

## SYSTEMES ASSERVIS ECHANTILLONNES



### CORRECTEURS NUMERIQUES

Mohammed M'SAAD

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

Bureau: FA 314

Téléphone: 02 31 45 27 08

Courriel: mohammed.msaad@ensicaen.fr

## UNE APPROCHE POLYNOMIALE



AREVA

AEROSPATIALE

EDF

CNES

FT

PSA

Renault

STmicroelectronics

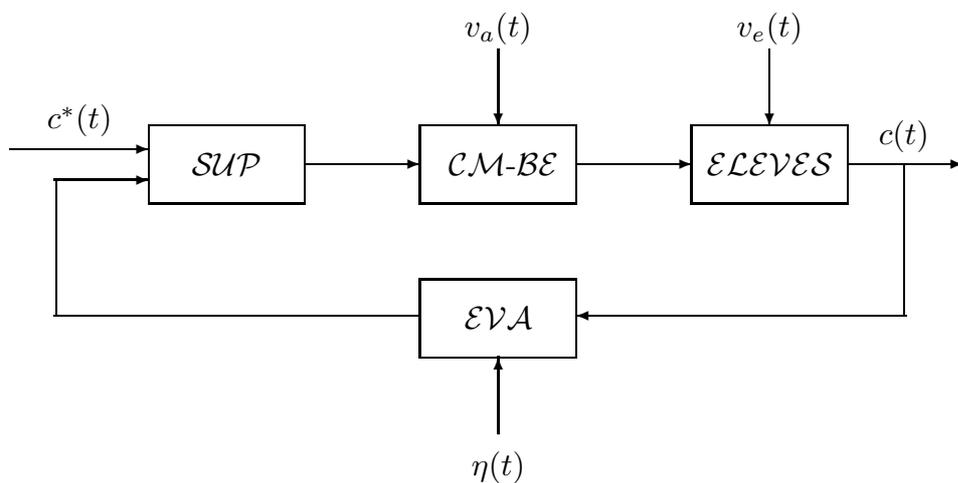
Thalès

.....

**UNE APPROCHE SYSTEME**

**DANS**

**UN CONTEXTE POLYNOMIAL**



**LA RETROACTION EST AU COEUR DE LA PEDAGOGIE**

## COURS

- ♠ Introduction
- ♠ Modélisation
- ♠ Stabilité
- ♠ Systèmes asservis

## TD

- ♠ Modélisation
- ♠ Analyse
- ♠ Synthèse modale
- ♠ Régulation industrielle

**MODELISATION**

**DES**

**SYSTEMES ECHANTILLONNES**

**PLAN**

- Motivation
- Echantillonnage
- Reconstruction
- Modélisation des systèmes
- Modélisation des perturbations
- Une représentation usuelle
- Conclusion

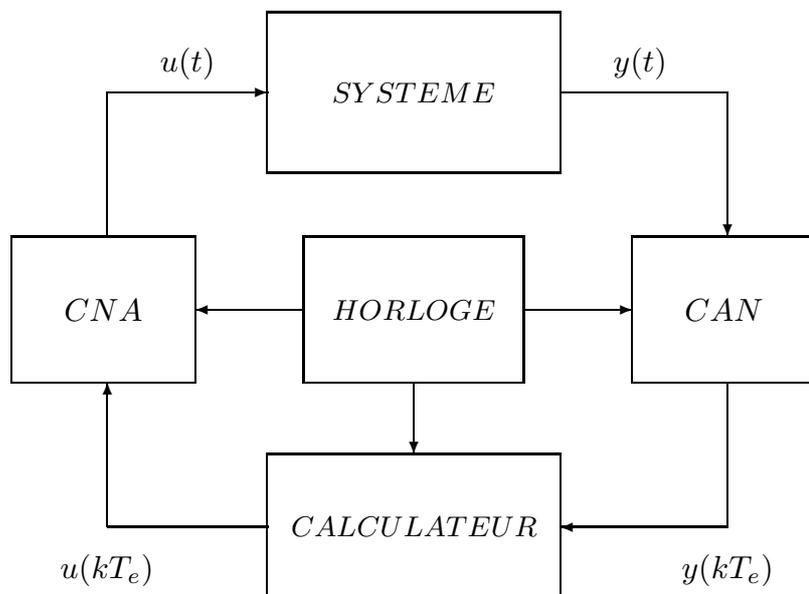
## MOTIVATION

- Une théorie rigoureuse des systèmes échantillonnés

Modélisation  
Analyse et Synthèse  
Mise en œuvre

- Applications industrielles réussies

Commande par ordinateur  
Traitement numérique du signal  
Supervision des systèmes



**COMMANDE PAR CALCULATEUR**

## DEUX ASPECTS A RETENIR

**A1.** Les calculateurs numériques sont des systèmes discrets qui manipulent des nombres.



*un système relié à un ordinateur numérique  
est manifestement un système échantillonné  
dont l'entrée et la sortie sont respectivement  
 $\{u(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$  et  $\{y(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$*



