i = 0$ pour tout $i \geq n\bar{c}$.

Remarque 7.3 Une équation polynomiale admet une infinité de solutions si aucune contrainte n'est imposée sur la structure de la solution recherchée. On peut vérifier que si $(X(z^{-1}), Y(z^{-1}))$ est une solution, alors $(X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})W(z^{-1}), Y(z^{-1}) - \bar{A}(z^{-1})W(z^{-1}))$ est une solution pour tout polynôme arbitraire $W(z^{-1})$.

7.1 Synthèse modale

La synthèse modale consiste à assigner aux modes du système asservi des valeurs situées dans le domaine de stabilité et de performances \mathcal{D}_{sp} défini à partir des performances dynamiques requises. Les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ sont alors déterminés à partir de la résolution de l'équation polynomiale suivante sous la contrainte $\mathcal{S3}$.

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})\bar{M}(z^{-1}) \quad (7.3)$$

avec

$$M(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{nm} (1 - \mu_i z^{-1}) \quad \text{et} \quad \bar{M}(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{n\bar{m}} (1 - \bar{\mu}_i z^{-1}) \quad (7.4)$$

où les $\mu_i \in \mathcal{D}_{sp}$ pour $i \in [1, nm]$ désignent les modes du système asservi que l'on peut assigner à des valeurs arbitraires du domaine de stabilité et de performance et sont spécifiés conformément aux performances requises en régulation et les $\bar{\mu}_i \in \mathcal{D}_{sp}$ pour $i \in [1, n\bar{m}]$ sont les modes spécifiques à la nature des performances requises en poursuite, en l'occurrence $\bar{M}(z^{-1}) = B(z^{-1})$ (resp. $\bar{M}(z^{-1}) = 1$) dans le cas d'une \mathcal{PP} (resp. une \mathcal{PSP} ou une \mathcal{PM}) comme le montrent les développements consacrés à la caractérisation de la classe des régulateurs admissibles du paragraphe 6.3.4. Compte tenu du résultat 7.1, la synthèse modale est possible pourvu que les conditions suivantes soient vraies

$$\mathcal{H1}. \text{pgcd}(A(z^{-1})D_r(z^{-1}), B(z^{-1})D_c(z^{-1})) = 1$$

et

$$\mathcal{H2}. nm + n\bar{m} \leq na + nd_r + nb + nd_c + d$$

Remarque 7.4 Dans le contexte considéré des systèmes asservis, l'hypothèse $\mathcal{H}1$ peut être ré-
duite comme suit

$$\mathcal{H}1. \text{pgcd}(B(z^{-1}), D_r(z^{-1})) = 1$$

puisque $\text{pgcd}(A(z^{-1}), B(z^{-1})) = \text{pgcd}(D_r(z^{-1}), D_c(z^{-1})) = \text{pgcd}(A(z^{-1}), D_c(z^{-1})) = 1$.
En effet, les polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ sont premiers entre eux puisqu'ils constituent la
fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ du système. Et comme les perturbations et les composantes in-
désirables de la sortie ne sont pas de même nature, les polynômes $D_r(z^{-1})$ et $D_c(z^{-1})$ soient
premiers entre eux. Par ailleurs, compte tenu de la structure d'un régulateur réalisant une dé-
pollution du signal de commande (6.39), Les polynômes $A(z^{-1})$ et $D_c(z^{-1})$ sont premiers entre
eux.

Quant au polynôme $T_r(z^{-1})$, il est judicieusement déterminé en fonction des performances en
poursuite à partir de la configuration des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ du système
et du type de séquence de points de consigne. On distingue trois cas de poursuite. Le premier
cas relève d'une poursuite parfaite dont la propriété sous-jacente peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{PP} \{P_c(z^{-1}) = B(z^{-1}) T_r(z^{-1}) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}\}$$

On retrouve la problématique de synthèse modale avec $M(z^{-1}) = T_r(z^{-1})$ et $\bar{M}(z^{-1}) =$
 $B(z^{-1})$. Le polynôme $T_r(z^{-1})$ est alors déterminé à partir des modes du système asservi que
l'on peut arbitrairement assigner comme suit

$$T_r(z^{-1}) = M(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{nm} (1 - \mu_i z^{-1}) \text{ avec } \mu_i \in \mathcal{D}_{sp}$$

Et comme les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ du système sont des modes spécifiques
du système asservi, il faut qu'ils soient situés dans le domaine de stabilité et de performance.
Ceci justifie l'hypothèse supplémentaire

$$\mathcal{H}3. \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})) \in \mathcal{D}_{sp}$$

Le deuxième cas concerne la poursuite semi-parfaite dont la propriété sous-jacente peut se ré-
crire comme suit

$$\mathcal{PSP} \{P_c(z^{-1}) = B(1) T_r(z^{-1}) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}\}$$

On retrouve la problématique de synthèse modale avec $M(z^{-1}) = B(1) T_r(z^{-1})$ et $\bar{M}(z^{-1}) =$
 1 . Et si $B(1) \neq 0$, alors le polynôme $T_r(z^{-1})$ peut être déterminé à partir des modes du système
asservi que l'on peut arbitrairement assigner comme suit

$$T_r(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1}) \text{ avec } \beta = \frac{1}{B(1)}$$

Une hypothèse supplémentaire est alors nécessaire pour la synthèse

$$\mathcal{H}3. \mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) \text{ n'admet aucun zéro en un}$$

Le troisième cas concerne la précision maximale réalisée avec une commande avec retour unitaire incorporant une compensation parfaite de la séquence de référence sans aucune hypothèse sur les zéros du système hormis les hypothèses intrinsèques à la stabilité. On aura alors

$$T_r(z^{-1}) = z^{-d-1} R(z^{-1}) D_c(z^{-1})$$

La compensation parfaite de la séquence de référence requiert une connaissance du modèle générateur de la séquence de points de consigne. Ce qui justifie l'hypothèse complémentaire

$$\mathcal{H3}. D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta(t)$$

La synthèse modale d'un asservissement peut être alors effectuée progressivement en plusieurs étapes en utilisant à la lumière de la synthèse concise qui a été faite en guise d'introduction.

- La première étape concerne la spécification de la période d'échantillonnage à partir de la dynamique de régulation requise conformément au théorème de Shannon, soit $\omega_r T_e < \pi$. La condition suivante s'est avérée judicieuse dans la pratique des systèmes échantillonnés.

$$\omega_r T_e \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4} \right]$$

- La deuxième étape consiste en la définition du domaine de stabilité et de performances à partir des performances requises en régulation comme suit

$$\mathcal{D}_{sp} = \left\{ z \in \mathcal{C} / \left\{ \begin{array}{l} \text{Im}(z) = 0 \\ \text{Re}(z) \in [e^{-\gamma\omega_r T_e}, e^{-\omega_r T_e}] \text{ avec } \gamma > 1 \end{array} \right. \right\}$$

- La troisième étape est consacrée à la détermination des polynômes $D_r(z^{-1})$ et $D_c(z^{-1})$, soit

$$D_r(z^{-1}) = \begin{cases} \frac{D(z^{-1})}{\text{pgcd}(D(z^{-1}), E(z^{-1}))} & \text{si } \mathcal{PA} \\ \text{ppcm} \left(\frac{D(z^{-1})}{\text{pgcd}(D(z^{-1}), E(z^{-1}))}, \frac{D^*(z^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(z^{-1}), A(z^{-1}))} \right) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

et

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si la DSC est requise} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

On notera que $D_{apa}(z^{-1})$ est un paramètre de synthèse auxiliaire que l'on peut utiliser judicieusement pour affiner le modelage des fonctions de sensibilité usuelles du système de commande.

- La quatrième étape est à la détermination des polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ à partir de l'équation polynomiale \mathcal{SM} sous la contrainte $\mathcal{S3}$. Le polynôme des modes est spécifié comme suit

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1}) M_a(z^{-1})$$

avec

$$M_d(z^{-1}) = 1 - 2e^{-\omega_r T_e} z^{-1} + e^{-2\omega_r T_e} z^{-2}$$

$$M_a(z) = \prod_{i=1}^{nm-2} (1 - e^{-\gamma_i \omega_r T_e} z^{-1}) \quad \text{avec } \gamma_i > 1 \text{ pour } i \in [1, nm - 2]$$

$M_d(z^{-1})$ et $M_a(z^{-1})$ désignent respectivement le polynôme des modes dominants et le polynôme des modes auxiliaires. Les modes dominants sont spécifiés à partir de la dynamique de régulation requise. Les modes auxiliaires sont relativement rapides par rapport aux modes dominants; ils permettent d'affiner les performances du système asservi via un modelage approprié des fonctions de sensibilité usuelles.

- La cinquième étape relève de la spécification du générateur de la séquence de référence à partir de la dynamique de poursuite requise, soit

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} (1 - e^{-\omega_p T_e})^2}{1 - 2e^{-\omega_p T_e} z^{-1} + e^{-2\omega_p T_e} z^{-2}}$$

- La sixième étape est réservée à la détermination du polynôme $T_r(z^{-1})$ en fonction de la nature de la poursuite admissible, soit

$$T_r(z^{-1}) = \begin{cases} M(z^{-1}) & \text{dans le cas d'une } \mathcal{PP} \\ \beta M(z^{-1}) & \text{dans le cas d'une } \mathcal{PSP} \\ z^{-d-1} R(q^{-1}) D_c(z^{-1}) & \text{dans le cas d'une } \mathcal{PM} \end{cases}$$

Comme on peut assigner arbitrairement tous les modes du système asservi dans le cas d'une poursuite semi parfaite ou d'une précision maximale, la détermination du régulateur est directe. On détermine d'abord les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ en résolvant l'équation polynomiale (7.3) sous les hypothèses $\mathcal{H}1$ et $\mathcal{H}2$ avec $\bar{M}(z^{-1}) = 1$, soit

$$A(z^{-1}) D_r(z^{-1}) S(z^{-1}) + z^{-d-1} B(z^{-1}) D_c(z^{-1}) R(z^{-1}) = M(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{nm} (1 - \mu_i z^{-1})$$

Ensuite, on élabore le polynôme $T_r(z^{-1})$ en fonction de la nature de la poursuite, soit

$$T_r(z^{-1}) = \begin{cases} \beta M(z^{-1}) \text{ avec } \beta = \frac{1}{B(1)} & \text{dans le cas d'une } \mathcal{PSP} \\ z^{-d-1} R(z^{-1}) D_c(z^{-1}) & \text{dans le cas d'une } \mathcal{PM} \end{cases}$$

Dans le cas d'une poursuite parfaite, on ne peut pas assigner arbitrairement tous les modes du système asservi. La détermination des polynômes $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T_r(z^{-1})$ est faite en résolvant l'équation polynomiale (7.3) sous les hypothèses $\mathcal{H}1$ et $\mathcal{H}2$ avec $M(z^{-1}) = T_r(z^{-1})$ et $\bar{M}(z^{-1}) = B(z^{-1})$, soit

$$A(z^{-1}) D_r(z^{-1}) S(z^{-1}) + z^{-d-1} B(z^{-1}) D_c(z^{-1}) R(z^{-1}) = B(z^{-1}) T_r(z^{-1}) \quad (7.5)$$

Cette équation requiert que $B(z^{-1})$ soit un diviseur de $S(z^{-1})$ compte tenu de $\mathcal{H}1$, soit $S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1})$ et que $T_r(z^{-1})$ soit constitué à partir des modes arbitraires du système asservi. Cette remarque pertinente suggère de déterminer le régulateur comme suit

$$T_r(z^{-1}) = M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1}) \quad (7.6)$$

$$S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1}) \quad (7.7)$$

et

$$\mathcal{EPP} \{A(z^{-1})D_r(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})\} \quad (7.8)$$

où $M_d(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sp}[z^{-1}]$ et $M_a(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sp}[z^{-1}]$ ne sont autres que les polynômes des modes dominants et des modes auxiliaires définis au paragraphe précédent. Une telle synthèse est possible pourvu que les hypothèses suivantes soient vraies

$$\mathcal{H}1. \text{ pgcd}(A(z^{-1})D_r(z^{-1}), D_c(z^{-1})) = 1$$

$$\mathcal{H}2. nm \leq na + nd_r + d + nd_c$$

et

$$\mathcal{H}3. \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})) \in \mathcal{D}_{sp}$$

Les hypothèses $\mathcal{H}1$ et $\mathcal{H}2$ s'imposent par la résolution de l'équation polynomiale (7.8), alors que l'hypothèse $\mathcal{H}3$ résulte du fait que les zéros du système sont des modes d'un système asservi réalisant une poursuite parfaite.

Remarque 7.5 Dans le cas où la partie fixe du régulateur ne concerne que la configuration de ses pôles, i.e. $D_c(z^{-1}) = 1$, la condition $\mathcal{H}1$ est naturellement satisfaite et les polynômes $G(z^{-1})$ et $R(z^{-1})$ ne sont autres que le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $P(z^{-1})$ par le polynôme $A(z^{-1})D_r(z^{-1})$, soit

$$\frac{P(z^{-1})}{A(z^{-1})D_r(z^{-1})} = G(z^{-1}) + z^{-d-1} \frac{R(z^{-1})}{A(z^{-1})D_r(z^{-1})}$$

Remarque 7.6 Les performances en sortie des systèmes de commande réalisant une poursuite admissible sont décrits par

$$y(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) + \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) + \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) = 0$$

Le comportement de l'erreur de poursuite en sortie est donc donnée par celui de la séquence de référence filtrée par la dynamique de poursuite modulo les effets du bruit de mesure caractérisés par le processus stochastique $\{\mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)\}$ de moyenne nulle et de variance finie, soit

$$\mathcal{E}\{e_y(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E}\{(e_y(t))^2\} = \sigma_r^2$$

Et compte tenu que l'erreur de poursuite en sortie est égale à l'erreur de poursuite dans le cas d'une poursuite parfaite puisque $\mathcal{DP}(z^{-1}) = 1 \forall z \in \mathcal{C}$, on peut en déduire que la sortie du système est égale à la séquence de référence modulo les effets du bruit de mesure. On peut alors spécifier d'une manière indépendante les performances requises en poursuite et en régulation à partir de $\mathcal{G}^*(z)$ et $M(z)$.

On notera que l'appellation de poursuite parfaite est motivée par le fait que la sortie du système est identiquement égale à la séquence de référence dans le cas idéal où le bruit de mesure est identiquement nul. Une telle propriété est l'essence de l'appellation commande avec modèle de référence, où le modèle de référence n'est autre que le générateur de la séquence de référence $\mathcal{G}^*(z)$.

Exemple 1. On se propose de concevoir un régulateur réalisant une poursuite admissible avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode double en 0.8 pour les systèmes décrits par le modèle de commande

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = \frac{z^{-2}(1 + 0.7z^{-1})}{1 + z^{-2}}, \quad \mathcal{G}_p(z^{-1}) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + z^{-2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(z^{-1}) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Compte tenu de la dynamique de régulation, on peut définir le domaine de stabilité et de performance comme suit

$$\mathcal{D}_{sp} = \{z \in \mathcal{C} / |z| \leq 0.8\}$$

Et comme $\mathcal{CZ}(\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})) = \{-0.7\} \in \mathcal{D}_{sp}$, on peut envisager une poursuite parfaite. Par ailleurs, compte tenu des modèles $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ et $\mathcal{H}(z^{-1})$, on peut en déduire que $D_r(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$. Et comme les spécifications $\mathcal{S3}$ et $\mathcal{S4}$ ne figurent pas dans les performances requises, on n'aura aucune contrainte de synthèse et $D_c(q^{-1}) = 1$.

Les performances requises sont réalisées par un système asservi utilisant un régulateur (7.2) où les polynômes $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T_r(z^{-1})$ sont déterminés en résolvant l'équation polynomiale

$$(1 + z^{-2})(1 - z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-2}(1 + 0.7z^{-1})R(z^{-1}) = (1 + 0.7z^{-1})T(z^{-1})$$

et le modèle générateur de la séquence de référence est donné par

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{0.01}{(1 - 0.9z^{-1})^2}$$

Les polynômes $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T_r(z^{-1})$ peuvent être alors déterminés comme suit

$$T_r(z^{-1}) = (1 - 0.8z^{-1})^2$$

$$S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1}) = (1 + 0.7z^{-1})(g_0 + g_1z^{-1})$$

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2}$$

où les polynômes $G(z^{-1})$ et $R(z^{-1})$ sont la solution de l'équation polynomiale

$$(1 + z^{-2})(1 - z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-2}R(z^{-1}) = (1 - 0.8z^{-1})^2$$

soit

$$(1 + z^{-2})(1 - z^{-1})(g_o + g_1z^{-1}) + z^{-2}(r_o + r_1z^{-1} + r_2z^{-2}) = (1 - 0.7z^{-1})^2$$

ou d'une manière équivalente le système d'équations compatible

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_o \\ g_1 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.4 \\ 0.49 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2. On se propose de concevoir un régulateur réalisant une poursuite admissible avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode multiple en 0.7 pour les systèmes décrits par le modèle de commande

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = \frac{z^{-1}(1 + 2z^{-1})}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}, \quad \mathcal{G}_p(z^{-1}) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Compte tenu de la dynamique de régulation, on peut définir le domaine de stabilité et de performance comme suit

$$\mathcal{D}_{sp} = \{z \in \mathcal{C} / |z| \leq 0.7\}$$

Comme $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ admet un seul zéro situé à l'extérieur du domaine de stabilité, on ne peut pas envisager une poursuite parfaite. La poursuite semi parfaite est faisable puisque le zéro de $\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})$ est différent de 1. Par ailleurs, compte tenu des modèles $\mathcal{G}_p(z^{-1})$ et $\mathcal{H}(z^{-1})$, on peut en déduire que $D_r(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$. Et comme les spécifications $\mathcal{S}3$ et $\mathcal{S}4$ ne figurent pas dans les performances requises, on n'aura aucune contrainte de synthèse. Néanmoins, on peut prendre $D_c(z^{-1}) = 1 - \mu z^{-1}$ avec $0 < \mu < 1$ et utiliser le scalaire μ comme paramètre de synthèse pour affiner le modelage de la fonction de sensibilité $\mathcal{RS}(z^{-1})$.

Les performances requises sont réalisées par un système asservi utilisant un régulateur (7.2) où les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ sont déterminés en résolvant l'équation polynomiale

$$(1 - 2z^{-1} + z^{-2})(1 - z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-1}(1 + 2z^{-1})(1 - \mu z^{-1})R(z^{-1}) = (1 - 0.7z^{-1})^{-5}$$

ou d'une manière équivalente le système d'équations compatible

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 - \mu & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & -2\mu & 1 - \mu & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2\mu & 1 - \mu \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \\ 4.9 \\ -3.402 \\ 1.2005 \\ -0.16807 \end{bmatrix}$$

Et le polynôme $T_r(z^{-1})$ et la fonction de transfert $\mathcal{G}^*(z^{-1})$ sont respectivement donnés par

$$T_r(z^{-1}) = \frac{1}{3} (1 - 0.7z^{-1})^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{0.04}{(1 - 0.8z^{-1})^2}$$

7.2 Commande PID

Les synthèses des systèmes de commande \mathcal{PID} sont généralement effectuées d'une manière empirique pour ne pas dire manuelle en dépit de la disponibilité sur le marché d'un certain nombre de procédures éprouvées d'auto-ajustement ou d'auto-calibrage ([1]). Les fans de la commande \mathcal{PID} se justifient par un ensemble de compromis entre les performances réalisées et l'investissement culturel requis. On se propose de mettre en évidence les performances atteignables par un système de commande \mathcal{PID} conçu à partir d'une synthèse modale, tout en soulignant ses limitations intrinsèques à la lumière des résultats qui ont été obtenus sur la caractérisation des asservissements. Pour ce faire, il est important de remarquer que toutes les lois de commande \mathcal{PID} numérique peuvent se mettre sous la forme usuelle

$$\mathcal{PID} \begin{cases} S(q^{-1})D(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases} \quad (7.9)$$

avec

$$\begin{aligned} D(q^{-1}) &= 1 - q^{-1} \\ S(q^{-1}) &= s_o + s_1q^{-1} \\ R(q^{-1}) &= r_o + r_1q^{-1} + r_2q^{-2} \\ T_r(q^{-1}) &= t_o + t_1q^{-1} + t_2q^{-2} + t_3q^{-3} + t_4q^{-4} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Compte tenu des résultats qui ont été établis pour les systèmes asservis, on peut en déduire les spécificités des systèmes de commande \mathcal{PID} .

- Comme $D_r(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$, on peut postuler que toutes les perturbations (resp. les séquences de référence) du type échelon sont parfaitement compensées (resp. poursuivis), indépendamment de la méthode de synthèse.
- La dépollution du signal de commande ne figure pas au menu de la commande \mathcal{PID} . Néanmoins, les composantes de la sortie décrites par $A(q^{-1})y_{ind}(t) = C(q^{-1})\delta(t)$ sont naturellement bloquées sur le signal de commande.
- La fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{RS}(z^{-1})$ des systèmes de commande \mathcal{PID} est un filtre passe-haut : c'est ce qui explique leur sensibilité aux bruits de mesure inéluctables et l'introduction des filtres passe-bas, en amont ou en aval du système comme l'indique la figure 7.1, dans certains systèmes de régulation industrielle. La synthèse de ces filtres nécessite toutefois un investissement culturel qui est bien au delà du fameux compromis performances/simplicité mis en avant par les fans de la commande \mathcal{PID} . Le régulateur correspondant n'est plus un simple \mathcal{PID} , il est décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \mathcal{F}_y(z^{-1})\mathcal{R}_{pid}(z^{-1})\mathcal{F}_u(z^{-1})$$

où $\mathcal{R}_{pid}(z^{-1})$ désigne la fonction de transfert du régulateur \mathcal{PID} et $\mathcal{F}_u(z^{-1})$ et $\mathcal{F}_y(z^{-1})$ sont les fonctions de transfert des filtres utilisés respectivement à l'entrée et la sortie du système.

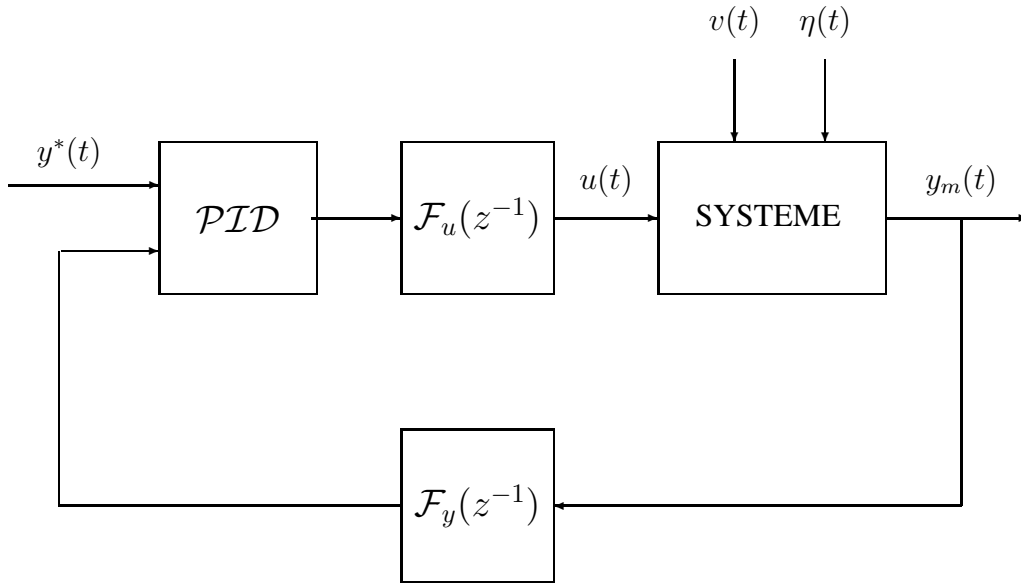


FIGURE 7.1 – Commande \mathcal{PID} avec filtrage

- Compte tenu du résultat 7.1 et de la structure du régulateur \mathcal{PID} , i.e. $n_s = 1$ et $n_r = 2$, la synthèse d'un système de commande \mathcal{PID} peut être faite à partir d'un assignement arbitraire de ses modes pourvu que le modèle de commande vérifie les deux conditions suivantes

$$\text{pgcd}(A(z^{-1})(1 - z^{-1}), B(z^{-1})) = 1 \text{ et } na = nb + d + 1 = 2$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'un régulateur \mathcal{PID} pourvu que $nm \leq 4$. Et comme

$$nb + d + 1 = 2 \implies ((nb = 1) \text{ et } (d = 0)) \text{ ou } ((nb = 0) \text{ et } (d = 2))$$

on retient plutôt le cas $(nb = 1)$ et $(d = 0)$ dans la mesure où les modèles échantillonnés exhibent généralement un zéro, notamment celui qui permet de tenir compte du retard fractionnaire résultant des temps de conversion et de calcul du signal de commande.

On peut alors conclure que l'on peut réaliser un assignement arbitraire des modes d'un système de commande \mathcal{PID} pour les systèmes dont le comportement entrée-sortie peut être décrit par le modèle de commande

$$\mathcal{MCPID} \begin{cases} (1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}) y(t) = (b_o + b_1q^{-1}) u(t - 1) + v(t) \\ (1 - q^{-1}) v(t) = (1 + c_1q^{-1}) \gamma(t) \end{cases} \quad (7.11)$$

pourvu que les polynômes $A(z^{-1})(1 - z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ soient premiers entre eux.

Remarque 7.7 La condition $nm \leq 4$ stipule que le système de commande admet au plus quatre modes dont nm modes sont assignés aux valeurs désirés μ_i pour $i \in [1, nm]$; les $4 - nm$ modes restant sont assignés à l'origine.

L'assignement arbitraire des modes d'un système de commande \mathcal{PID} consiste à résoudre l'équation polynomiale

$$\begin{aligned} (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) (1 - z^{-1}) (1 + s_1 z^{-1}) + z^{-1} (b_o + b_1 z^{-1}) (r_o + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}) \\ = \\ 1 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + m_3 z^{-3} + m_4 z^{-4} \end{aligned}$$

ou d'une manière équivalente le système d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & b_o & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & b_1 & b_o & 0 \\ a_2 - a_1 & 0 & b_1 & b_o \\ -a_2 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + 1 - a_1 \\ m_2 + a_1 - a_2 \\ m_3 + a_2 \\ m_4 \end{bmatrix}$$

Un tel système est linéaire et admet une solution unique en (s_1, r_o, r_1, r_2) si et seulement si

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & b_o & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & b_1 & b_o & 0 \\ a_2 - a_1 & 0 & b_1 & b_o \\ -a_2 & 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix} = a_2 b_o^3 + b_1 (b_1^2 - b_o ((a_1 - 1) b_1 - b_o (a_2 - a_1))) \neq 0$$

Il faut remarquer que la synthèse du système de commande \mathcal{PID} n'est pas faisable si l'une des conditions suivantes est vraie

$$a_2 = 0 \text{ et } b_1 = 0$$

$$B(1) = b_o + b_1 = 0$$

$$B(z^{-1}) \text{ divise } A(z^{-1})D(z^{-1})$$

La première condition stipule tout simplement que le système n'est pas de second ordre, alors que la seconde condition signifie que le zéro du système est égal à un. Quant à la troisième condition, elle implique que le reste de la division euclidienne de $A(z^{-1})D(z^{-1})$ par $B(z^{-1})$ est nul. En effet, on a

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} = E(z^{-1}) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})}$$

avec

$$E(z^{-1}) = \frac{1}{b_o} + \frac{1}{b_o} \left((a_2 - a_1) - \frac{b_1}{b_o} \right) z^{-1} + \left((a_2 - a_1) - \frac{b_1}{b_o} \left((a_1 - 1) - \frac{b_1}{b_o} \right) \right) z^{-2}$$

$$F(z^{-1}) = \left(-a_2 - \frac{b_1}{b_o} \left((a_2 - a_1) - \frac{b_1}{b_o} \left((a_1 - 1) - \frac{b_1}{b_o} \right) \right) \right) z^{-3}$$

Il apparaît clairement que $B(q^{-1})$ divise $A(q^{-1})D(q^{-1})$ si et seulement si le reste de la division est identiquement nul, soit

$$-a_2 - \frac{b_1}{b_o} \left((a_2 - a_1) - \frac{b_1}{b_o} \left((a_1 - 1) - \frac{b_1}{b_o} \right) \right) = 0 \iff \Delta = 0$$

On retrouve ainsi toutes les conditions structurelles requises sur le modèle de commande. Notons que si $B(z^{-1})$ divise $A(z^{-1})D(z^{-1})$, alors $B(z^{-1})$ divise $P(z^{-1})$ et il est donc impossible de réaliser un assignement arbitraire des modes du système de commande.

Remarque 7.8 *Les régulateurs PID conçus à partir d'une synthèse modale sont limités à la classe des systèmes caractérisée par un comportement entrée-sortie de second ordre, un retard pur strictement inférieur à la période d'échantillonnage et des perturbations du type échelon. On peut toutefois trouver des actions \mathcal{P} , \mathcal{I} et \mathcal{D} qui stabilisent une classe plus large de systèmes, i.e. $na > 2$, $nb > 1$ et $d \geq 1$, avec des performances dynamiques que l'on ne peut pas garantir a priori.*

En guise d'une sage conclusion, on dira que l'on peut exploiter la puissance de calcul requise pour la mise en œuvre d'un PID numérique pour concevoir un système de commande beaucoup plus performant à partir des techniques qui ont été développées tout au long des trois dernières décennies par la communauté d'automatique. Ces techniques permettent de mieux appréhender et traiter l'inéluctable compromis entre les performances et la robustesse des asservissements ([6], [23]).

7.3 Mise en œuvre du régulateur

On distingue deux problématiques cruciales pour la mise en œuvre des systèmes de commande linéaire. La première concerne les non linéarités des composants de l'asservissement qu'il faut compenser par des inversions appropriées pour recouvrer l'hypothèse de linéarité dans la mesure du possible. La seconde relève des saturations inéluctables des actionneurs qui doivent être prises en compte aussi bien lors de la spécification des performances requises, que lors de la mise en œuvre du régulateur. En effet, les performances requises doivent être admissibles par rapport au domaine de linéarité du système et la puissance disponible. On est donc amené, à définir un domaine admissible pour les entrées dans lequel on doit projeter la séquence de commande calculée.

La mise en oeuvre d'un régulateur peut être réalisée comme l'indique la figure 9.5 pour pallier relativement raisonnablement le problème de saturation des actionneurs lorsque le régulateur n'est pas stable. Elle consiste à récrire tout simplement la loi de commande (7.2) sous la forme

$$u_s(t) = \text{sat}(u(t))$$

avec

$$u(t) = -\frac{R_d(q^{-1}) - P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u_s(t) - \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y_m(t) + \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t + d + 1)$$

où $\text{sat}(\cdot)$ désigne la fonction de saturation. On notera plus particulièrement que toutes les composantes du régulateur sont stables pourvu que toutes les racines du polynôme $P_o(z^{-1})$ soient situées dans le domaine de stabilité et que la sortie de la composante définie par la fonction de transfert

$$\frac{R_d(z^{-1}) - P_o(z^{-1})}{P_o(z^{-1})}$$

ne dépend que du passé de la commande pourvu que les premiers coefficients des polynômes $P_o(z^{-1})$ et $R_d(z^{-1})$ soient égaux puisque

$$p_{oo} = r_{do} \iff \exists W(z^{-1}) \in \mathbb{R}[z^{-1}] / R_d(z^{-1}) - P_o(z^{-1}) = z^{-1}W(z^{-1})$$

Ceci n'est pas le cas si l'on utilise la forme usuelle (7.2) puisque le signal de commande peut perdre sa bornitude dans le cas d'une saturation persistante. Cette paramétrisation du régulateur est issue de la culture de la commande avec retour d'état incorporant un observateur : la base du génie de la rétroaction.

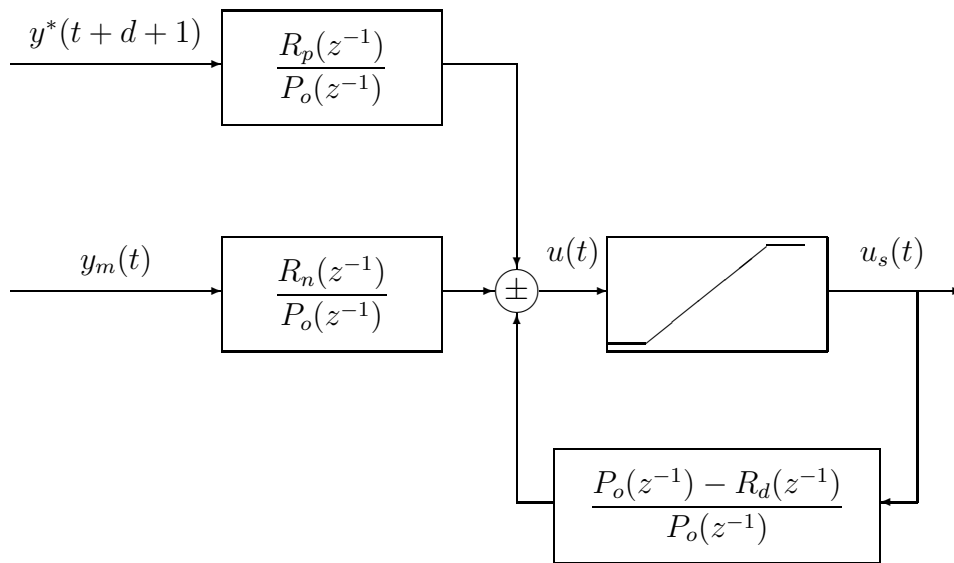


FIGURE 7.2 – Mise en œuvre d'un régulateur saturant

Remarque 7.9 Comme toutes les composantes d'un système de commande avec modèle interne, i.e. le système, le modèle de commande et le filtre de robustification, sont stables, toutes les variables internes qui leur sont associées sont bornées. Les systèmes de commande avec modèle interne sont alors intrinsèquement bien conditionnés vis-à-vis des saturations des actionneurs.

7.4 Commande d'un réacteur chimique

Les réacteurs chimiques opérant en mode semi-batch sont de plus en plus utilisés dans la fabrication des produits à haute valeur ajoutée, en l'occurrence la chimie fine et la pharmacie, pour des considérations de flexibilité et de polyvalence de fonctionnement. Un réacteur semi-batch transforme des réactifs, avec un catalyseur si besoin est, en produits. L'apport ou l'évacuation de la chaleur de la réaction s'effectue par la circulation d'un fluide caloporteur dans une double enveloppe. Le fluide caloporteur provient d'une source d'eau chaude et d'une source d'eau froide à travers une vanne asservie en débit. Dans le cas d'une réaction exothermique irréversible du type réactif A + réactif B \rightarrow Produits, le mode opératoire consiste à réaliser les trois phases suivantes.

- Préchauffer le solvant et éventuellement une partie des réactifs jusqu'à la température de la réaction à l'aide du fluide caloporteur.
- Maintenir la température du milieu réactionnel constante pendant et après l'introduction des réactifs.
- Refroidir le mélange réactionnel à l'aide du fluide caloporteur.

La dynamique du système exhibe des variations importantes lors du passage d'une étape à l'autre pour justifier l'utilisation des techniques de commande avancée par rapport à celle qui domine le marché de la régulation industrielle, en l'occurrence la commande *PID* avec des synthèses aussi pauvres en performances que le pauvre modèle qu'elles utilisent pour déterminer les actions *P*, *I* et *D*, notamment un à deux points de la réponse fréquentielle ou indicielle du système.

On présente dans ce qui suit des résultats de simulation issus d'une étude de faisabilité de la commande modale d'un simulateur réaliste de réacteurs chimiques exothermiques parfaitement agités développé à partir de leur bilans de matière et bilans thermiques sous des hypothèses relativement raisonnables. Pour mieux apprécier la faisabilité de la commande modale des réacteurs semi-batch, on a adopté une démarche progressive pour la résolution du problème d'asservissement de la température du réacteur à partir de la température du fluide caloporteur modulo une ouverture appropriée de la vanne. La chaleur de la réaction est particulièrement considérée comme une perturbation d'état.

Cette démarche consiste à effectuer une étude comparative des performances des systèmes de commande qui dominent la régulation industrielle avec celles d'un système de commande modale. Pour ce faire, on se focalisera sur les formes des fonctions de sensibilité usuelles et le comportement entrée-sortie. Les fonctions de sensibilité usuelles permettent d'apprécier le compromis performances/robustesse réalisé alors que le comportement entrée-sortie permet de donner une image sur la qualité du produit. Cette étude a été réalisée avec le progiciel *SIMART* : un système de conception assistée par ordinateur qui, outre les méthodologies d'identification et de commande (adaptative), offre une procédure de calibrage automatique des régulateurs *PID* à partir d'une expérience de relais qui a été validée par rapport aux conceptions des systèmes de commande *PID* par des industriels qui sont soucieux de l'avenir du marché de la régulation industrielle compte tenu des avancées réalisées dans le domaine de la théorie des systèmes tout au long des dernières décennies.