*$T_e$  désigne la période d'échantillonnage  
elle est supposée constante dans la théorie des systèmes  
échantillonnés*

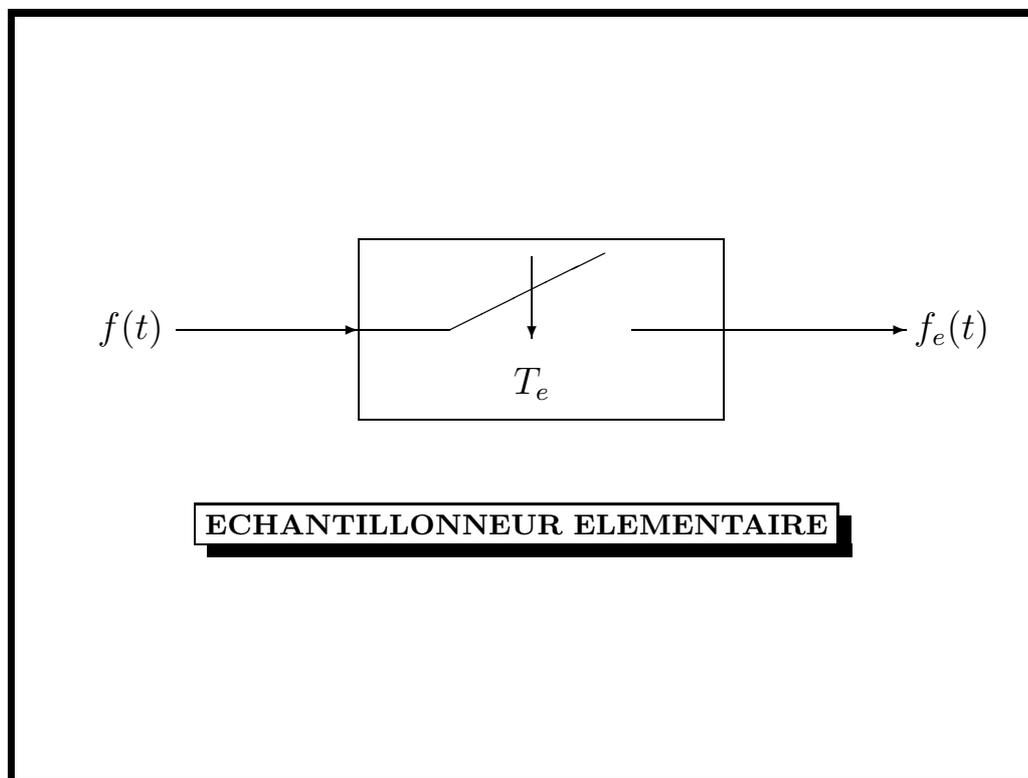
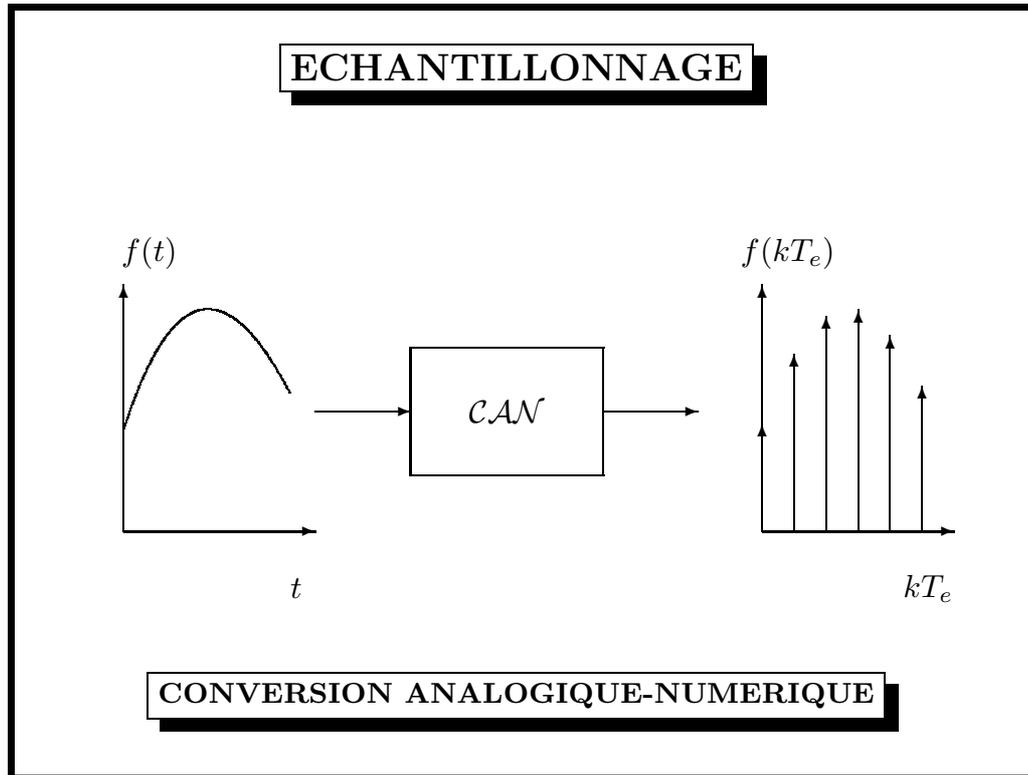
**A2.** La description du comportement dynamique d'un système échantillonné est généralement effectuée par un modèle stroboscopique