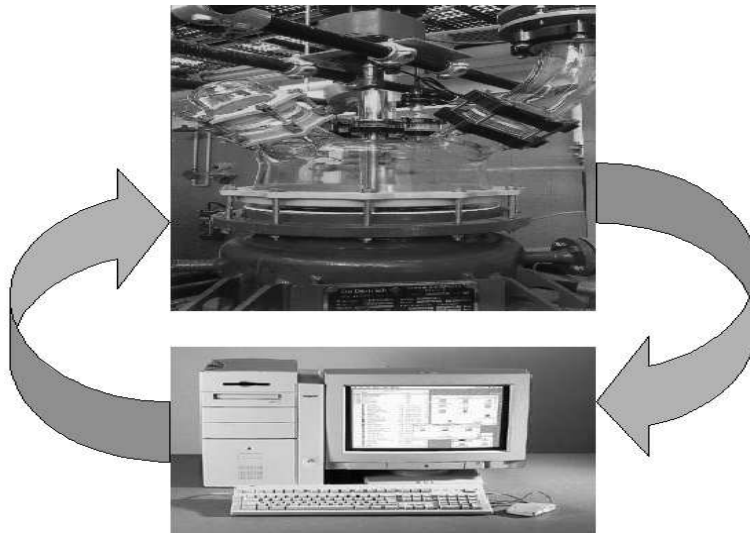


FIGURE 7.3 – Le réacteur chimique

Paramètres de synthèse	Valeurs
T_e	20s
$CPSCRE$	{0.6, 0.7, 0.9}
$CPOBS$	{0.5, 0.6, 0.8}
$D_r(z^{-1})$	$1 - z^{-1}$
$D_c(z^{-1})$	$1 - 0.8z^{-1}$
$G^*(z^{-1})$	$\frac{1 - 2e^{-0.2} + e^{-0.4}}{1 - 2e^{-0.2}z^{-1} + e^{-0.4}z^{-2}}$

TABLE 7.1 – Spécification des paramètres de synthèse

Méthodes de commande	PID	CMI	$CMOD$
Marge de gain	10.68	18.17	10.32
Marge de phase	74.01	72.41	42.42
Marge de retard	175	333	141
Marge de module	3.16	4.87	2.45
Bande d'atténuation	0.015	0.004	0.005

TABLE 7.2 – Marges de robustesse et bandes d'atténuation

La figure 7.4 montre un comportement entrée-sortie en boucle ouverte du réacteur semi-batch considéré. Notons que ce comportement dynamique est stable, bien amorti et sans retard pur apparent avant et après la réaction qui a lieu à l'instant 150 mn. On peut alors utiliser une commande PID ou une commande avec modèle interne. La synthèse du système de commande PID a été faite à partir d'une méthode basée sur le principe d'optimum symétrique. Le choix de cette méthode a été motivé par des considérations de simplicité d'auto-calibrage dans la mesure où son modèle de synthèse est réduit au point de la réponse fréquentielle dont le déphasage est de -135° . En effet, ce dernier est effectué par une expérience appropriée de relais qui permet d'identifier les points de la réponse fréquentielle qui se trouvent dans le troisième quadrant du plan complexe [1].

La figure 7.5 montre le comportement entrée-sortie du réacteur en contre réaction avec le relais dont l'amplitude et l'hysteresis changent de manière à identifier le point de la réponse fréquentielle dont le déphasage est de -135° . Une telle procédure a été proposée dans [18].

La figure 7.6 montre le comportement entrée-sortie du système de commande PID en l'absence d'un bruit de mesure. Les performances semblent être relativement bonnes pour justifier largement l'utilisation d'un système de commande PID pour la réalisation des profils de température requis lorsque la précision de la mesure de température dans le réacteur est infinie. La figure 7.7 montre le comportement entrée-sortie du système de commande PID en présence d'un bruit de mesure de variance 0.001. La sensibilité du système de commande à un bruit de mesure, aussi faible que peut être sa variance, est remarquable. On montrera ci-dessous que cette amplification du bruit de mesure sur le signal de commande est intrinsèque à la commande PID .

La synthèse d'un système de commande avec modèle interne ou d'un système de commande modale est basée sur un modèle de commande qui représente au mieux le comportement entrée-sortie. La figure 7.8 montre les données entrée-sortie qui ont été utilisées pour l'identification d'un modèle de commande. Cette dernière a été effectuée avec une méthode des moindres carrés bien élaborée pour réaliser une bonne identification de la dynamique du réacteur dans la bande passante requise pour le système de commande, en l'occurrence les données sont préalablement filtrées et normalisées. Le modèle obtenu permet d'abord d'expliquer les mauvaises performances du système de commande PID . La figure 7.9 montre les fonctions de sensibilité usuelles des systèmes de commande PID (traits forts), de commande avec modèle interne (traits discontinus) et de commande modale (traits fins). L'amplification du bruit de mesure sur le signal de commande est due au gain relativement élevé de la fonction de sensibilité usuelle (sensibilité*régulateur). On notera que les marges de robustesse du système de commande PID sont relativement bonnes comme l'indiquent la table 7.2 ou la figure 7.10 qui montre les gains en boucle ouverte des systèmes de commande considérés.

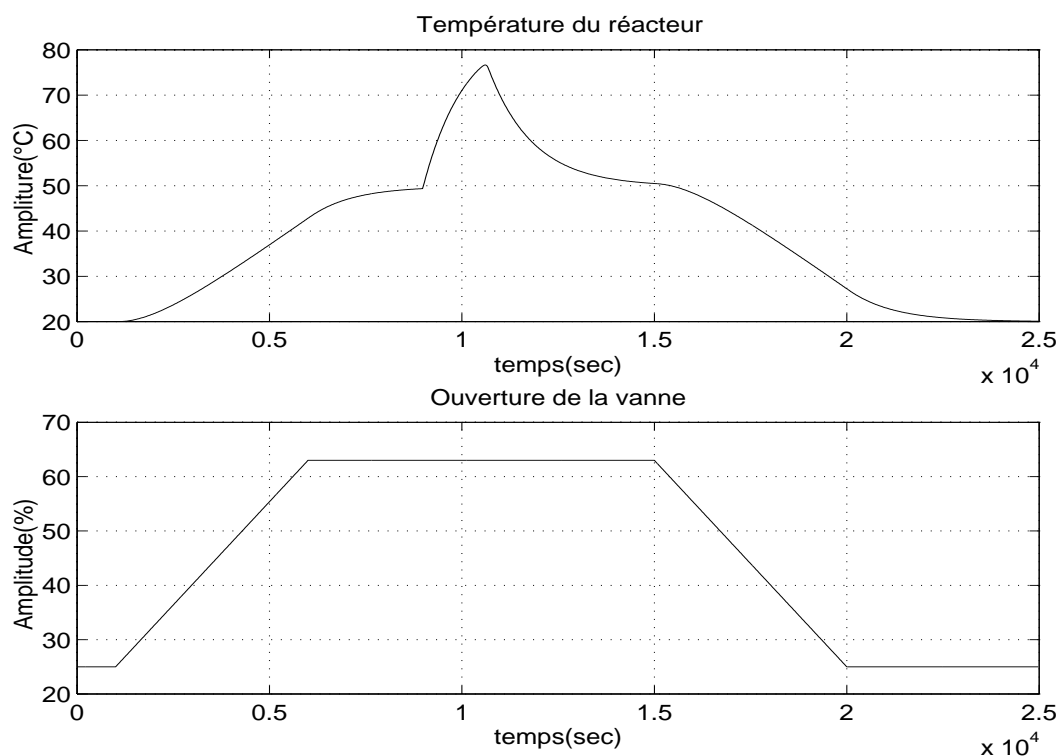


FIGURE 7.4 – Comportement entrée-sortie en boucle ouverte

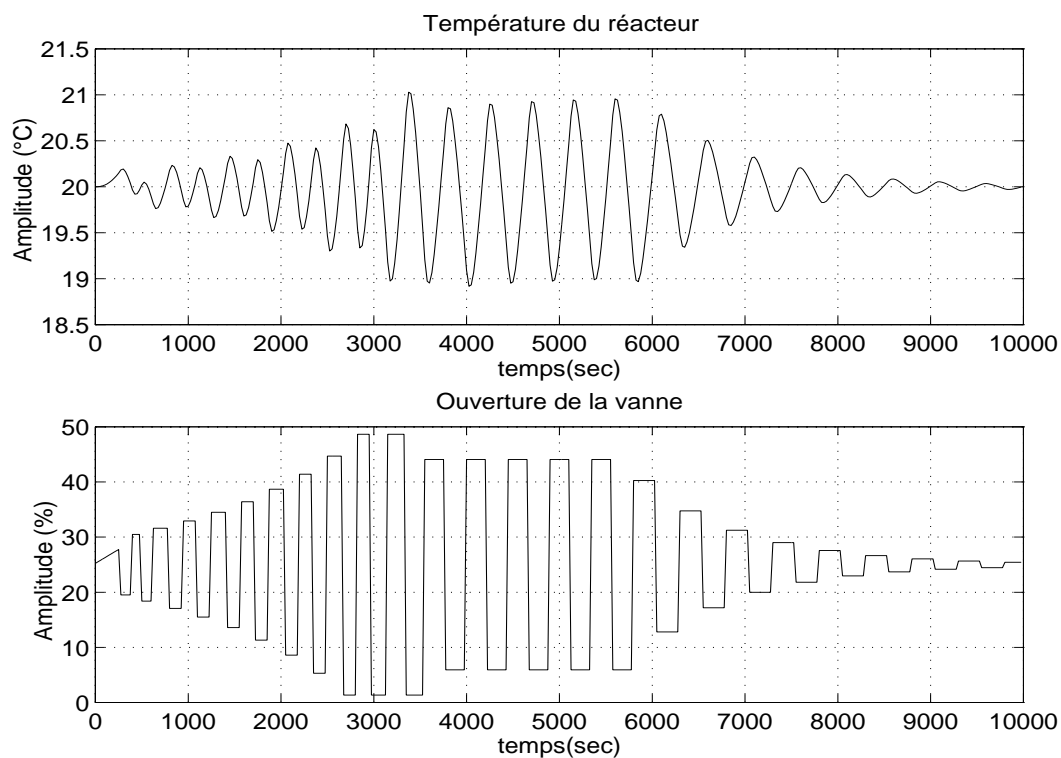


FIGURE 7.5 – Comportement entrée-sortie obtenue avec un relais

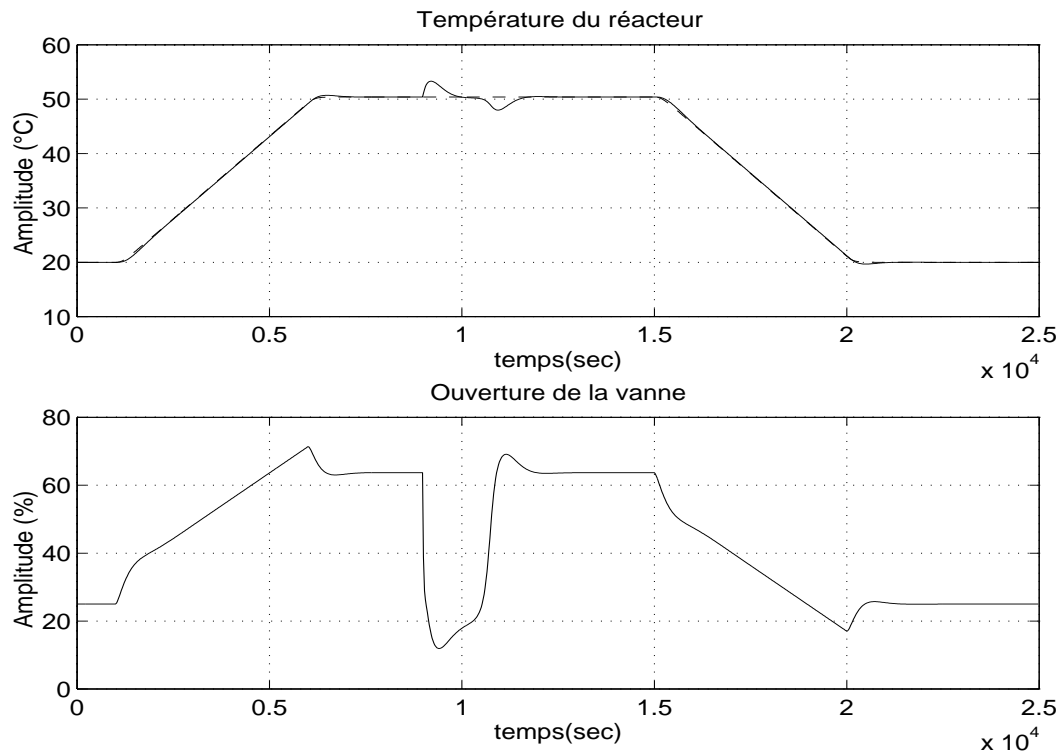


FIGURE 7.6 – Comportement entrée-sortie du PID sans bruit de mesure

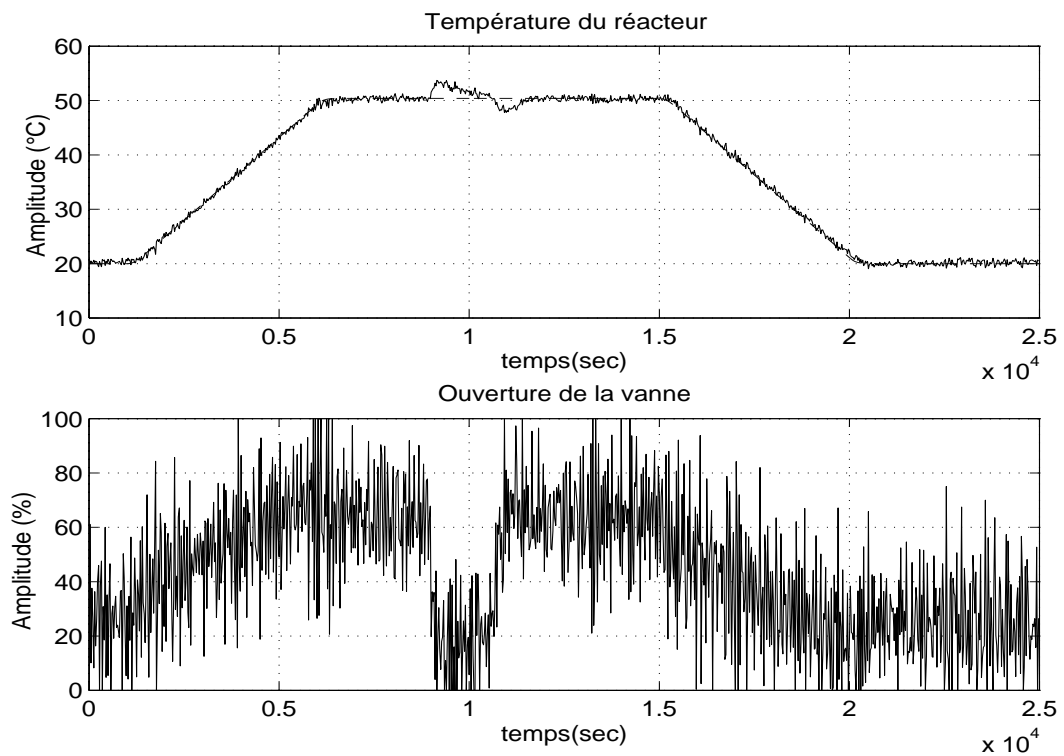


FIGURE 7.7 – Comportement entrée-sortie du PID avec un bruit de mesure

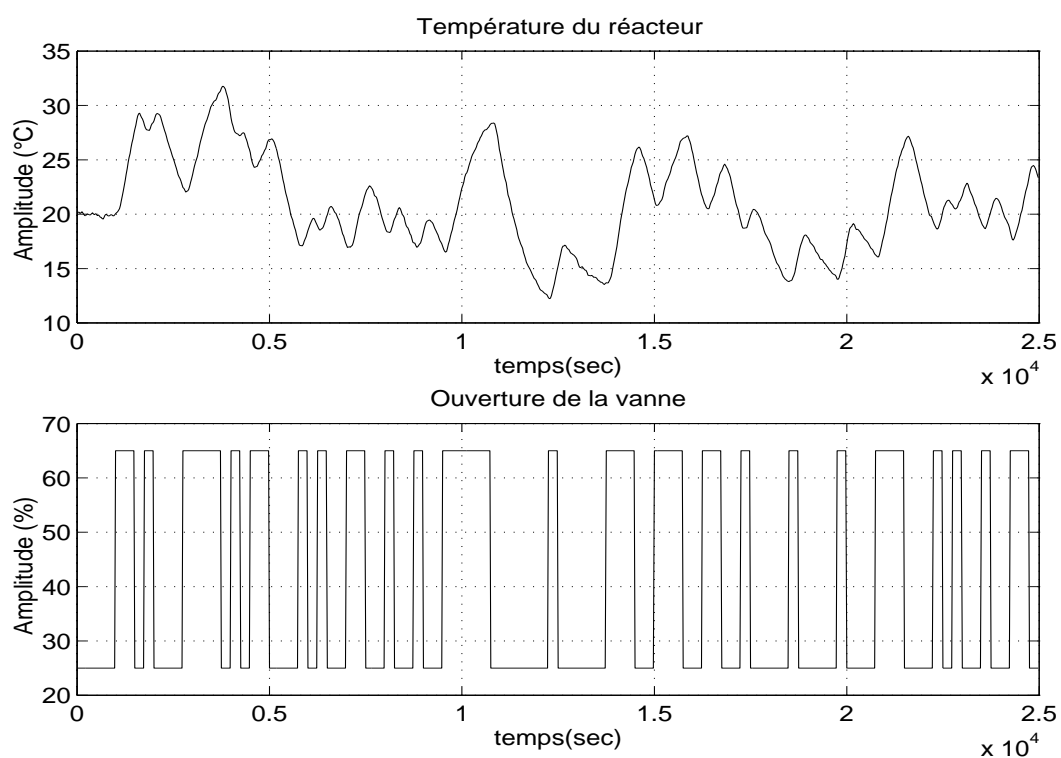


FIGURE 7.8 – Données entrée-sortie pour l'identification du système

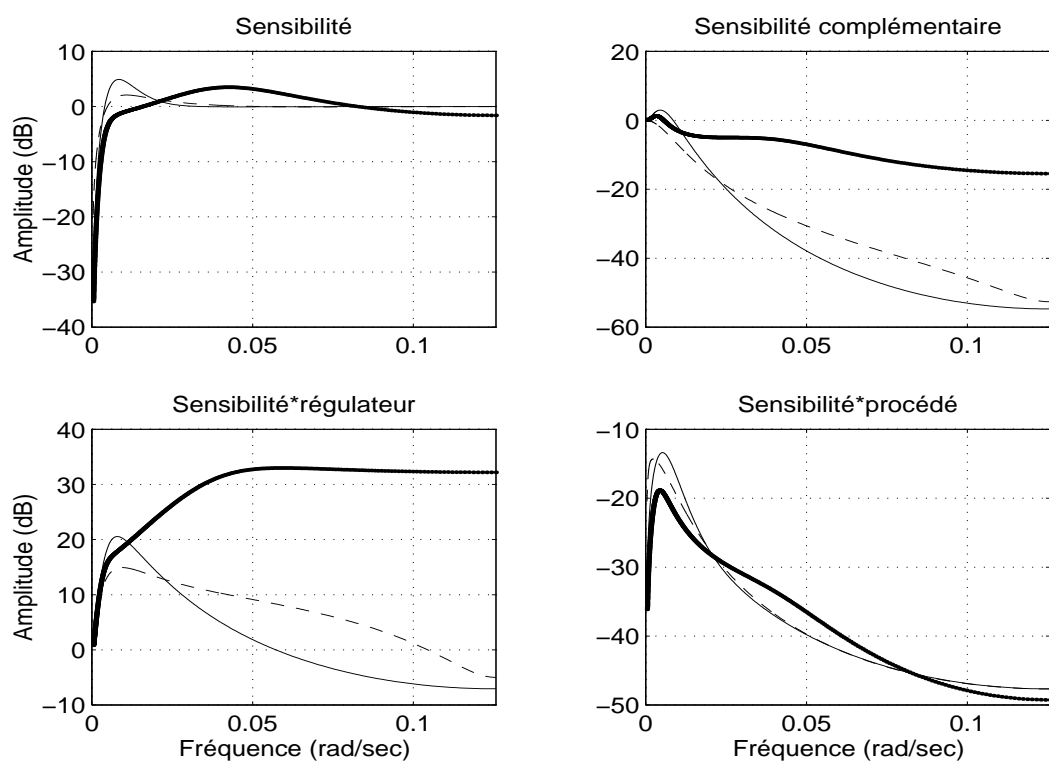


FIGURE 7.9 – Fonctions de sensibilité usuelles

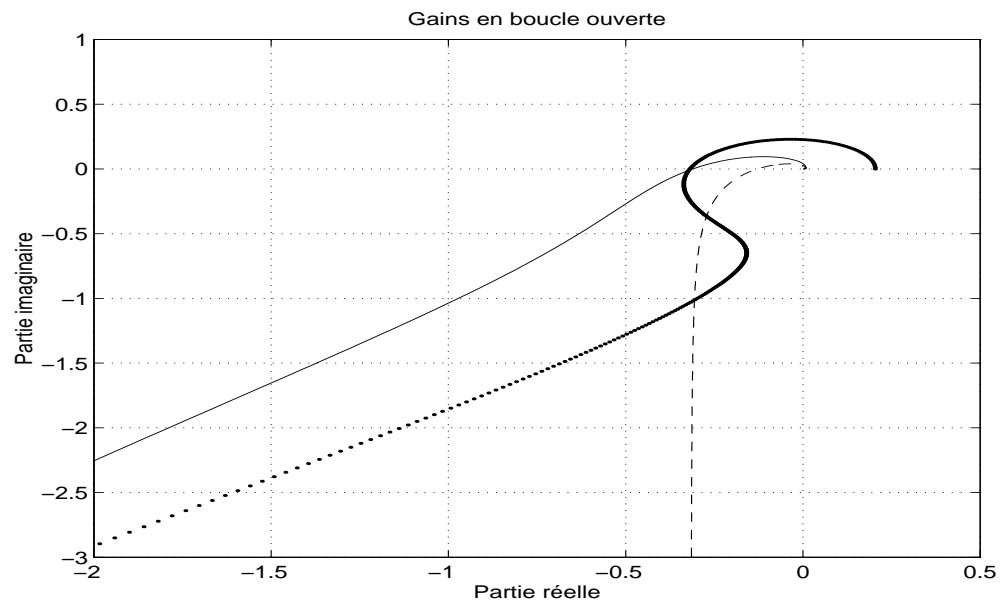


FIGURE 7.10 – Gains en boucle ouverte

La figure 7.11 montre le comportement entrée-sortie d'un système de commande avec modèle interne. Le filtre de robustification a été choisi à la lumière de la commande prédictive de Smith pour réduire les dynamiques de poursuite et de régulation. Les performances sont relativement bonnes aussi bien du point de vue des fonctions de sensibilité usuelles que du point de vue du comportement entrée-sortie. On notera que le rejet des perturbations est relativement lent dans la mesure où la commande avec modèle interne préserve les pôles du système à commander. C'est ce qui explique le fait que la commande avec modèle interne conduit à la plus petite bande d'atténuation comme l'indique la table 7.2. Les meilleurs marges de robustesse sont cependant obtenues avec la commande avec modèle interne comme l'indique la table 7.2 ou les gains en boucle ouverte de la figure 7.10. C'est ce qui justifie une certaine popularité de la commande avec modèle interne.

La figure 7.12 montre le comportement entrée-sortie d'un système de commande modale. Le comportement dynamique en sortie est comparable à celui de la commande PID , alors que le comportement dynamique en entrée est comparable à celui de la commande avec modèle interne. Les fonctions de sensibilité usuelles sont relativement bonnes par rapport à celles du système de commande avec modèle interne comme celles du système de commande PID , comme l'indiquent la figure 7.9. Bien que les marges de robustesse soient relativement petites par rapport à celles de la commande avec modèle interne, elles sont néanmoins admissibles par rapport aux exigences de la pratique industrielle. La figure 7.13 montre le comportement entrée-sortie d'un système de commande modale auto-ajustable. La fonction d'auto-ajustement a été faite à partir d'une identification préalable en boucle fermée utilisant un relais. On notera que l'adaptation paramétrique a été gelée avant la réaction.

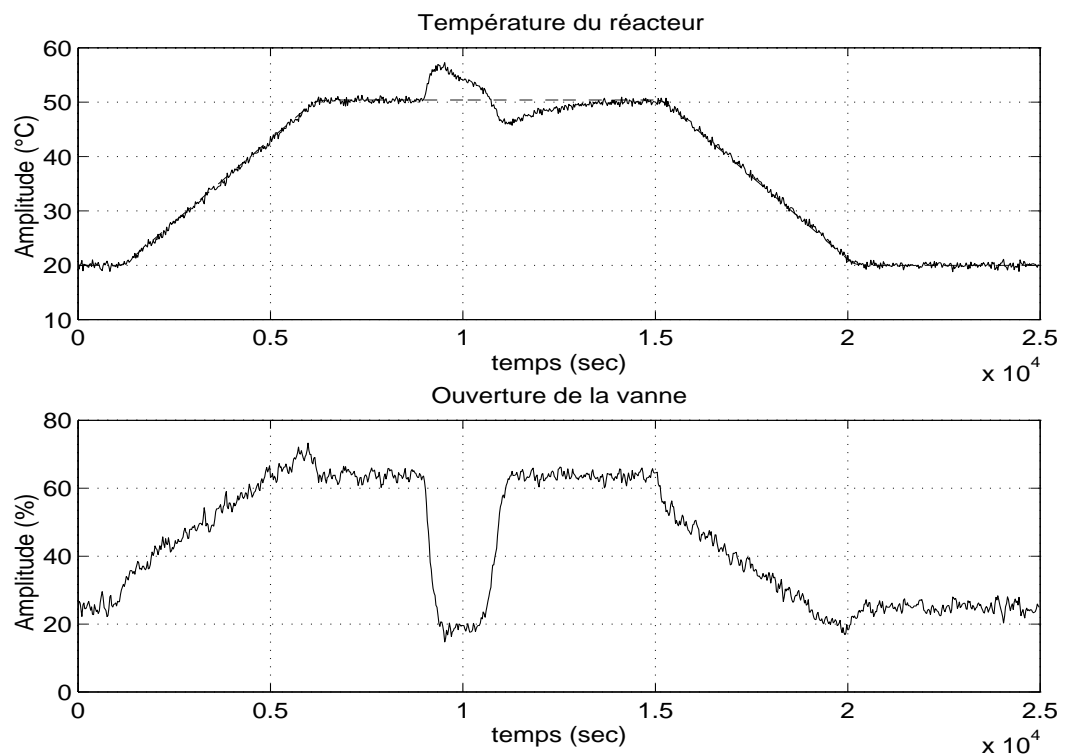


FIGURE 7.11 – Comportement entrée-sortie de la commande avec modèle interne

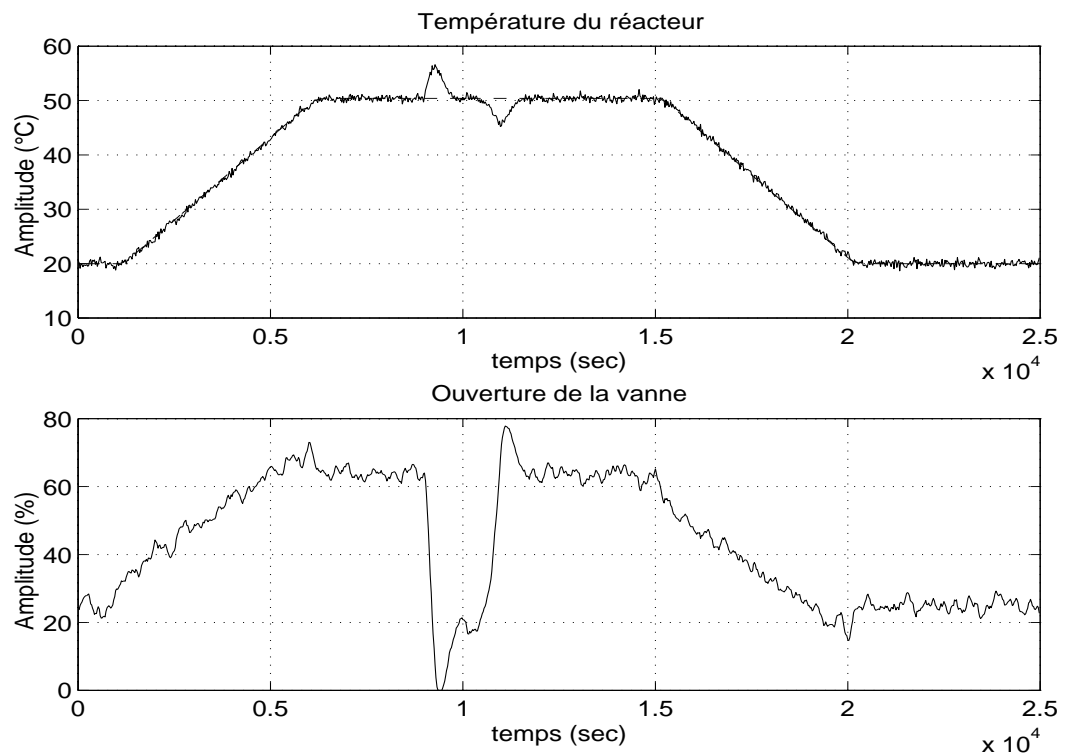


FIGURE 7.12 – Comportement entrée-sortie de la commande modale

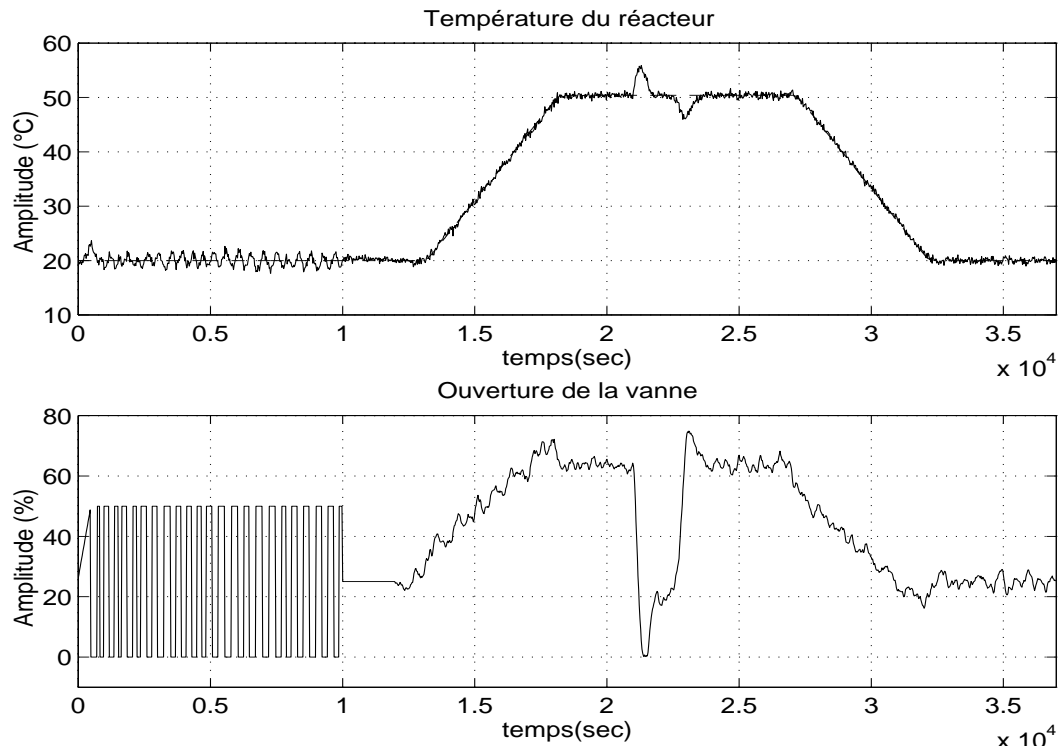


FIGURE 7.13 – Performances de la commande modale auto-ajustable

La valeur ajoutée de la commande modale des réacteurs exothermiques parfaitement agités opérant en mode semi-batch par rapport à la commande PID et la commande avec modèle interne a été mise en exergue. On peut retenir les aspects suivants

- La sensibilité générique des systèmes de commande PID par rapport aux bruits de mesure inévitables aussi bonnes que peuvent être leur robustesse et performances dynamiques.
- La limitation des performances dynamiques d'un système de commande avec modèle interne par la dynamique de la cascade composée du système et du filtre de robustification. On ne peut donc réduire le temps de production avec ce type de commande dont l'unique atout est la possibilité de réduire arbitrairement la sensibilité aux bruits de mesure inévitables.
- La commande modale permet de réaliser aisément un compromis admissible entre les performances et la robustesse. Les paramètres de synthèse peuvent être réduits à deux entiers h_o et h_c qui désignent respectivement les horizons d'observation et de commande qui permettent de spécifier les modes du système asservi à partir d'une procédure adéquate basée sur la configuration des pôles du système proposée dans [?].

7.5 Conclusion

La motivation de ce chapitre a été de montrer que la conception des systèmes asservis peut être réalisée d'une manière pragmatique et rationnelle avec une synthèse modale à partir d'une

structure de régulateur qui s'est imposée par les récents acteurs de la régulation industrielle, soit

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases}$$

La synthèse modale peut être effectuée, à partir des performances requises, en plusieurs étapes comme suit.

- La spécification de la période d'échantillonnage et la définition du domaine de stabilité et de performances à partir des performances requises en régulation.
- La détermination de la partie fixe du régulateur, i.e. les polynômes $D_r(z^{-1})$ et $D_c(z^{-1})$, en fonction des conditions requises en matière de compensation des perturbations et de dépollution du signal de commande et/ou d'insensibilité aux bruits de mesure inéluctables. Cette étape est effectuée à la lumière du principe du modèle interne, de la nature des perturbations et d'un modelage adéquat de la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{RS}(z^{-1})$.
- Le choix de la nature de poursuite en fonction de la configuration des zéros du système par rapport au domaine de stabilité et de performances et la nature de la séquence de points de consigne et la spécification du générateur de la séquence de référence, i.e. les polynômes $A^*(z^{-1})$ et $B^*(z^{-1})$, en fonction des performances requises en poursuite.
- La spécification des modes du système asservi à partir du domaine de stabilité et de performances et la détermination du régulateur conduisant à un modelage approprié de la dynamique de poursuite et des fonctions de sensibilité usuelles. On détermine d'abord les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ à partir de la résolution d'une équation polynomiale appropriée. Le polynôme $T_r(z^{-1})$ est ensuite élaborée en fonction de la nature de la poursuite admissible par rapport à la configuration des zéros du système par rapport au domaine de stabilité et de performances et la nature de la séquence de points de consigne.

Ces aspects de synthèse ont permis de mettre en évidence les limitations intrinsèques de la commande PID , en l'occurrence la sensibilité aux bruits de mesure inéluctables et la compensation parfaite des perturbations (resp. la précision maximale) est réduite à la classe des perturbations du type échelon (resp. des séquences de référence du type échelon).

Une étude de faisabilité de la commande modale pour la conception d'un asservissement de température d'un réacteur chimique semi-batch a été faite. Elle a particulièrement permis de mettre en exergue les atouts de la commande modale par rapport à la commande PID et la commande avec modèle interne.

7.6 Problèmes

Problème 7.1 *Considérons la classe des systèmes continus dont la dynamique peut être raisonnablement décrite par un oscillateur et dont toutes les perturbations de charge sous-jacentes peuvent être ramenées en entrée et sont du type échelon. Le comportement entrée-sortie de cette classe de systèmes est décrite par l'équation différentielle*

$$OSC \left\{ \begin{array}{l} (\rho^2 + \omega^2) y(t) = \omega^2 (u(t) + v(t)) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ \rho v(t) = \delta_v(t) \end{array} \right.$$

où $\{u(t)\}$ et $\{y(t)\}$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $\{y_m(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$ désignent respectivement la sortie mesurée et les bruits de mesure et ω n'est autre que la pulsation propre de l'oscillateur. On se propose de concevoir un asservissement en adoptant une approche modale réalisant les spécifications $\mathcal{S}1$, $\mathcal{S}2$ et $\mathcal{S}3$ avec $\omega_r = \omega$ et $\omega_p = 0.5\omega$ et de le mettre en œuvre sur un calculateur comme suit

- $\mathcal{E}1$. Attendre le top d'horloge.
- $\mathcal{E}2$. Appliquer le signal de commande au système.
- $\mathcal{E}3$. Acquisition de la sortie du système : conversion et sauvegarde.
- $\mathcal{E}4$. Détermination du signal de commande.
- $\mathcal{E}5$. Aller en $\mathcal{E}1$.

On suggère de procéder progressivement comme suit.

- 1) Justifier le fait que l'on peut spécifier la période d'échantillonnage comme suit

$$\omega T_e = \frac{\pi}{2}$$

- 2) Montrer que le système échantillonné sous-jacent est décrit par

$$SYS \left\{ \begin{array}{l} (1 + q^{-2}) y(t) = (1 + q^{-1}) (u(t - 2) + v(t - 2)) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ (1 - q^{-1}) v(t) = v\delta(t) \end{array} \right.$$

- 3) Préciser les configurations des pôles et des zéros du système et justifier pourquoi un objectif de poursuite parfaite ou une commande avec modèle interne ne sont pas faisables.
- 4) Proposer un régulateur réalisant les spécifications $\mathcal{S}1$, $\mathcal{S}2$ et $\mathcal{S}3$. On justifiera la structure du régulateur proposée et on donnera l'équation de sa synthèse sans la résoudre.