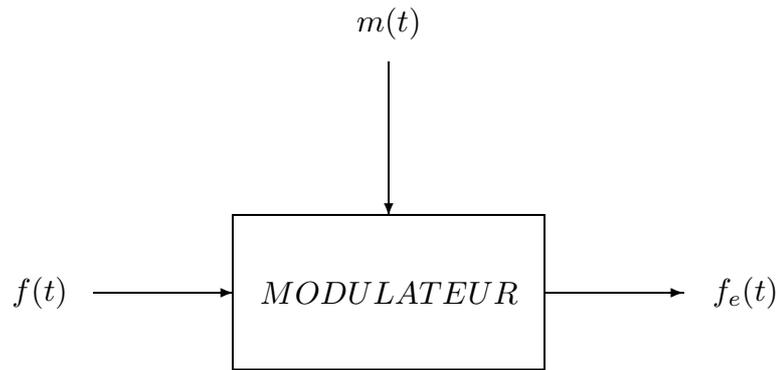
$$\text{SYSE} : \{u(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow \{y(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$$



*modélisation des convertisseurs  
pour pouvoir modéliser l'ensemble*

*CNA – SYSTÈME – CAN*





$$f_e(t) = f(t) m(t) \text{ avec } m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

### MODELISATION IDEALE D'UN ECHANTILLONNEUR

### THEOREME D'ECHANTILLONNAGE

Soit  $f$  une fonction dont la transformée de Laplace est  $F$  et soit  $F_e$  la transformée de Laplace de la fonction  $f_e$  qui résulte d'un échantillonnage de  $f$  à la cadence  $T_e$ . Supposons que  $F(s)$  soit strictement propre alors on a

$$F_e(s) = (F(z))_{z=e^{T_e s}}$$

et

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

Si de plus  $sF(s)$  est strictement propre alors on a

$$F_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

### ASPECTS FONDAMENTAUX

A1. L'échantillonnage étale jusqu'à l'infini le spectre de fréquences de la fonction continue.

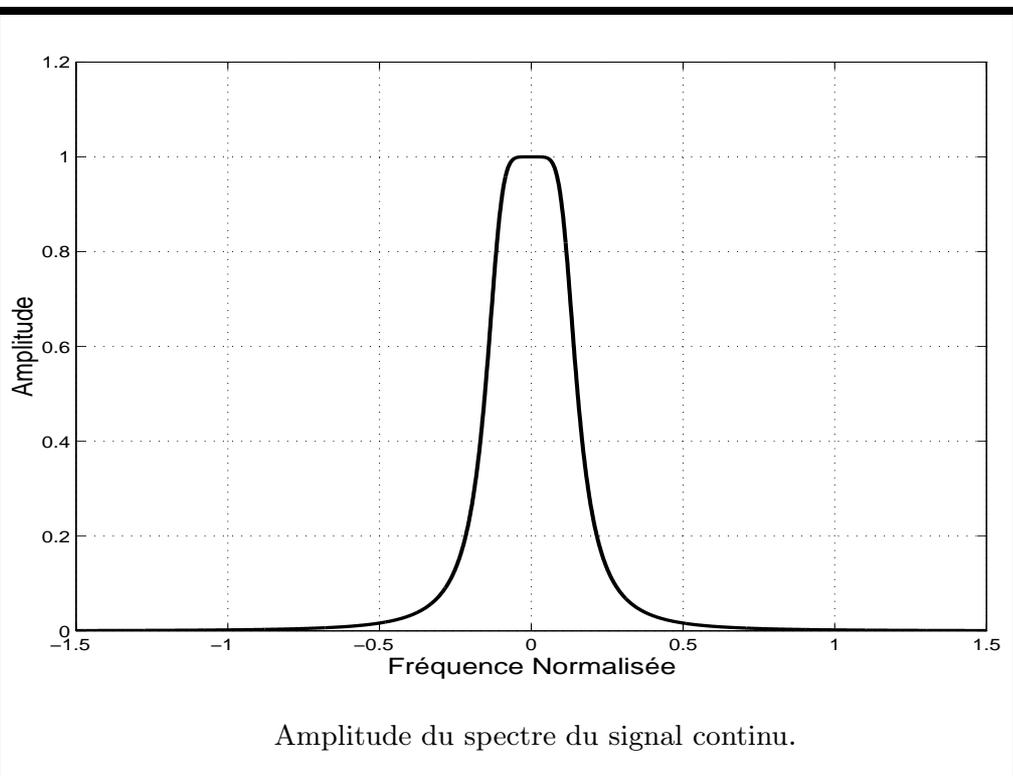
$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + k\omega_e))$$

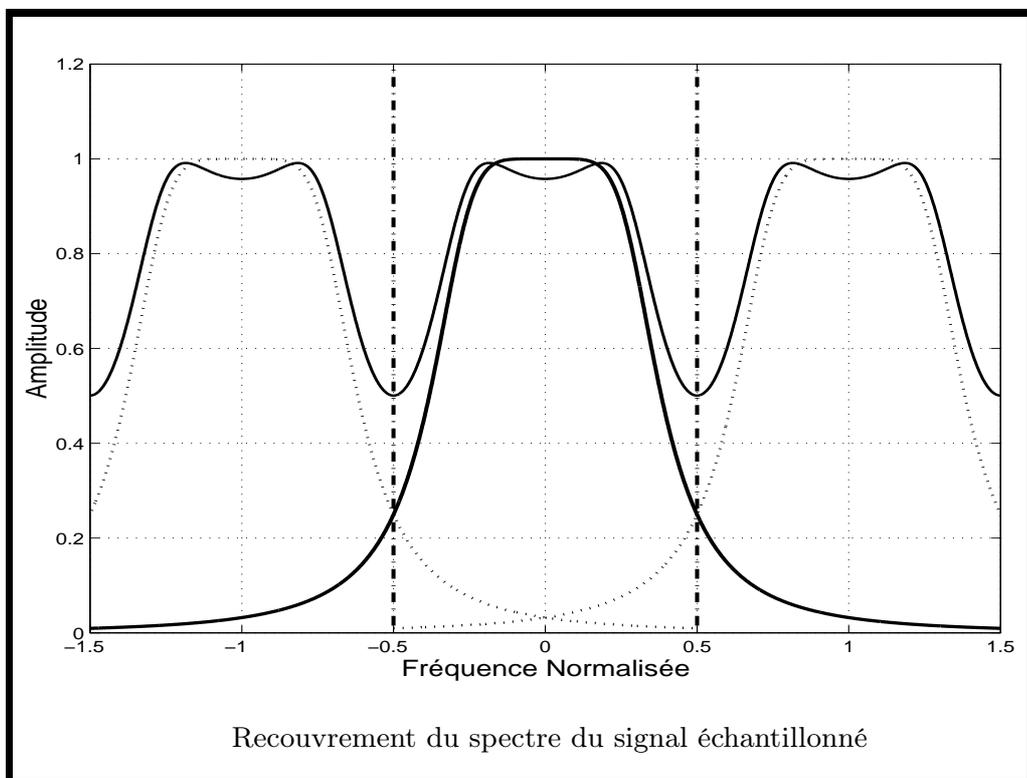
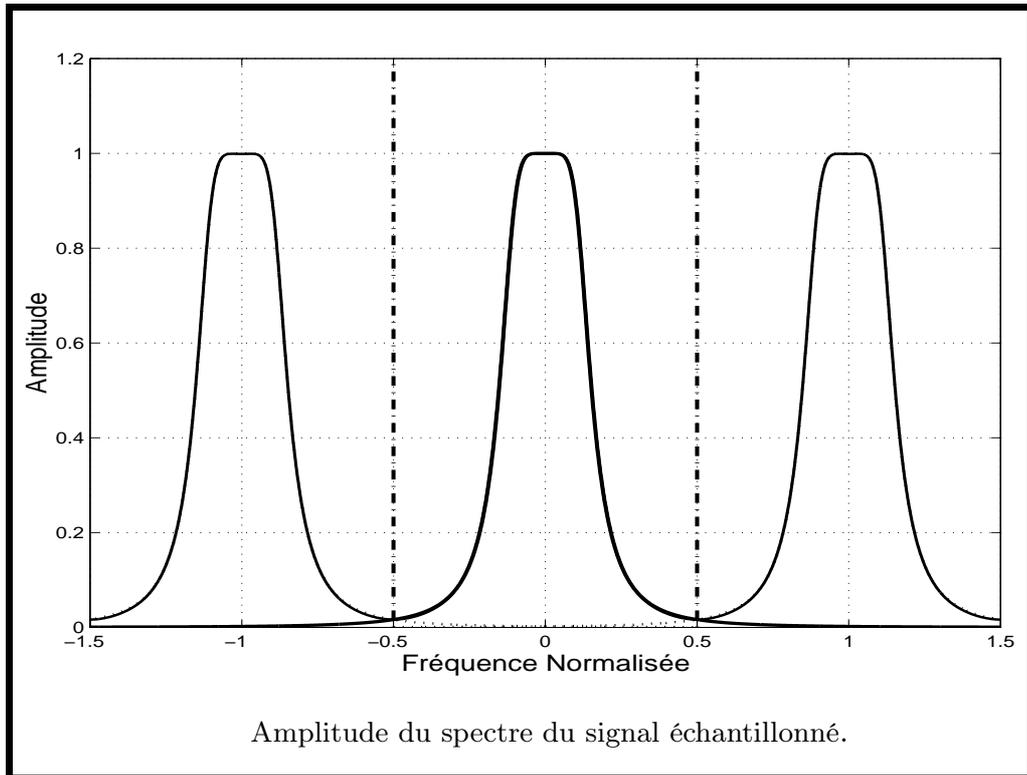
⇓

$$F_e : \omega \in [0, \omega_n] \quad \longrightarrow \quad F_e(j\omega) \in \mathcal{C}$$

avec

$$\omega_n = \frac{\omega_e}{2} = \frac{\pi}{T_e} \quad \longrightarrow \quad \text{pulsation de Nyquist}$$