Problème 7.2 L'ultime motivation de cet problème est de mieux appréhender le concept de précision maximale, notamment sa spécificité par rapport au concept de poursuite parfaite. Pour ce faire, considérons les asservissements échantillonnés que l'on peut représenter comme

le montre la figure 9.3 où SYS et REG représentent le système et le régulateur et sont respectivement décrits par

$$SYS \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})v\delta(t) \end{cases} \quad (7.12)$$

et

$$REG \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) = R_n(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t)) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})u^*\delta(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (7.13)$$

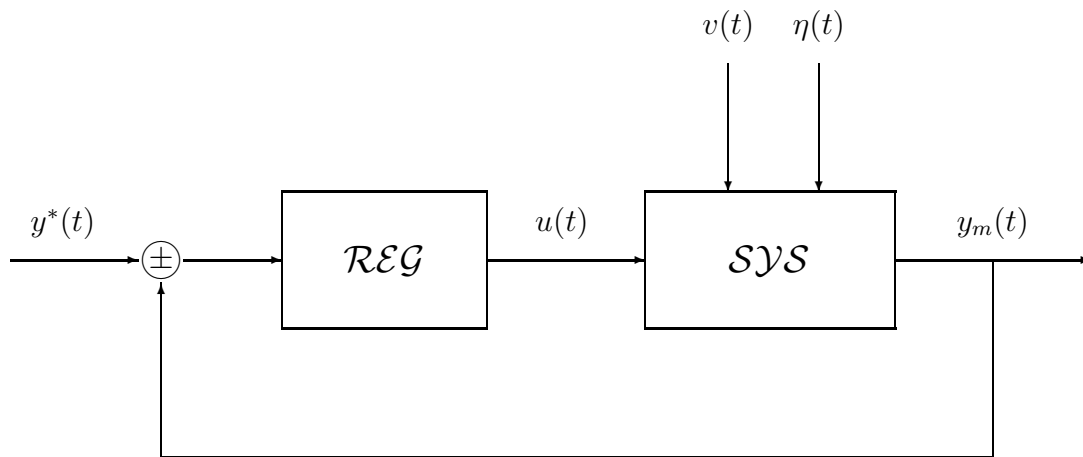


FIGURE 7.14 – Système asservi

Pour ce faire, on suggère de procéder d'une manière progressive comme suit en accordant une attention particulière aux propriétés fondamentales de l'asservissement considéré.

- 1) Montrer que les performances entrée-sortie des systèmes asservis sont respectivement données par les équations

$$SAS \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) y^*(t) + \mathcal{G}_{sp}(q^{-1}) v(t) + \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) \eta(t) \\ u_\sigma(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1}) y^*(t) + \mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) v(t) + \mathcal{G}_{eb}(q^{-1}) \eta(t) \end{cases} \quad (7.14)$$

où les $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$ pour $(i, j) \in [s, e] \times [r, p, b]$ désignent les différentes fonctions de transfert du système asservi dont on précisera les expressions.

- 2) Préciser la propriété de stabilité nominale et les dynamiques de poursuite et de régulation du système asservi.

- 3) Donner la propriété requise pour réaliser une insensibilité aux bruits de mesure inéluçables
- 4) Montrer que l'erreur de poursuite du système asservi est donnée par

$$\mathcal{EP} \{ e(t) = \mathcal{S}(q^{-1}) y^*(t) - \mathcal{G}_{sp}(q^{-1}) v(t) - \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) \eta(t) \} \quad (7.15)$$

Et préciser la structure du régulateur qui permet de réaliser une précision maximale.

- 5) Préciser le concept de précision maximale par rapport au concept de poursuite parfaite.
- 6) Considérons le cas des systèmes parfaitement décrits par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = \frac{z^{-3}(1 - 2z^{-1})}{1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

et soumis à des perturbations du type échelon en entrée. Proposer un régulateur permettant de réaliser les spécifications usuelles $\mathcal{S}1$, $\mathcal{S}2$ et $\mathcal{S}3$ avec une période d'échantillonnage telle que $\omega_r T_e = 0.7$ et $\omega_p T_e = 0.8$.

Chapitre 8

Conclusion

Cet ouvrage a été consacré aux problèmes fondamentaux de modélisation, de stabilité et de commande des systèmes échantillonnés après une motivation concise du pourquoi des choses. Ces études ont été réalisées en adoptant une approche système dont nous rappelons les éléments essentiels.

- Une modélisation des systèmes échantillonnés intégrant les modèles des convertisseurs CAN et CNA issus d'une présentation rigoureuse des concepts d'échantillonnage et de reconstruction. On retrouve naturellement la réponse impulsionnelle, la réponse harmonique, l'équation aux différences, la fonction de transfert et la réalisation d'état d'un système échantillonné avec un focus sur les relations de passage entre ces différentes représentations.
- Une présentation claire et concise des concepts de stabilité externe et de stabilité interne. La vraisemblance entre la stabilité externe et la stabilité \mathcal{EBSB} et l'importance de la stabilité interne par rapport à la stabilité externe ont été mises en exergue. La stabilité interne est présentée à partir de l'approche de Lyapunov.
- Une interprétation systémique des équations des systèmes asservis qui a permis de postuler que les fonctions de sensibilité usuelles d'un asservissement sont des quantificateurs de performances nominales et de robustesse en stabilité et que les performances requises en poursuite peuvent être réalisées à partir d'un objectif de poursuite admissible ou d'un objectif de précision maximale. Les limitations des performances intrinsèques à la configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi ont été soulignées pour mieux apprécier qu'un automaticien est un ingénieur gestionnaire des compromis entre les performances et la robustesse.
- Une synthèse modale qui offre une agréable introduction dans l'ingénierie de la conception des systèmes de commande par sa simplicité et sa large applicabilité. Des résultats probants obtenus dans un contexte de simulation réaliste ont permis de montrer la faisabilité de la commande modale pour la conception d'un asservissement de température au sein d'un réacteur chimique opérant en mode semi-bach. Une attention particulière est accordée aux limitations de la régulation industrielle usuelle, en l'occurrence la sensibilité des systèmes de commande PID aux bruits de mesure inéluctables et l'invariance des modes du système par une loi de commande avec modèle interne.

Ainsi cet ouvrage est une compilation compréhensible des résultats fondamentaux disponibles sur l'analyse et la synthèse des asservissements échantillonnés que tout ingénieur doit acquérir pour mieux apprécier le bouquet offert par la commande par ordinateur. Cette compilation a été réalisée d'une manière rigoureuse avec des remarques pertinentes et des problèmes qui permettent de mieux apprécier l'essence la commande par ordinateur. Elle m'a plus particulièrement permis de remémorer toutes les discussions acharnées que j'ai eues avec mon ami Amine Tahani sur le modèle du professeur que nous aurions tant aimé avoir à l'Ecole Mohammadia d'Ingénieurs.

Nul homme ne peut vous révéler quoi que ce soit qui ne sommeille déjà dans l'aube de votre connaissance.

Le maître qui marche à l'ombre du temple, parmi ses disciples, ne donne pas de sa sagesse mais plutôt de sa foi et sa tendresse.

S'il est vraiment sage, il ne vous invitera pas à entrer dans le logis de la sagesse, mais il vous guidera plutôt jusqu'au seuil de votre esprit.

L'astronome peut vous parler de sa propre compréhension de l'espace, mais il ne pourrait vous la donner.

Le musicien peut vous chanter le rythme qui palpite dans tout espace, mais il ne pourrait vous donner l'oreille qui saisit le rythme, ni la voix qui lui fait écho.

Et celui qui est versé dans la science des nombres peut vous parler des confins du mesurable, mais ne saurait vous y conduire.

Car la vision d'un homme ne prête pas ses ailes à un autre homme.

Et comme chacun de vous se tient seul dans le savoir de Dieu, ainsi chacun de vous doit rester seul dans sa connaissance de Dieu et dans sa compréhension du monde.

Gibran Khalil Gibran

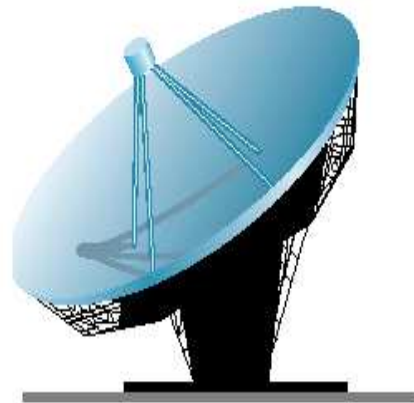
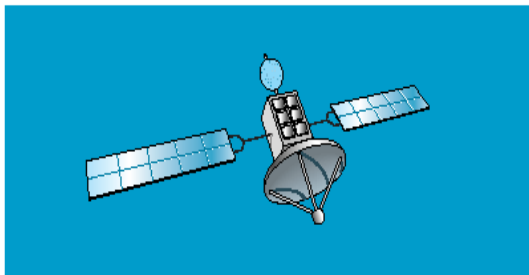


Chapitre 9

Devoirs

On propose cinq devoirs corrigés qui constituent une base appropriée pour réaliser une auto-évaluation vigoureuse des connaissances acquises. Ils permettent de mieux apprécier les résultats fondamentaux de modélisation, de stabilité, d'analyse des asservissements et de synthèse modale qui ont été présentés d'une manière compréhensive tout au long de cet ouvrage en adoptant une approche pragmatique au sens de l'ingénierie des systèmes. Une attention particulière a été accordée aux aspects fondamentaux. Les aspects pratiques seront particulièrement développés dans les bureaux d'études de cet enseignement.

<i>DEVOIR</i>	<i>Titre</i>	<i>Page</i>
1	<i>Les bases élémentaires</i>	183
2	<i>Commande avec modèle interne</i>	192
3	<i>Analyse d'un asservissement</i>	198
4	<i>Synthèse modale</i>	208
5	<i>Synthèse des asservissements industriels</i>	213



DEVOIR 1 : LES BASES ELEMENTAIRES

La motivation principale de ce devoir est une évaluation des connaissances élémentaires du cours, en l'occurrence l'opérateur retard, la modélisation et la stabilité. Pour ce faire, on demande de traiter les questions suivantes en utilisant les notations du cours.

- 1) Décrire brièvement les incidences de l'échantillonnage et le principal atout du contexte de synthèse des systèmes échantillonnés par rapport à celui des systèmes continus en précisant la relation de passage associée.
- 2) Comment spécifier la période d'échantillonnage dans le cas d'un asservissement dont les performances dynamiques sont caractérisées par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω_r ? Préciser si un filtre anti-recouvrement est nécessaire et si oui donner sa fonction de transfert.
- 3) Préciser les relations principales entre les représentations du système continu et celles du système échantillonné sous-jacent dans le cas d'un système continu sans retard.
- 4) Déterminer la fonction de transfert du systèmes échantillonné correspondant au système continu décrit par la fonction de transfert

$$G_c(s) = e^{-\tau_d s} \frac{B(s)}{A(s)} \quad / \quad \tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e \quad \text{avec } d \in \mathcal{N} \text{ et } 0 \leq \eta < 1$$

Etudier la configuration des pôles et des zéros du système échantillonné dans le cas

$$d = 0, \quad B(s) = a \quad \text{et} \quad A(s) = s + a \quad \text{avec } a > 0.$$

On précisera ce qui se passerait lorsque le scalaire η tends vers 0 ou 1.

- 5) Déterminer la réponse impulsionnelle d'un système échantillonné issu d'un système continu exhibant un retard pur τ_d que l'on peut exprimer en fonction de la période d'échantillonnage comme suit $\tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e$ avec $d \in \mathcal{N}$ et $0 \leq \eta < 1$. On précisera la relation entre la réponse impulsionnelle (resp. la réponse harmonique) et la fonction de transfert d'un système.
- 6) Montrer que la fonction de transfert d'un système échantillonné peut se récrire sous la forme d'une fraction rationnelle

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d-1} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

En déduire l'équation aux différences du système échantillonné et préciser sa configurations des pôles et zéros.

- 7) Préciser les relations entre la réalisation d'état, la fonction de transfert d'un système et l'équation aux différences d'un système.
- 8) Donner la configuration modale d'un système et indiquer sa relation avec la configuration de ses pôles. On traitera les exemples suivants

$$\left(F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0] \right)$$

et

$$\left(\bar{F} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{H} = [0 \ 1] \right)$$

- 9) Donner les équations aux différences décrivant des générateurs des perturbations du type échelon (resp. harmonique de pulsation connue ω), i.e. $v(t) = v\alpha(t)$ (resp. $v(t) = v\sin(\omega t)\alpha(t)$), où v désigne l'amplitude des perturbations qui est supposée inconnue.
- 10) Considérons un système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z) = \frac{(z - 1)(z^2 - 2\cos(\beta)z + 1)}{z^2(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ et } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- Donner les configurations des pôles et des zéros du système.
- Etudier sa stabilité en fonction des scalaires α_1 et α_2 comme l'indique le tableau suivant. On utilisera les acronymes *SAS*, *SMS* et *SINS* pour désigner respectivement que le système est stable, marginalement stable et instable.

	$ \alpha_2 > 1$	$\alpha_2 = 1$	$ \alpha_2 < 1$
$ \alpha_1 > 1$			
$\alpha_1 = 1$			
$ \alpha_1 < 1$			

- Supposons que le système est stable, préciser la classe des entrées asymptotiquement rejetées en sortie.

- 11) Considérons une cascade composée de deux sous-systèmes comme le montre la figure 9.1.

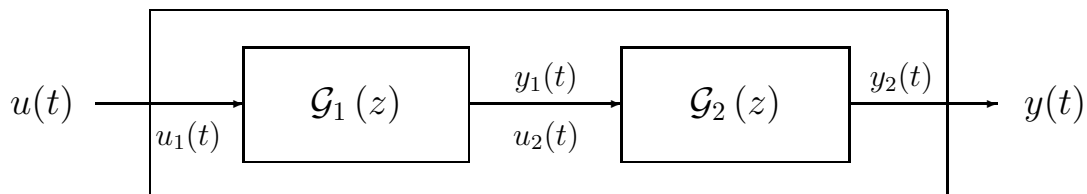


FIGURE 9.1 – Interconnexion en cascade

Et supposons que les sous-systèmes sont décrits par les fonctions de transfert respectivement données par

$$\mathcal{G}_1(z) = \frac{B_{\sigma_1}(z)}{A_{\sigma_1}(z)} \text{ avec } A_{\sigma_1}(z) \in \mathbb{R}_{us}(z) \text{ et } \mathcal{G}_2(z) = \frac{B_{\sigma_2}(z)}{A_{\sigma_2}(z)} \text{ avec } A_{\sigma_2}(z) \in \mathbb{R}_{sa}(z)$$

Donner la condition requise pour que la sortie de la cascade soit asymptotiquement nulle, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} y_m(t) = 0$, lorsque son entrée est une impulsion d'amplitude v inconnue, soit $u(t) = v\delta(t)$

- 12) Considérons un système stable et supposons que son entrée est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie. Quelle est la nature de la sortie du système ? On précisera la condition requise sur le système pour que cette sortie soit assimilable à un zéro ingénieur.

DEVOIR 1 : UNE SOLUTION !

- 1) On distingue trois incidences de l'échantillonnage. La première incidence est l'étalement du spectre du signal continu jusqu'à l'infini conformément au résultat fondamental d'analyse spectrale. La seconde incidence relève d'une complexité structurelle des systèmes échantillonnés, en l'occurrence l'introduction d'un retard pur d'une période d'échantillonnage, dans le cas où le système continu est strictement propre, et d'un ensemble de zéros supplémentaires. Néanmoins, le problème du retard, qui engendre un problème de dimension infinie dans le contexte des systèmes continus, est transformé en un problème de dimension finie et peut être ainsi aisément traité dans le contexte des systèmes échantillonnés.
- 2) Compte tenu des performances dynamiques requises, le système asservi a une bande passante caractérisée par une pulsation maximale qui n'est autre que la pulsation propre des modes dominants de la dynamique de régulation, soit ω_r . On peut alors choisir la période d'échantillonnage comme suit

$$\omega_r T_e < \pi \quad \longrightarrow \quad \omega_r T_e \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Le filtre anti-recouvrement permet de recouvrir un contexte favorable à l'application du théorème de Shannon, i.e. un spectre borné du signal à échantillonner. Il est donc nécessaire si la bande passante du capteur est relativement large par rapport à celle du système asservi. On utilisera pour ce faire un filtre de fonction de transfert

$$\mathcal{FAR}(s) = \left(\frac{\omega_r^2}{s^2 + 2\omega_r s + \omega_r^2} \right)^\ell \quad \text{avec } \ell \geq 2$$

- 3) Considérons un système continu décrit par sa réponse impulsionnelle $\{g_c(t)\}$, sa fonction de transfert $\mathcal{G}_c(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ et sa réalisation d'état (F, G, H, E) . La réponse impulsionnelle, la fonction de transfert et la réalisation d'état du système échantillonné sous-jacent sont respectivement données par

$$\{g(kT_e)\}_{k \geq 1} \quad \text{avec } g(kT_e) = \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} g_c(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{coind}(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}}) \quad \text{avec } g_{coind}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_c(s)}{s}\right),$$

et

$$F = e^{F_c T_e}, \quad G = \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \tau} d\tau \right) G_c, \quad H = H_c \quad \text{et} \quad E = E_c$$

- 4) La relation entre la fonction de transfert d'un système continu et celle du système échantillonné sous-jacent

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{coind}(kT_e - \tau_d)\}_{k \in \mathbb{N}})$$

où $\{g_{coind}(t)\}$ n'est autre que la réponse indicielle du système sans retard pur, soit

$$g_{coind}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{B(s)}{sA(s)} \right)$$

Et compte tenu de l'expression du retard pur du système, i.e. $\tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e$, on aura

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{1}{z^{d+1}} \mathcal{Z} (\{g_{coind}(t + \eta T_e)\}_{k \in \mathbb{N}})$$

Dans le cas particulier considéré, on a

$$g_{coind}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{a}{s(s+a)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} (\{g_{coind}(t + \eta T_e)\}) &= \frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-a\eta T_e}}{z - e^{-aT_e}} \\ &= \frac{z((1 - e^{-a\eta T_e})z + (e^{-a\eta T_e} - e^{-aT_e}))}{(z-1)(z - e^{-aT_e})} \end{aligned}$$

La fonction de transfert échantillonnée recherchée est alors donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \frac{(1 - e^{-a\eta T_e})z + (e^{-a\eta T_e} - e^{-aT_e})}{z(z - e^{-aT_e})}$$

Outre le retard pur d'une période d'échantillonnage intrinsèque au bloqueur d'ordre zéro, le retard fractionnaire induit un zéro auxiliaire dans la fonction de transfert échantillonnée qui vérifie les conditions aux limites suivantes

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \zeta = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta = -\infty$$

5) Rappelons que la réponse impulsionnelle d'un système échantillonnée est donnée par

$$\{g(kT_e)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ avec } g(kT_e) = \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} g_c(\tau) d\tau$$