A2. L'échantillonnage induit une duplication infinie des pôles, i.e. les pôles de  $F_e(s)$  sont égaux aux pôles de  $F(s)$  modulo  $j\omega_e$ .

$$p_{ci} \text{ de } F(s) \longrightarrow \{p_{ci} - kj\omega_e\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ de } F_e(s)$$

A3. La relation entre  $F_e(s)$  et  $F(z)$  : le mythe et la réalité

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e)e^{-kT_e s}$$

$$z = e^{T_e s}$$

↓

$$F_e(s) = F(z) \text{ avec } z = e^{T_e s}$$

La transformation d'échantillonnage

$$s \longrightarrow z = e^{T_e s}$$

n'est pas bijective. L'image des bandes

$$\mathcal{B}_k = \left\{ s \in \mathbb{C} / (2k-1)\omega_n \leq \text{Im}(s) \leq (2k+1)\omega_n \right\}$$

↓

$$\mathcal{B}_s = \{s \in \mathbb{C} / \text{Im}(s) \in [-\omega_n, +\omega_n]\}$$

est le plan complexe en  $z$  : la duplication des pôles dans le plan complexe en  $s$  n'est pas percevable dans le plan complexe en  $z$  puisque

$$e^{(s+kj\omega_e)T_e} = e^{sT_e} \text{ pour tout } (s, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$$

### THEOREME DE SHANNON

Un signal  $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$  dont la transformée de Fourier est nulle à l'extérieur de l'intervalle  $[-\omega_m, \omega_m]$  est parfaitement défini par son signal échantillonné  $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathcal{Z}}$  si la période d'échantillonnage  $T_e$  est telle que  $\omega_e > 2\omega_m$ , soit  $\frac{\omega_m}{\omega_e} < \frac{1}{2}$ . Le signal  $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$  est obtenu comme suit

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t - kT_e))}{\omega_n(t - kT_e)}$$

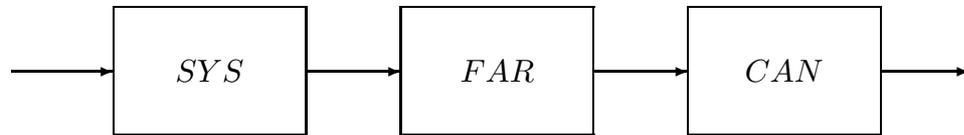
### REMARQUE

Dans le contexte des conditions de Shannon, on peut restaurer parfaitement  $\{F(j\omega)\}_{\omega \in \mathcal{R}}$  en fonction de  $\{F_e(j\omega)\}_{\omega \in \mathcal{R}}$

$$F(j\omega) = \begin{cases} T_e F_e(j\omega) & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$



Cette opération de filtrage n'est pas physiquement réalisable

**FILTRAGE ANTI-REPLIEMENT**

$$F(s) = \left( \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)^m$$

avec

$$\zeta = 0.7 \text{ et } m > 2$$

**ECHANTILLONNAGE: LE POINT**

- ♠ Analyse spectrale

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

- ♠ Théorème de Shannon

$$\left( \omega_e > 2\omega_m \right) \longrightarrow \left( F_e(j\omega) \longrightarrow F(j\omega) \right)$$

- ♠ Transformée en  $z$

$$F_e(s) \longrightarrow F(z)$$

$$z = e^{T_e s}$$

## RECONSTRUCTION PHYSIQUE

$$\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) + \tau \left( \rho f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots + \frac{\tau^i}{i!} \left( \rho^i f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots$$

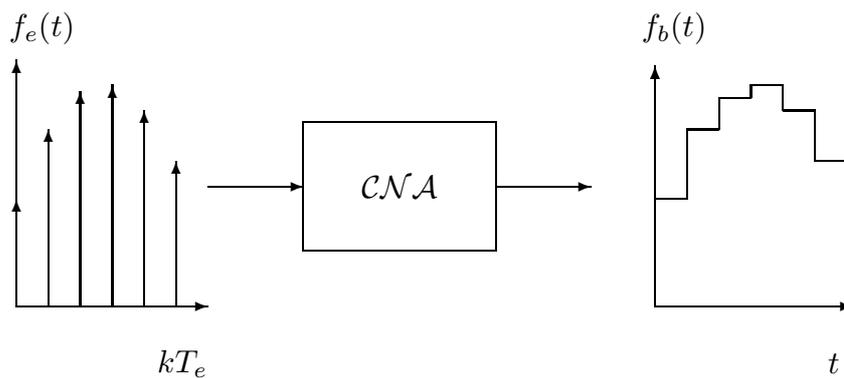
*pour tout  $\tau \in [0, T_e)$*

$$\Uparrow$$

$$\rho f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e} \left( f(kT_e) - f((k-1)T_e) \right)$$

$$\rho^2 f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e^2} \left( f(kT_e) - 2f((k-1)T_e) + f((k-2)T_e) \right)$$

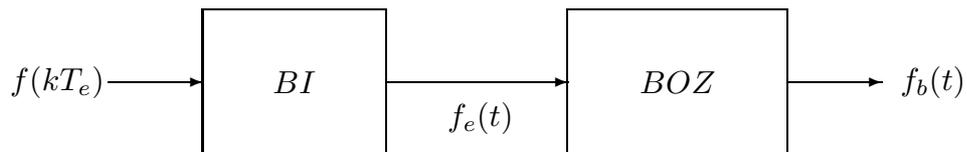
## CONVERSION NUMERIQUE-ANALOGIQUE



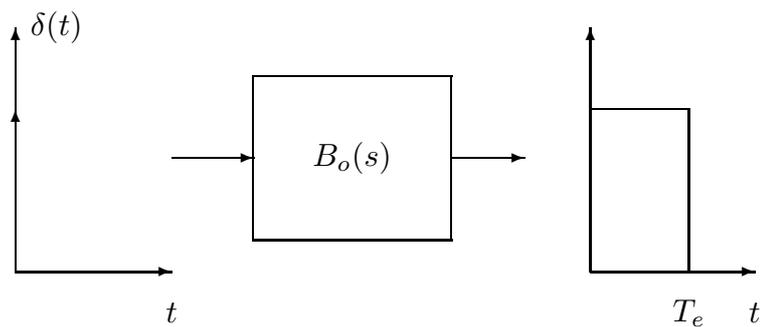
$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$

### BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$



### MODELISATION D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO



$$\beta_o(t) = \alpha(t) - \alpha(t - T_e) \implies \mathcal{B}_o(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

$$f_e(t) = f(t)m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

et

$$f_b(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT_e) \left( \alpha(t - kT_e) - \alpha(t - (k+1)T_e) \right)$$

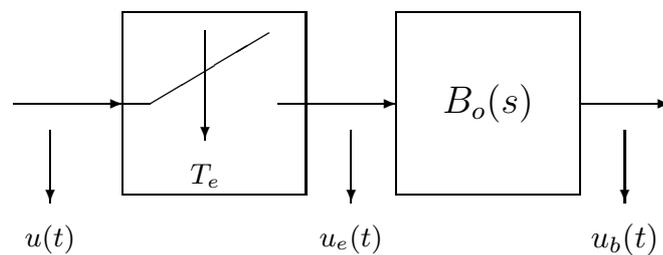
↓

$$\mathcal{L}(f_b(t)) = F_b(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{e^{-kT_e s} - e^{-(k+1)T_e s}}{s}$$

↓

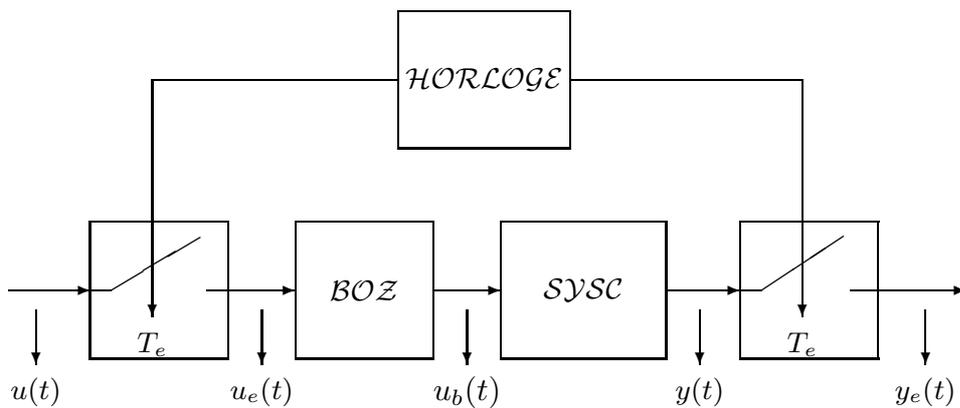
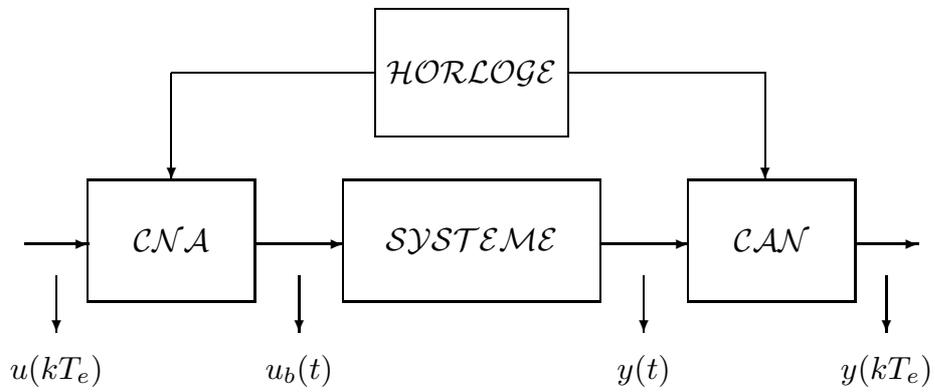
$$F_b(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} F_e(s) = \mathcal{B}_o(s)F_e(s)$$