Et comme le système exhibe un retard pur que l'on peut exprimer comme suit $\tau_d = (d+1)T_e + \eta T_e$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \eta < 1$, on aura

$$g(\ell T_e) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ell \in [0, d] \\ \int_{(d+1-\eta)T_e}^{(d+1)T_e} g_c(\tau) d\tau & \text{pour } \ell = d+1 \\ \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau & \text{pour } \ell > d+1 \end{cases}$$

La relation entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système est

donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{Z}(\{g(kT_e)\})$$

Quant à la relation entre la réponse harmonique et la fonction de transfert d'un système, elle est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{F}(\{g(kT_e)\}) = \mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \text{ si le système est stable}$$

6) Compte tenu de l'expression de la réponse impulsionnelle du système échantillonné, on a

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=d+1}^{\infty} g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e)$$

Et on peut en déduire aisément que la transformée en z de la séquence de sortie du système est reliée à celle de sa séquence d'entrée par la relation

$$Y(z) = \left(\sum_{\ell=d+1}^{\infty} g(\ell T_e) z^{-\ell} \right) U(z)$$

On retrouve la fonction de transfert du système échantillonné que l'on peut exprimer à partir de la fonction de transfert sous la forme d'une fraction rationnelle en z^{-1}

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

puisqu'on peut toujours effectuer une division euclidienne dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[z^{-1}]$ et que les $d+1$ premiers éléments de cette division sont nuls, i.e. $g(\ell T_e) = 0$ pour $\ell \in [0, d]$. Par ailleurs, la fonction de transfert du système peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle en z comme suit

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^n}{z^n} \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \text{ avec } n = \max(na, nb + d + 1)$$

soit

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \triangleq \mathcal{G}(z)$$

avec

$$A_\sigma(z) = \begin{cases} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb+d+1-na} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

$$B_\sigma(z) = \begin{cases} z^{na-nb-d-1} z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

On peut alors postuler que

- La configuration des zéros du système est constituée des racines en z du polynôme $B(z^{-1})$ modulo un nombre de zéros en zéro égal au degré relatif de la fonction de transfert, soit $r \triangleq na - nb - d - 1$, si $na \geq nb + d + 1$
 - La configuration des pôles du système est constituée des racines en z du polynôme $A(z^{-1})$ modulo un nombre de pôles en zéro égal au degré relatif de la fonction de transfert, soit $r \triangleq nb + d + 1 - na$, si $na < nb + d + 1$
- 7) Le passage d'une réalisation d'état (F, G, H, E) d'un système à sa fonction de transfert $\mathcal{G}(z)$ peut être déduit naturellement en prenant la transformée en z des équations d'état et de sortie tout en supposant que les conditions initiales son nulles, soit

$$\mathcal{G}(z) = H (zI_n - F)^{-1} G + E = \frac{H (zI_n - F)^{-1} G + \det (zI_n - F) E}{\det (zI_n - F)}$$

Quant au passage d'une fonction de transfert à la représentation d'état, il n'est pas trivial compte tenu de la pluralité de la représentation d'état. On peut toutefois choisir les réalisations canoniques, i.e. les formes canoniques commandable et observable. Et pour la passage d'une fonction de transfert d'un système à son équation aux différences, il suffit d'un simple retour au domaine temporel comme suit

$$Y(z) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z)$$

$$\Leftrightarrow A(z^{-1})Y(z) = z^{-d-1} B(z^{-1})U(z)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Z} (A(q^{-1})y(kT_e)) = \mathcal{Z} (q^{-d-1} B(q^{-1})u(kT_e))$$

$$\Leftrightarrow A(q^{-1})y(kT_e) = B(q^{-1})u((k - d - 1)T_e)$$

- 8) La configuration des modes d'un système n'est autre que le spectre de sa matrice d'état, soit $\mathcal{CM}(\mathcal{SYS}) = \mathcal{V}(F)$, et n'est pas nécessairement égale à sa configuration des pôles puisque $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{CM}(\mathcal{SYS})$. Dans le cas des exemples considérés, on a

$$\mathcal{CM}((F, G, H)) = \{1, 1\} \neq \mathcal{CP}((F, G, H)) = \{1\}$$

et

$$\mathcal{CM}((\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})) = \{1, 1\} = \mathcal{CP}((\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}))$$

- 9) Compte tenu des transformées en z des perturbations considérées, i.e.

$$\mathcal{Z}(v\alpha(t)) = v \frac{z}{z-1}$$

et

$$\mathcal{Z}(v \sin(\omega t) \alpha(t)) = \frac{v \sin(\omega) z}{z^2 - 2 \cos(\omega) z + 1}$$

on peut en déduire aisément les équations aux différences décrivant leurs modèles générateurs

$$(1 - q^{-1}) v(t) = v\delta(t)$$

et

$$(1 - 2\cos(\beta)q^{-1} + q^{-2})v(t) = v\sin(\beta)\delta(t - 1)$$

10) Considérons la classe des systèmes décrite par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z) = \frac{(z - 1)(z^2 - 2\cos(\beta)z + 1)}{z^2(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ et } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- La configuration pôles-zéros du système est donnée par

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(z)) = \{1, e^{j\beta}, e^{-j\beta}\} \text{ et } \mathcal{CP}(\mathcal{G}(z)) = \{0, 0, \alpha_1, \alpha_2\}$$

- Le système est stable, marginalement stable et instable selon les valeurs de ses paramètres comme l'indique le tableau suivant

	$ \alpha_2 > 1$	$\alpha_2 = 1$	$ \alpha_2 < 1$
$ \alpha_1 > 1$	<i>SINS</i>	<i>SINS</i>	<i>SINS</i>
$\alpha_1 = 1$	<i>SINS</i>	<i>SINS</i>	<i>SMS</i>
$ \alpha_1 < 1$	<i>SINS</i>	<i>SMS</i>	<i>SAS</i>

- Si le système est stable, alors les entrées du type échelon et d'amplitude inconnue et harmonique de pulsation $\frac{\beta}{T_e}$ et d'amplitude et de phase inconnues sont asymptotiquement rejetées en sortie.

11) La fonction de transfert de la cascade de la figure 9.1 est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_2(z) \cdot \mathcal{G}_1(z) = \frac{B_{\sigma_2}(z)}{A_{\sigma_2}(z)} \cdot \frac{B_{\sigma_1}(z)}{A_{\sigma_1}(z)}$$

Et comme les fonctions de transfert sont irréductibles et que $A_{\sigma_2}(z) \in \mathbb{R}_{us}(z)$ et $A_{\sigma_1}(z) \in \mathbb{R}_{sa}(z)$, on peut postuler aisément que la réponse impulsionnelle de la cascade est asymptotiquement nulle si et seulement si $A_{\sigma_2}(z)$ divise $B_{\sigma_1}(z)$.

12) La réponse d'un système stable à un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie. Et si ce système est un filtre passe bas, alors la sortie du filtre peut être assimilée à un zéro ingénieur. On notera qu'un système stable ayant un zéro en -1 est un filtre passe bas.

DEVOIR 2 : COMMANDE AVEC MODELE INTERNE

On se propose d'effectuer une analyse ingénieur des performances nominales des systèmes de commande avec modèle interne que l'on peut représenter comme l'indique la figure 9.2. Le système est décrit par

$$\text{SYS} \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_\sigma(q^{-1})u(t) + \mathcal{G}_p(q^{-1})v(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_p(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

alors que le filtre de robustification est décrit par les fonction de transfert

$$\mathcal{F}(z^{-1}) = \frac{F_n(z^{-1})}{F_d(z^{-1})}$$

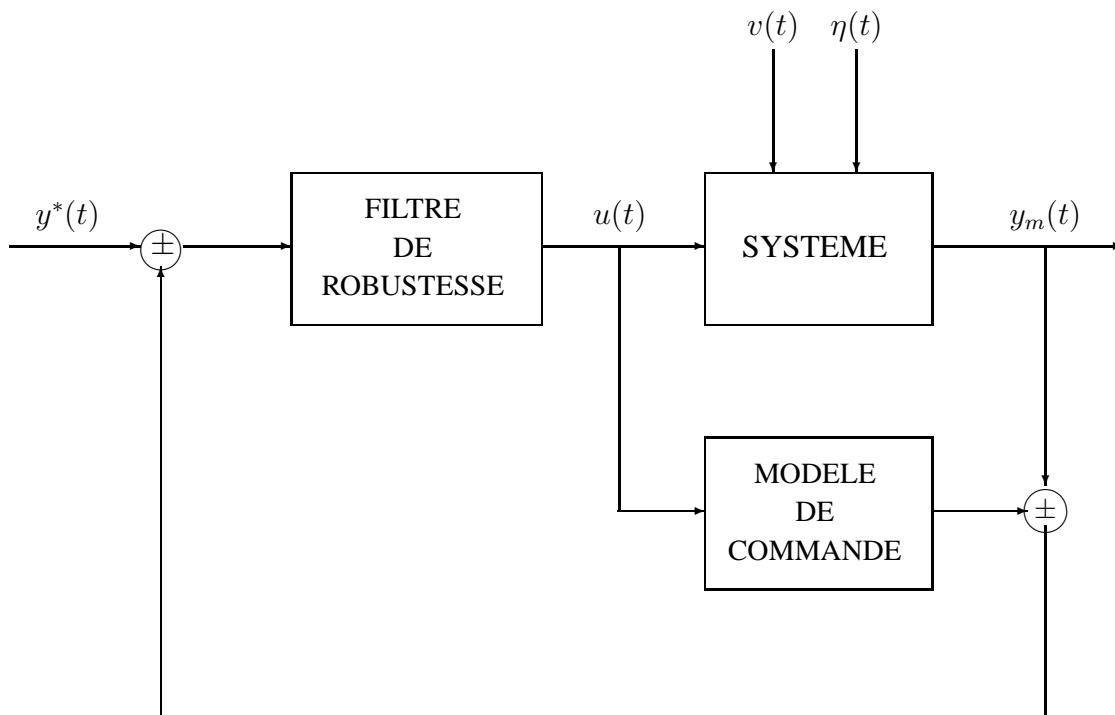


FIGURE 9.2 – Système de commande avec modèle interne

On peut ainsi apprécier les propriétés fondamentales qui constituent l'essence de la popularité de la commande avec modèle interne tout en mettant en évidence ses limitations du point de vue de son applicabilité. Pour ce faire, on suggère de procéder comme suit.

- 1) Donner la loi de commande avec modèle interne et en déduire la fonction de transfert du régulateur.
- 2) Donner les équations du comportement entrée-sortie du système de commande avec modèle interne et en déduire les conditions de stabilité et les dynamiques de poursuite et de régulation sous-jacentes. On précisera la dynamique de régulation dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en sortie : une hypothèse usuelle pour les fans de la commande avec modèle .
- 3) Préciser la classe perturbations que l'on peut parfaitement rejeter ainsi que la classe des séquences de référence que l'on peut poursuivre parfaitement dans le cas où le gain statique du filtre de robustification est égal à l'inverse du gain statique du modèle de commande du système.
- 4) Donner les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande avec modèle interne et préciser comment spécifier la filtre de robustification pour réduire la sensibilité du système de commande aux bruits de mesure inéluctables.
- 5) Etablir un bilan ingénieur sur la commande avec modèle interne à partir des résultats fondamentaux qui ont été obtenus tout au long de cette analyse.

DEVOIR 2 : UNE SOLUTION

- 1) La loi de commande avec modèle interne peut être facilement obtenue à partir du diagramme fonctionnel du système de commande correspondant, soit

$$\mathcal{CMI} \{ (1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})) U(z) = \mathcal{F}(z^{-1}) (Y^*(z) - Y_m(z))$$

Il s'agit d'un régulateur à un degré de liberté dont la fonction de transfert est donnée

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{\mathcal{F}(z^{-1})}{1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})}$$

que l'on peut récrire sous la forme usuelle

$$\mathcal{CMI} \{ R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

avec

$$R_d(q^{-1}) = A(q^{-1})F_d(q^{-1}) - q^{-d-1}B(q^{-1})F_n(q^{-1})$$

$$R_n(q^{-1}) = A(q^{-1})F_n(q^{-1})$$

$$T_r(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1})$$

- 2) Le comportement entrée-sortie du système de commande est obtenu en éliminant respectivement la sortie et l'entrée entre les équations du régulateur et du système. On aura alors

$$SCMI \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) y^*(t) + \mathcal{G}_{sp}(q^{-1}) v(t) + \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) \eta(t) \\ u(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1}) y^*(t) + \mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) v(t) + \mathcal{G}_{eb}(q^{-1}) \eta(t) \end{cases}$$

où les $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$ pour $(i, j) \in [r, p, b] \times [s, r]$ désignent les différentes fonctions de transfert du système asservis données par

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_{sp}(q^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}, \quad \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) = -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_{er}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) = -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{eb}(q^{-1}) = -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

où $P_c(z^{-1})$ n'est autre que le polynôme caractéristique donnée par

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(q^{-1}) = A(q^{-1})A(q^{-1})F_d(q^{-1})$$

Les pôles du système sont invariants par une loi de commande avec modèle interne ; ils doivent être nécessairement situés dans le domaine de stabilité et de performances, i.e. $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$. Et il en est de même pour le filtre de robustification qui représente le paramètre de synthèse de la commande avec modèle interne, i.e. $\mathcal{CP}(\mathcal{F}(z^{-1})) \subset \mathcal{D}_{sp}$.

Compte tenu des expressions des polynômes $R_n(z^{-1})$, $R_d(z^{-1})$ et $P_c(z^{-1})$ et de la stabilité du système de commande, les dynamiques de poursuite et de régulation sont respectivement données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

et

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1}) (A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1}))}{A(z^{-1})A(z^{-1})F_d(z^{-1})}$$

Et dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en sortie, i.e. $E(z^{-1}) = A(z^{-1})$, la dynamique de régulation est réduite comme suit

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1})}$$

- 3) Dans le cas où le gain statique du filtre de robustification est égal à l'inverse du gain statique du modèle de commande du système, on aura

$$\mathcal{F}(1) = \frac{1}{\mathcal{G}(1)} \iff R_d(1) = A(1)F_d(1) - B(1)F_n(1) = 0$$

Cette propriété stipule que le régulateur admet un pôle en un, i.e sa fonction de transfert peut se récrire comme suit

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})F_n(z^{-1})}{(1 - z^{-1})S(z^{-1})}$$

Le système de commande avec modèle interne réalise naturellement un rejet asymptotique des perturbations du type échelon, i.e. une séquence d'échelons d'amplitudes inconnues préalablement filtrées. Par ailleurs, on peut en déduire aisément l'équation de l'erreur de poursuite du système de commande à partir de son équation de comportement en sortie, soit

$$e(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})u^*(t) - \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) - \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)$$

avec

$$\mathcal{G}_c(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})(1 - z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

On peut alors conclure qu'un système de commande avec modèle interne permet de réaliser asymptotiquement une poursuite parfaite des séquences de référence de type échelon en présence des perturbations de type échelon. Ces performances en poursuite pourront être affinées si tous les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité et de

performances adopté, i.e. $B(z^{-1}) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sp}$. En effet, on pourrait alors spécifier le filtre de robustification de manière à réduire la dynamique de poursuite à un filtre indépendant du système comme le montre la propriété suivante.

$$\mathcal{F}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})F(1)}{B(z^{-1})F(z^{-1})} \implies \mathcal{DP}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{F(1)}{F(z^{-1})}$$

On peut ainsi réaliser une poursuite parfaite de la séquence de référence filtrée définie par

$$y_f^*(t) = \frac{F(1)}{F(q^{-1})} y^*(t - d - 1)$$

- 4) Les fonctions de sensibilité usuelles nominales qui en résultent sont données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = 1 - \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})$$

$$\mathcal{GS}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1}) (1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1}))$$

$$\mathcal{RS}(z^{-1}) = \mathcal{F}(z^{-1})$$

Il apparaît clairement que les performances nominales et la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation inévitables des systèmes de commande avec modèle interne peuvent être affinées en choisissant judicieusement le filtre de robustification. Ce dernier doit être un passe bas pour pouvoir réduire la sensibilité du système de commande aux bruits de mesure.

- 5) On peut faire un bilan ingénieur sur la commande avec modèle interne pour mieux appréhender ses atouts et ses limitations. Les atouts résultent des propriétés remarquables suivantes.

- La simplicité de mise en œuvre qui résulte naturellement de la simplicité du principe de la commande avec modèle interne comme le montre la figure 9.2. Un modèle de commande est mis en parallèle avec le système pour estimer les perturbations qui affectent le fonctionnement du système en supposant qu'elles peuvent être ramenées en sortie. Ces perturbations sont compensées par une contre réaction appropriée utilisant un filtre de robustification
- La spécification de la structure du filtre de robustification est triviale : un filtre passe bas dont le gain statique est égal à l'inverse du gain statique du modèle de commande et dont les pôles sont situés dans le domaine de stabilité et de performances, i.e.

$$\mathcal{F}(z^{-1}) \in \mathcal{EFPB} \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z^{-1})) \in \mathcal{D}_{sp} \text{ et } \mathcal{F}(1) = \frac{1}{\mathcal{G}(1)}$$

Quant à la bande passante du filtre, elle est spécifiée de manière à réaliser un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles.

- La compensation parfaite des perturbation du type échelon et la poursuite parfaite des séquences de référence du type échelon : des performances génériques d'un régulateur avec retour unitaire dotée d'une action intégrale.
- Une robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation inéluctables en spécifiant judicieusement le filtre de robustification, en l'occurrence l'insensibilité aux bruits de mesure avec un Filtre de robustification du type passe bas.

Quant aux limitations, elles concernent principalement les conditions d'applicabilité aussi bien sur la classe des systèmes à commander que sur la classe des perturbations que l'on peut compenser.

- Les pôles du système doivent être situés dans le domaine de stabilité et de performances et son gain statique ne doit pas être nul, i.e.

$$\left(\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \in \mathcal{D}_{sp} \right) \text{ et } \left(z \in \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \implies z \neq 0 \right)$$

La première condition résulte naturellement de l'invariance des pôles du système par une loi de commande avec modèle interne, alors que la seconde condition est une contrainte usuelle des performances en poursuite, i.e. $\mathcal{DP}(0) = 1$.

- Les perturbations doivent être du type échelon puisque la seule propriété générique du régulateur est qu'il admet une action intégrale.