### MODELISATION D'UN CNA



### BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

## MODELISATION DES SYSTEMES



### DIVERSES REPRESENTATIONS

$$\begin{aligned} \text{SYSC} : U_b = \{u_b : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow Y = \{y : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u_b(t) &\rightarrow y(t) = \text{SYSC}[u_b(t)] \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \text{SYSE} : U = \{u : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow Y = \{y : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u(kT_e) &\rightarrow y(kT_e) = \text{SYSE}[u(kT_e)] \end{aligned}$$

### UN RESULTAT FONCTIONNEL

*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace alors la fonction échantillonnée du produit de convolution  $h = g * f_e$  est donnée par*

$$h_e(t) = g_e(t) * f_e(t)$$

*et donc*

$$\mathcal{L}\{h_e(t)\} = G_e(s) \times F_e(s)$$

### OPERATEUR RETARD

$$q^{-1} / \{f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}\} \rightarrow \{f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}\}$$

$$\{f(kT_e)\} \rightarrow \{f_{r1}(kT_e)\}$$

avec

$$f_{r1}(kT_e) = f(kT_e - T_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$A(q^{-1}) (f(kT_e)) = \left( \sum_{i=0}^{na} a_i q^{-i} \right) (f(kT_e))$$

$$\Updownarrow$$

$$A(q^{-1}) (f(kT_e)) = \sum_{i=0}^{na} a_i f_{ri}(kT_e) = \sum_{i=0}^{na} a_i f((k-i)T_e)$$

P1.

$$\begin{aligned} & (\alpha A(q^{-1}) + \beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) \\ & = \\ & (\alpha A(q^{-1})) (f(kT_e)) + (\beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) \end{aligned}$$

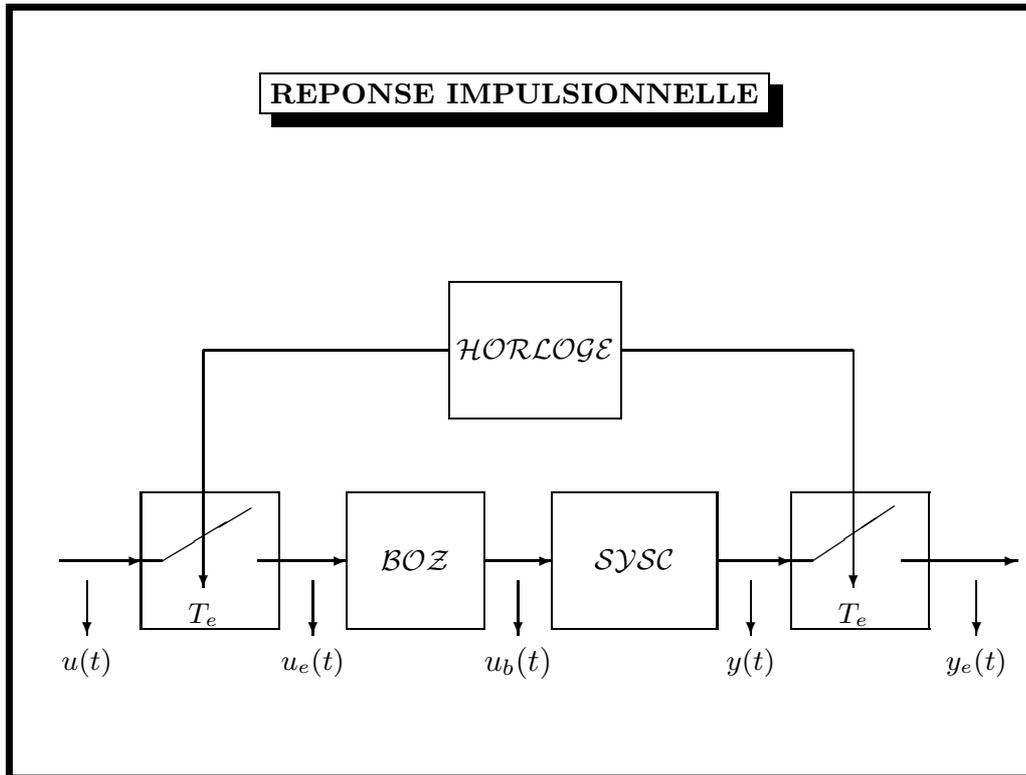
P2.