DEVOIR 3 : ANALYSE D'UN ASSERVISSEMENT

Considérons le système asservi donné par la figure 9.3 où le système et le générateur des perturbations sont respectivement décrits par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

et

$$\left(\mathcal{H}_e(z^{-1}) = \frac{C_e(z^{-1})}{D_e(z^{-1})}, \mathcal{H}_s(z^{-1}) = \frac{C_s(z^{-1})}{D_s(z^{-1})} \right)$$

et le régulateur, le générateur de la séquence de référence et le générateur de la séquence de points de consigne sont respectivement données par

$$\left(\mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \mathcal{R}_{tra}(z^{-1}) = \frac{T_r(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} \right)$$

avec

$$\left(\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}, \mathcal{H}^*(z^{-1}) = \frac{C^*(z^{-1})}{D^*(z^{-1})} \right)$$

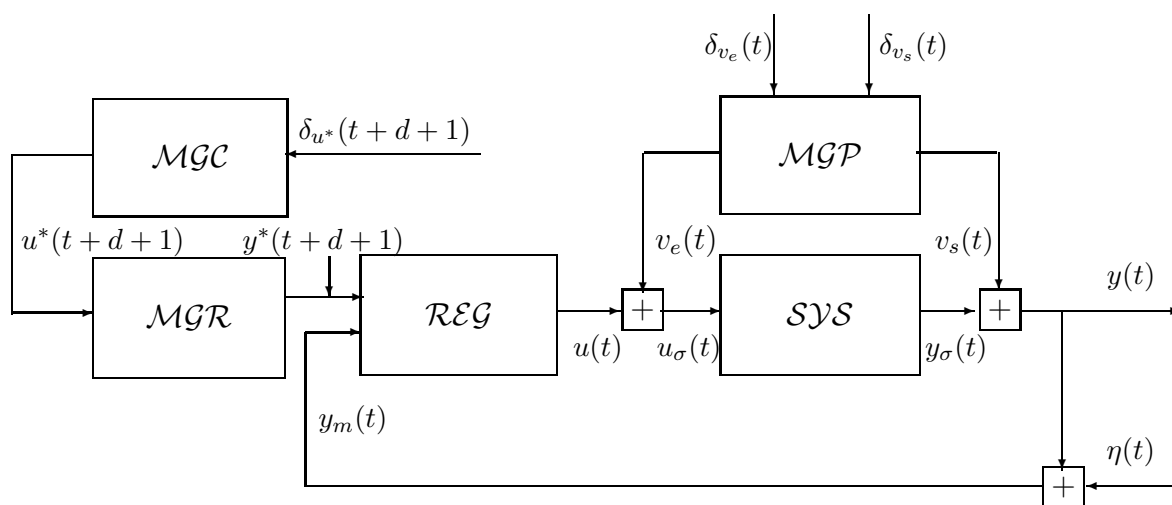


FIGURE 9.3 – Système asservi

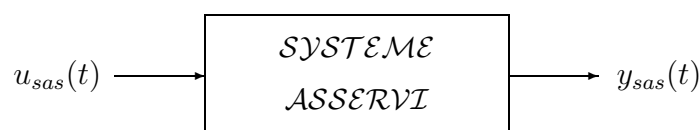


FIGURE 9.4 – Système asservi

Ce système asservi peut être représenté comme l'indique la figure 9.4 où $\{u_{sas}(t)\}$ et $\{y_{sas}(t)\}$ représentent les entrées et les sorties sont respectivement données par

$$u_{sas}(t) \triangleq \begin{pmatrix} y^*(t+d+1) \\ v(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_{sas}(t) \triangleq \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$v(t) \triangleq \begin{pmatrix} v_e(t) \\ v_s(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_\sigma(t) = u(t) + v_e(t)$$

On se propose d'étudier ce système asservi conformément aux résultats développés tout au long de l'enseignement des systèmes asservis, en utilisant les mêmes notations. Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit

- 1) Donner les équations aux différences du système, du régulateur et du système de commande.
- 2) Donner la fonction de transfert du système asservi $\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) : U_{sas}(z) \rightarrow Y_{sas}(z)$ et exprimer ses éléments en fonction des fonctions de sensibilité usuelles d'un système de commande si possible, soit $\mathcal{S}(z^{-1})$, $\mathcal{T}(z^{-1})$, $\mathcal{GS}(z^{-1})$ et $\mathcal{RS}(z^{-1})$.
- 3) Etudier la stabilité du système asservi et en déduire la classe des régulateurs qui réalisent les performances dynamiques requises du système asservi.
- 4) Préciser les équations aux différences des composantes du comportement entrée-sortie du système asservi respectivement issues de la séquence de référence, des perturbations et du bruit de mesure, soit $\{y_r(t)\}$, $\{y_p(t)\}$, $\{y_b(t)\}$, $\{u_r(t)\}$, $\{u_p(t)\}$ et $\{u_b(t)\}$.
- 5) Préciser les dynamiques de poursuite et de régulation du système asservi et les conditions d'insensibilité aux bruits de mesure.
- 6) Préciser la structure du régulateur qui permet de réaliser les propriétés suivantes

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{T}(e^{j\omega T_e}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{RS}(e^{j\omega T_e}) = 0$$

- 7) Compléter le tableau 9.1 qui donne des propriétés fondamentales d'un asservissement tout en précisant les conditions requises et la structure du régulateur pour leur réalisation.
- 8) Proposer un régulateur qui permet de concevoir un asservissement insensible aux bruits de mesure et réalisant une précision maximale robuste, par rapport aux incertitudes du modèle de commande, avec des dynamiques de régulation et de poursuite respectivement caractérisées par des modes de pulsation propre ω_r et ω_p et d'amortissements ζ_r et ζ_p . On précisera les conditions requises sur le système.

♡	Propriétés	Conditions requis	Structures du Régulateur
<i>SPD</i>			
<i>IBM</i>			
<i>CPP</i>			
<i>DSC</i>			
<i>PM</i>			
<i>PP</i>			
<i>PSP</i>			

TABLE 9.1 – Classe des régulateurs admissibles

DEVOIR 3 : UNE SOLUTION

1) Le diagramme fonctionnel de l'asservissement considéré donne

$$Y_\sigma(z) = \mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) U_\sigma(z) \iff A(q^{-1})y_\sigma(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})u_\sigma(t)$$

avec

$$u_\sigma(t) = u(t) + v_e(t) \quad \text{et} \quad y(t) = y_\sigma(t) + v_s(t)$$

Et compte tenu des modèles générateurs des perturbations, on aura

$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})u(t) + q^{-d-1}B(q^{-1})v_e(t) + A(q^{-1})v_s(t) \\ D_e(q^{-1})v_e(t) = C_e(q^{-1})v_e\delta(t) \\ D_s(q^{-1})v_s(t) = C_s(q^{-1})v_s\delta(t) \end{cases}$$

Quant aux équations du régulateur, on peut toujours les écrire comme suit

$$\text{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})u^*\delta(t) \end{cases}$$

Les équations entrée-sortie du système asservi sont obtenues en éliminant respectivement l'entrée et la sortie du système entre les équations du système SYS et du régulateur REG . L'élimination de l'entrée peut être obtenue en opérant sur l'équation du système par $R_d(q^{-1})$ tout en utilisant l'équation du régulateur. On aura alors

$$\begin{aligned} A(q^{-1})R_d(q^{-1})y(t) &= q^{-d-1}B(q^{-1}) (R_d(q^{-1})u_\sigma(t)) + R_d(q^{-1}) (A(q^{-1})v_s(t)) \\ &= q^{-d-1}B(q^{-1}) (R_d(q^{-1}) (u(t) + v_e(t))) + A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\ &= q^{-d-1}B(q^{-1}) (T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) - R_n(q^{-1}) (y(t) + \eta(t))) \\ &\quad + q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) + A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\ &= B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t) - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})y(t) \\ &\quad + q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) + A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\ &\quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} P_c(q^{-1})y(t) &= q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ &\quad + q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) + A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\ &\quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

où $P_c(q^{-1})$ désigne le polynôme caractéristique du système asservi donné par

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

Quant à l'élimination de la sortie, elle peut être obtenue en opérant sur l'équation du régulateur par $A(q^{-1})$ tout en utilisant l'équation du système. On aura alors

$$\begin{aligned} A(q^{-1})R_d(q^{-1})u(t) &= A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})(y(t) + \eta(t)) \\ &= A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ &\quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})u(t) - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})v_e(t) \\ &\quad - A(q^{-1})R_n(q^{-1})v_s(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} P_c(q^{-1})u(t) &= A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ &\quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})v_e(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})v_s(t) \\ &\quad - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{aligned}$$

Le système asservi est alors décrit par les équations de son comportement entrée-sortie

$$\mathcal{SAS} \left\{ \begin{array}{l} P_c(q^{-1})y(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ \quad + q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) + A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\ \quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\ P_c(q^{-1})u(t) = A(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ \quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})v_e(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})v_s(t) \\ \quad - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \end{array} \right.$$

- 2) Compte tenu des équations du système asservi, on peut en déduire aisément sa fonction de transfert

$$\mathcal{SAS} \left\{ Y_{sas}(z) = \mathcal{G}_{sas}(z)U_{sas}(z) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}_{sas}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{spe}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sps}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{epe}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{eps}(z^{-1}) & \mathcal{T}_{be}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

où les $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$ pour $(i, j) \in [s, e] \times [r, pe, ps, b]$ désignent les différentes fonctions de transfert du système asservi respectivement donnée par

$$\mathcal{FTSAS} \left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \triangleq + \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
\mathcal{G}_{spe}(z^{-1}) \triangleq + \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = + \mathcal{GS}(z^{-1}) \\
\mathcal{G}_{sps}(z^{-1}) \triangleq + \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = + \mathcal{S}(z^{-1}) \\
\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \triangleq - \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = - \mathcal{T}(z^{-1}) \\
\mathcal{G}_{er}(z^{-1}) \triangleq + \frac{A(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
\mathcal{G}_{epe}(z^{-1}) \triangleq - \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = - \mathcal{T}(z^{-1}) \\
\mathcal{G}_{eps}(z^{-1}) \triangleq - \frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = - \mathcal{RS}(z^{-1}) \\
\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \triangleq - \frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = - \mathcal{RS}(z^{-1})
\end{array} \right.$$

- 3) Le système asservi est asymptotiquement stable si et seulement ses modes, qui ne sont autres que les racines de son polynôme caractéristique, sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$\mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

avec

$$\mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) = \{\mu \in \mathbb{C} / P_c(\mu^{-1}) = 0\}$$

On peut en déduire naturellement que la classe des régulateurs réalisant les performances dynamiques requises du système asservi est caractérisée par

$$\mathcal{CRSP} = \left\{ \mathcal{R}_{reg}(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} / P_c(z^{-1}) \in \mathbb{R}_{sp}[z^{-1}] \right\}$$

- 4) Les composantes du comportement entrée-sortie du système asservi, issues de ses entrées, peuvent être mises en exergue en réécrivant ses équations différentielles sous la forme

$$\mathcal{SAS} \left\{ \begin{array}{l}
y(t) = y_r(t) + y_{pe}(t) + y_{ps}(t) + y_b(t) \\
u(t) = u_r(t) + u_{pe}(t) + u_{ps}(t) + u_b(t)
\end{array} \right.$$

avec

$$\begin{array}{l}
\left. \begin{array}{l}
P_c(q^{-1})y_r(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})T_r(q^{-1})y^*(t+d+1) \\
P_c(q^{-1})y_{pe}(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) \\
P_c(q^{-1})y_{ps}(t) = A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\
P_c(q^{-1})y_b(t) = -q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\
P_c(q^{-1})u_r(t) = A(q^{-1})R_n(q^{-1})y^*(t+d+1) \\
P_c(q^{-1})u_{pe}(t) = -q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})v_e(t) \\
P_c(q^{-1})u_{ps}(t) = A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\
P_c(q^{-1})u_b(t) = -A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t)
\end{array} \right\} \text{CESAS}
\end{array}$$

On notera que les composantes du comportement entrée-sortie du système asservi peuvent se récrire sous la forme

$$\text{SAS} \left\{ \begin{array}{l}
y(t) = y_r(t) + y_p(t) + y_b(t) \text{ avec } y_p(t) = y_{pe}(t) + y_{ps}(t) \\
u(t) = u_r(t) + u_p(t) + u_b(t) \text{ avec } u_p(t) = u_{pe}(t) + u_{ps}(t)
\end{array} \right.$$

qui se distingue par un regroupement des composantes issues des perturbations d'entrée et de sortie.

- 5) La dynamique de poursuite du système asservi, par rapport à la séquence de consigne, est donnée par la fonction de transfert

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = z^{d+1} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T_r(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \times \frac{z^{-d-1}B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$$

alors que les dynamiques de régulation par rapport aux perturbations de charges en entrée, aux perturbations de charges en sortie et au bruit de mesure sont respectivement données par les composantes de fonction de transfert de transfert

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = [\mathcal{G}_{spe}(z^{-1}) \quad \mathcal{G}_{sps}(z^{-1})]$$

soit

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \left[\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \quad \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \right]$$

On distingue quatre invariants par rétroaction, notamment le retard du système $d+1$ et les zéros des fonctions de transfert du système et son environnement puisqu'on les retrouve dans les fonctions de transfert $\mathcal{G}_{sr}(z^{-1})$, $\mathcal{G}_{spe}(z^{-1})$ et $\mathcal{G}_{sps}(z^{-1})$ qui constituent des composantes des dynamiques de poursuite et de régulation du système asservi.

Par ailleurs, le système asservi est insensible aux bruits de mesure pourvu que les séquences $\{y_b(t)\}$ et $\{y_e(t)\}$ peuvent être assimilées à un zéro ingénieur. Une telle propriété est satisfaite si les fonctions de transfert $\mathcal{G}_{sb}(z^{-1})$ et $\mathcal{G}_{eb}(z^{-1})$ réalisent un filtrage passe-bas. Et comme $\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) = -\mathcal{T}(z^{-1})$, $\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) = -\mathcal{RS}(z^{-1})$ et que la fonction de sensibilité complémentaire réalise un filtrage passe-bas, on peut postuler qu'un système asservi est insensible aux bruits de mesure si la fonction de transfert $\mathcal{RS}(z^{-1})$ réalise un filtrage passe-bas.

6) Le régulateur associé à un asservissement réalisant les propriétés

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{T}(e^{j\omega T_e}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \mathcal{RS}(e^{j\omega T_e}) = 0$$

doit admettre un zéro en -1 . Cette propriété est satisfaite par un régulateur dont le polynôme $R_n(z^{-1})$ est factorisé comme suit

$$R_n(z^{-1}) = R(z^{-1})(1 + z^{-1})$$

7) On peut compléter aisément le tableau 9.1 en contemplant les éléments de la fonction de transfert du système asservi $\mathcal{G}_{sas}(s)$. En effet, on peut d'abord préciser aisément les propriétés fondamentales associées aux spécifications considérées et établir les conditions requises pour qu'elles soient satisfaites. On donnera ensuite la structure du régulateur appropriée pour satisfaire chacune des conditions requises. On utilisera les notations suivantes

$$D_{re}(z^{-1}) \triangleq \frac{D_e(z^{-1})}{\text{pgcd}(D_e(z^{-1}), B(z^{-1}))}$$

$$D_{rs}(z^{-1}) \triangleq \frac{D_s(z^{-1})}{\text{pgcd}(D_s(z^{-1}), A(z^{-1}))}$$

$$D_{rc}(z^{-1}) \triangleq \frac{D^*(z^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(z^{-1}), A(z^{-1}))}$$

$$D_{rp}(z^{-1}) \triangleq \text{ppcm}(D_{re}(z^{-1}), D_{rs}(z^{-1}))$$

8) Le problème d'asservissement considéré peut être traité à partir d'un régulateur avec retour unitaire donné par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) = R(q^{-1})D_c(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t)) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \end{cases}$$

avec

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm}(D_{re}(z^{-1}), D_{rs}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$$

Le choix du retour unitaire et du polynôme $D_r(z^{-1})$ permettent d'avoir un asservissement réalisant une précision maximale robuste dans le cas de la séquence de consigne considérée. Le qualificatif robuste est motivé par le fait que cette précision maximale est satisfaite tant que la stabilité du système asservi est préservée. Ceci n'est pas le cas d'une poursuite

semi parfaite qui dépend de la précision du modèle de commande. Quant au choix du polynôme $D_c(z^{-1})$, il est principalement motivé par des considérations d'insensibilité aux bruits.

La détermination des polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ peut être effectuée par une synthèse modale qui consiste en un assignement arbitraire des modes du système asservi, soit déterminer la paire polynomiale $(S(z^{-1}), R(z^{-1}))$ telle que

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1}) = M_d(z^{-1}) M_a(z^{-1})$$

où $M_d(z^{-1})$ et $M_a(z^{-1})$ ne sont autres que le polynôme du mode dominant qui caractérise les performances dynamiques requises et le polynôme associé des modes auxiliaires, soit

$$M_d(z^{-1}) = 1 - 2e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$M_a(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{nm-2} (1 - e^{-\gamma_i \zeta_r \omega_r T_e} z^{-1}) \text{ avec } \gamma_i \geq 2$$

On notera que cette synthèse est faisable pourvu que les polynômes $A(z^{-1})D_r(z^{-1})$ et $z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})$ soient premiers entre eux et que le degré du polynôme des modes est tel que $nm \leq na + nd_r + nb + nd_c + d$. L'équation polynomiale admet alors une solution de structure minimale unique caractérisée par $ns = nb + nd_c + d$ et $nr = na + nd_r - 1$ qui n'est autre que celle du système d'équations linéaires sous-jacent, soit

$$\mathcal{A} \mathcal{X} = \mathcal{M}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_o & 0 & 0 & \bar{b}_o & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \bar{a}_o & \vdots & & \bar{b}_o \\ \bar{a}_{n\bar{a}} & & \vdots & \bar{b}_{n\bar{b}} & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n\bar{a}} & 0 & 0 & \bar{b}_{n\bar{b}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} s_o \\ \vdots \\ s_{ns} \\ r_o \\ \vdots \\ r_{nr} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n\bar{a}+n\bar{b}-1} \end{bmatrix}$$

où \mathcal{A} désigne la matrice de Sylvester associée à la paire polynomiale $(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1}))$ avec

$$\bar{A}(z^{-1}) \triangleq A(z^{-1})D_r(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n\bar{a}} \bar{a}_i z^{-i}$$

$$\bar{B}(z^{-1}) \triangleq z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n\bar{b}} \bar{b}_i z^{-i}$$

$$M(z^{-1}) \triangleq \sum_{i=0}^{n\bar{a}+n\bar{b}-1} m_i z^{-i} \text{ avec } m_i = 0 \text{ pour } i > nm \text{ si } nm < n\bar{a} + n\bar{b} - 1$$

\heartsuit	Propriétés	Conditions requis	Structures du régulateur
SPD	$\mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{sp}$	$P_c(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[z^{-1}]$	
IBM	$\{y_b(t)\} \in SAZI$ et $\{e_b(t)\} \in SAZI$	$\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \in \mathcal{EFPB}$ et $\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \in \mathcal{EFPB}$	$D_c(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$
CPP	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ps}(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{pe}(t) = 0$	$D_e(z^{-1})$ divise $B(z^{-1})R_d(z^{-1})$ et $D_s(z^{-1})$ divise $A(z^{-1})R_d(z^{-1})$	$R_d(z^{-1}) = D_r(z^{-1})S(z^{-1})$ \uparrow $D_{rp}(z^{-1})$ \triangleq $ppcm(D_{re}(z^{-1}), D_{rs}(z^{-1}))$
DSC	$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0$	$D_{ind}(z^{-1})$ divise $R_n(z^{-1})$	$R_n(z^{-1}) = D_c(z^{-1})R(z^{-1})$ \uparrow $D_{ind}(z^{-1})$
PM	$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{pe}(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ps}(t) = 0$	$D_e(z^{-1})$ divise $B(z^{-1})R_d(z^{-1})$ et $D_s(z^{-1})$ (resp. $D^*(z^{-1})$) divise $A(z^{-1})R_d(z^{-1})$	$T_r(z^{-1}) = z^{-d-1}R_n(z^{-1})$ et $R_d(z^{-1}) = D_r(z^{-1})S(z^{-1})$ \uparrow $ppcm(D_{rp}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$
PP	$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = z^{-d-1}$	$\mathcal{CZ}(SYS) \subset \mathcal{D}_{sp}$	$T_r(z^{-1}) = \frac{P_c(z^{-1})}{B(z^{-1})}$
PSP	$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \beta z^{-d-1}B(z^{-1})$	$1 \notin \mathcal{CZ}(SYS)$	$T_r(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1})$

TABLE 9.2 – Propriétés fondamentales d'un asservissement

DEVOIR 4 : SYNTHESE MODALE

Considérons la classe des des systèmes continus dont la dynamique peut être raisonnablement décrite par un oscillateur et dont toutes les perturbations de charge sous-jacentes peuvent être ramenées en entrée et sont du type échelon. Le comportement entrée-sortie de cette classe de systèmes est décrite par l'équation différentielle

$$OSC \left\{ \begin{array}{l} (\rho^2 + \omega^2) y(t) = \omega^2 (u(t) + v(t)) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ \rho v(t) = v\delta(t) \end{array} \right.$$

où $\{u(t)\}$, $\{y(t)\}$ et $\{y_m(t)\}$ désignent respectivement l'entrée, la sortie et la sortie mesurée du système, alors que ω n'est autre que la pulsation propre de l'oscillateur. On se propose de concevoir un asservissement en adoptant une approche modale réalisant trois spécifications remarquables suivantes.

- S1. Une compensation des perturbations caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω , i.e. la pulsation propre du système.
- S2. Une poursuite caractérisée par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre 0.5ω .
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.

Pour simplifier les choses, on suggère de procéder progressivement en utilisant les aspects de synthèse suivants

- A1. Introduire un retard d'une période d'échantillonnage pour tenir compte des temps de conversion et du temps de calcul, i.e. la fonction de transfert du système est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = e^{-T_e s} \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

- A2. Opter pour le choix suivant de la période d'échantillonnage

$$\omega T_e = \frac{\pi}{2}$$

- A3. Utiliser le résultat suivant

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$$

et

$$\mathcal{Z} \{f(kT_e)\} = \frac{z}{z-1} \frac{(1 - \cos(\omega T_e))(z+1)}{z^2 - 2\cos(\omega T_e)z + 1}$$

- 1) Justifier la spécification adoptée de la période d'échantillonnage.
- 2) Montrer que le système échantillonné sous-jacent est décrit par

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} (1 + q^{-2}) y(t) = (1 + q^{-1}) (u(t - 2) + v(t - 2)) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ (1 - q^{-1}) v(t) = v\delta(t) \end{array} \right.$$

- 3) Préciser les configurations des pôles et des zéros du système et justifier pourquoi un objectif de poursuite parfaite pour toutes les séquences de référence ou une commande avec modèle interne ne sont pas faisables.
- 4) Proposer un régulateur réalisant les spécifications $\mathcal{S}1$, $\mathcal{S}2$ et $\mathcal{S}3$ en utilisant les résultats du premier exercice. On justifiera d'abord la structure du régulateur proposée puis on déterminera les paramètres du régulateur.
- 5) Donner un diagramme fonctionnel pour la mise en oeuvre du régulateur.

DEVOIR 4 : UNE SOLUTION

Notons d'abord que compte tenu des performances requises, on peut choisir le domaine de stabilité et de performance comme suit

$$\mathcal{D}_{sp} \triangleq \{z \in \mathbb{C} / \Im(z) = 0 \text{ et } \Re(z) \in [e^{-\mu\omega T_e}, e^{-\omega T_e}] \text{ avec } \mu \geq 2\}$$

- 1) La spécification de la période d'échantillonnage est faite conformément au théorème de Shannon compte tenu des performances requises puisque

$$2\omega T_e = \frac{\pi}{2} < \pi$$

- 2) La fonction de transfert du système échantillonnée est particulièrement déterminée en tenant compte des aspects de simplicité de calcul considérés, i.e. $\mathcal{A}1$, $\mathcal{A}2$ et $\mathcal{A}3$. En effet, en vertu de $\mathcal{A}1$, on a

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{g_{cind}(kT_e)\}$$

avec

$$g_{cind}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-T_e s} \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}\right)$$

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) &= \frac{1}{z} \frac{(1 - \cos(\omega T_e))(z+1)}{z^2 - 2\cos(\omega T_e)z + 1} && \text{en vertu de } \mathcal{A}3 \\ &= \frac{1}{z} \frac{z+1}{z^2 + 1} && \text{en vertu de } \mathcal{A}2 \\ &= z^{-2} \frac{1+z^{-1}}{1+z^{-2}} \end{aligned}$$

Et comme les perturbations peuvent être ramenées en entrée et sont du type échelon, on peut recouvrer aisément le modèle $\mathcal{SY}\mathcal{S}$ en passant au domaine temporel.

- 3) Les configurations pôles et zéros du système sont respectivement données par

$$\mathcal{CP}(\mathcal{SY}\mathcal{S}) = \{+j, -j, 0\} \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{SY}\mathcal{S}) = \{-1\}$$

Comme $\mathcal{CZ}(\mathcal{SY}\mathcal{S}) \cap \mathcal{D}_{sp} = \emptyset$, on ne peut pas réaliser une poursuite parfaite. Par ailleurs, la commande avec modèle interne n'est pas faisable pour cette classe de systèmes puisque $\mathcal{CP}(\mathcal{SY}\mathcal{S}) \cap \mathcal{D}_{sp} = \emptyset$.

- 4) Le régulateur suivant peut réaliser les performances requises en choisissant judicieusement les modes auxiliaires

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})(1 - q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t + 2) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + 2) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases}$$

avec

$$(1 + z^{-2})(1 - z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-2}(1 + z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

$$M(z^{-1}) = (1 - 2e^{-0.5\pi}z^{-1} + e^{-\pi}z^{-2})(1 - e^{-\pi}z^{-1})^3$$

$$T_r(z^{-1}) = 0.5 M(z^{-1})$$

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{1 - 2e^{-0.25\pi} + e^{-0.5\pi}}{1 - 2e^{-0.25\pi}z^{-1} + e^{-0.5\pi}z^{-2}}$$

La spécification des pôles du système asservi a été effectuée à partir de la dynamique de régulation requise. On distingue deux pôles dominants en $e^{-\omega T_e}$ et trois pôles auxiliaires en $e^{-2\omega T_e}$. Le choix du nombre de pôles, i.e. $nm = 5$, permet d'avoir une solution d'ordre minimal, $nr = ns = 2$. L'action intégrale du régulateur permet de réaliser un rejet asymptotique des perturbations de charges du type échelon. Quant au choix du générateur de la séquence de référence, il est issue des performances requises en poursuite. On notera que la synthèse du régulateur consiste tout simplement à résoudre, en $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$, l'équation polynomiale

$$\begin{aligned} (1 + z^{-2})(1 - z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-2}(1 + z^{-1})R(z^{-1}) \\ = \\ (1 - 2e^{-0.5\pi}z^{-1} + e^{-\pi}z^{-2})(1 - e^{-\pi}z^{-1})^3 \end{aligned}$$

ou d'une manière équivalente le système d'équations compatible

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2e^{-0.5\pi} - 3e^{-\pi} - e^{-3\pi} \\ e^{-\pi} + 6e^{-1.5\pi} + 3e^{-2\pi} \\ -3e^{-2\pi} - 6e^{-2.5\pi} \\ 3e^{-3\pi} + 2e^{-3.5\pi} \\ -3e^{-4\pi} \end{bmatrix}$$

- 5) La mise en oeuvre du régulateur peut être réalisée comme l'indique la figure 9.5. Elle permet de pallier raisonnablement le problème de saturation des actionneurs pourvu que le polynôme $P_o(z^{-1})$ soit normalisé et que toutes ses racines soient situées dans le domaine de stabilité et de performances \mathcal{D}_{sp} .

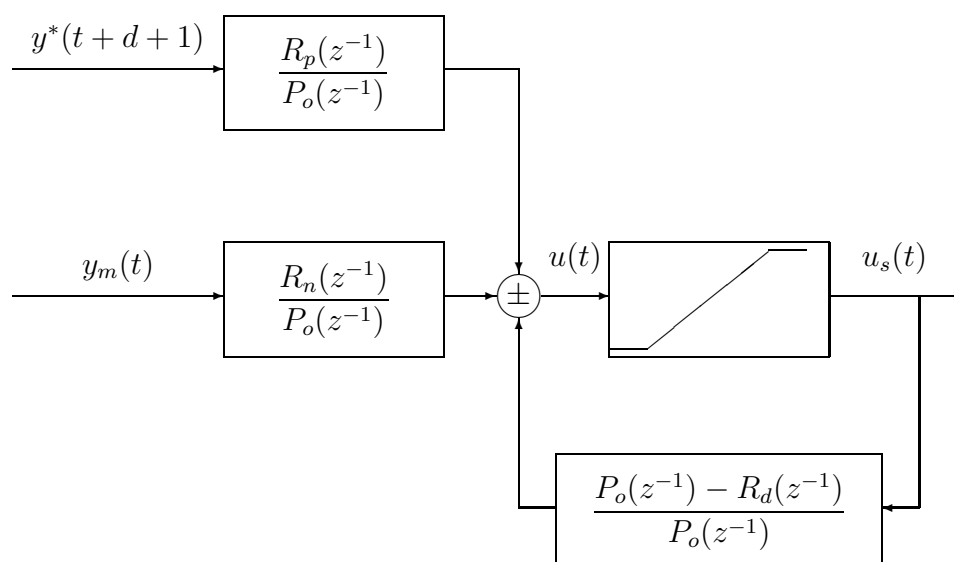


FIGURE 9.5 – Mise en oeuvre d'un régulateur saturant

DEVOIR 5 : SYNTHÈSE DES ASSERVISSEMENTS INDUSTRIELS

La plupart des problèmes de régulation industrielle concernent des asservissements pour une classe de systèmes caractérisée par

- Une dynamique du système autour de ses points de fonctionnement qui peut être raisonnablement décrite par un modèle de second ordre avec un retard

$$\mathcal{G}_c(s) = e^{-\tau_d s} \frac{\beta_0 s + \beta_1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} \text{ avec } \beta_1 \neq 0$$

où τ_d désigne le retard pur du système modulo le temps de calcul et les temps de conversion analogique \Leftrightarrow numérique que l'on peut exprimer comme suit

$$(d + 1) T_e - \eta T_e \text{ avec } d \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq \eta < 1$$

- Des perturbations de charge du type échelon aussi bien en entrée qu'en sortie du système
- Un bruit de mesure assimilable à une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies.
- Des séquences de points de consigne du type échelon

On se propose de concevoir un asservissement que l'on peut représenter comme le montre la figure 9.6 à partir d'un cahier de charges défini par les trois spécifications données ci dessous.

- S1. Une poursuite admissible caractérisée par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω_p .
- S2. Un rejet asymptotique parfait des perturbations caractérisé par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre $\omega_r = 2\omega_p$.
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.

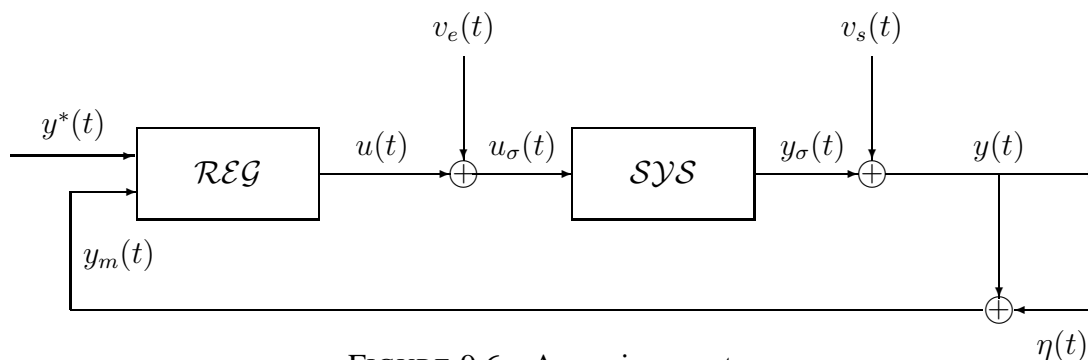


FIGURE 9.6 – Asservissement

On demande de concevoir cet asservissement à partir d'une structure appropriée du régulateur et une synthèse conforme aux spécifications $\mathcal{S}1$, $\mathcal{S}2$ et $\mathcal{S}3$ avec une période d'échantillonnage telle que $\omega_r T_e = \frac{\pi}{8}$.

DEVOIR 5 : UNE SOLUTION

On notera d'abord que la classe des systèmes considérée peut être décrite parfaitement par une fonction de transfert échantillonnée donnée par

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

avec

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

où $(b_0, b_1) \neq (0, 0)$ puisque le retard pur est différent de zéro dans la mesure où il incorpore le temps de calcul et les temps de conversion analogique \Leftrightarrow numérique. Et comme la réponse indicielle d'un système échantillonné n'est autre que la réponse constituée des valeurs de la réponse indicielle du système continu sous-jacent aux instants d'échantillonnage, on aura

$$\mathcal{G}_c(0) \neq 0 \implies \mathcal{G}(1) \neq 0 \implies B(1) \neq 0$$

Compte tenu de cette classe des systèmes échantillonnés et de la nature des perturbations et de la séquence de consigne, on peut concevoir un asservissement réalisant les spécifications $\mathcal{S}1$, $\mathcal{S}2$ et $\mathcal{S}3$ en adoptant une synthèse modale avec un régulateur avec retour unitaire donné par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) = R(q^{-1})D_c(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t)) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \end{cases}$$

avec

$$D_r(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

$$D_c(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$$

$$A^*(z^{-1}) = 1 - 2e^{-0.0625\pi} z^{-1} + e^{-0.0125\pi} z^{-2} \text{ et } B^*(z^{-1}) = A^*(1)$$

où la séquence de consigne $\{u^*(t)\}$ est un échelon ou une séquence d'échelons largement espacés d'instants d'occurrence inconnus et $(R(z^{-1}), S(z^{-1}))$ est la solution de structure minimale de l'équation polynomiale

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

avec

$$M_d(z^{-1}) = 1 - 2e^{-0.125\pi} z^{-1} + e^{-0.25\pi} z^{-2}$$

$$M_a(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{4+d} (1 - e^{-0.125\mu_i\pi} z^{-1}) \text{ avec } \mu_i \geq 2$$

Les choix du retour unitaire, du polynôme $D_r(z^{-1})$ et de la fonction de transfert $\mathcal{G}^*(z^{-1})$ permettent d'avoir un asservissement réalisant une précision maximale (S1), alors que le choix du polynôme $D_c(z^{-1})$ est principalement motivé par des considérations d'insensibilité aux bruits de mesure (S3). Quant au choix des modes dominants (resp. auxiliaires) de l'asservissement, i.e. le polynôme $M_d(z^{-1})$ (resp. $M_a(z^{-1})$), ils sont conformes aux performances dynamiques requises (S2). Le nombre de modes auxiliaires, i.e. $4 + d$, est issu de la nature de la synthèse modale considérée. On notera que la solution de structure minimale est unique puisque les polynômes $A(z^{-1})D_r(z^{-1})$ et $B(z^{-1})D_c(z^{-1})$ sont premiers entre eux.

Remarque 9.1 Dans le cas usuel de la régulation industrielle où le système à commander peut être raisonnablement décrit par un modèle de second ordre sans retard, i.e. $(n_a, n_b, d) = (2, 1, 0)$, on aura

$$n\bar{a} = n\bar{b} = 3, n_r = n_s = 2 \text{ et } nm \leq 5$$

$$\bar{B}(z^{-1}) = b_o z^{-1} + (b_o + b_1) z^{-2} + b_1 z^{-2}$$

$$\bar{A}(z^{-1}) = 1 + (a_1 - 1) z^{-1} + (a_2 - a_1) z^{-2} - a_2 z^{-2}$$

Le système d'équations à résoudre pour la synthèse du système de commande est alors donné par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & 0 & b_o & 0 & 0 \\ a_2 - a_1 & a_1 - 1 & 1 & b_o + b_1 & b_o & 0 \\ -a_2 & a_2 - a_1 & a_1 - 1 & b_1 & b_o + b_1 & b_o \\ 0 & -a_2 & a_2 - a_1 & 0 & b_1 & b_o + b_1 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_o \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix}$$

Bibliographie

- [1] K. J. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers : Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, 1995.
- [2] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computed Controlled Systems : Theory and Design*. Prentice Hall, 1997.
- [3] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1990.
- [4] J. S. Freudenberg and D. P. Looze. *Frequency Domain Properties of Scalar et Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag, 1988.
- [5] M. Gevers and G. Li. *Parametrizations in Control, Estimation, and Filtering Problems : Accuracy Aspects*. Springer Verlag, 1993.
- [6] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, 1995.
- [7] S. Haykin and B. V. Veen. *Signals and Systems*. John Wiley and Sons, 2003.
- [8] E. L. Jury. *Theory and Applications of the z Transform Method*. John Wiley and Sons, 1964.
- [9] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [10] M. Kunt. *Traitement Numérique du Signal*. Dunod, 1981.
- [11] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, and A. Karimi. *Adaptive Control*. Springer Verlag, 2011.
- [12] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, 1997.
- [13] A. M. Lyapunov. *The general Problem of Motion Stability*. Princeton University Press, 1947. The original version has been written in Russian in 1892.
- [14] R. H. Middleton and G. C. Goodwin. *Digital Control and Estimation : A Unified Approach*. Prentice Hall, 1990.
- [15] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989.
- [16] K. Ogata. *Discrete-time Control Systems*. Prentice Hall, 1987.
- [17] A. Papoulis. *Probability, Random variables and Stochastic Processes*. Prentice Hall, 1991.
- [18] L. Schmidt and M. M'Saad. On the autotuning of position control in handling systems. In *Proc. of the fourth IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, 1992. Grenoble, France.
- [19] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann, 1961.
- [20] M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [21] T. Soderstrom and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall, 1989.

- [22] D. Williamson. *Digital Control and Implementation : Finite Wordlength Considerations*. Prentice Hall, 1988.
- [23] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.