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) (B(q^{-1}) (f(kT_e))) & = (A(q^{-1})B(q^{-1})) (f(kT_e)) \\ & = B(q^{-1}) (A(q^{-1}) (f(kT_e))) \end{aligned}$$

P3.

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) (x_f(kT_e)) & = G(q^{-1}) (x(kT_e)) \\ \Leftrightarrow & \\ x_f(kT_e) & = \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} (x(kT_e)) \end{aligned}$$

## REPOSE IMPULSIONNELLE



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau = \int_0^t g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau$$

⇓

$$y(kT_e) = \int_0^{\infty} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau \right) u(kT_e - \ell T_e)$$

### REPOSE IMPULSIONNELLE

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e)$$

avec

$$g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

↓

$$\left( u(kT_e) = \delta(kT_e) \right) \implies \left( y(kT_e) = g(kT_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{N} \right)$$

$$\mathcal{RIMP} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) q^{-\ell} = g(T_e) q^{-1} + \dots + g(i T_e) q^{-i} + \dots$$

↓

*le bloqueur d'ordre zéro introduit un retard  
d'une période d'échantillonnage  
dans le cas d'un système continu strictement propre*

↓

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}} = q^{-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

### REPONSE HARMONIQUE

$$y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) e^{j\omega k T_e} = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{j\omega(kT_e - \ell T_e)}$$

⇓

$$\mathcal{RHAR} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) e^{j\omega k T_e} \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{-j\omega \ell T_e}$$

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \mathcal{F}(\{g(kT_e)\}) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

⇓

$$\mathcal{G}(e^{j(\omega+\omega_e)T_e}) = \mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

et

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = (\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}))^* \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

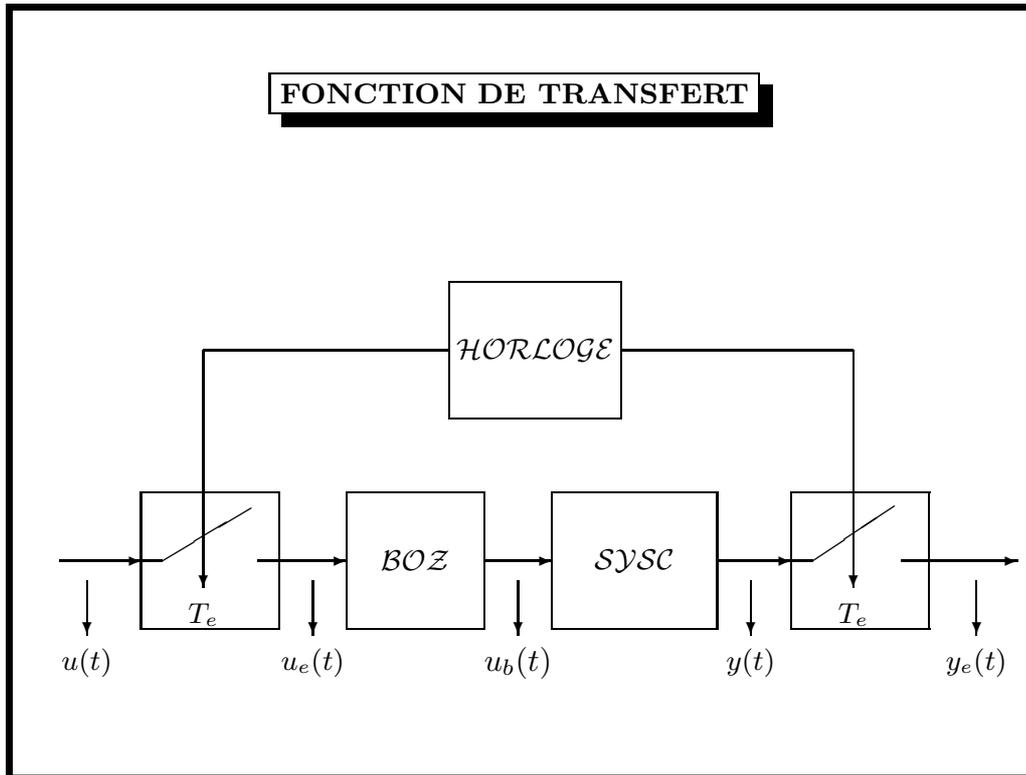
⇓

$$\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in \mathcal{R}} \longrightarrow \{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in [0, \omega_n]}$$

♠

Diagrammes de Bode, Nyquist et Black

## FONCTION DE TRANSFERT



$$SYSC \left\{ \begin{array}{l} Y(s) = G_c(s) U_b(s) \text{ et } U_b(s) = B_o(s) U_e(s) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \left( G_c(s) B_o(s) \right) U_e(s) = \left( G_c(s) \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} \right) U_e(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = (g * u_e)(t)$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{L} \left( \{g(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \right) = G_c(s) \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} = \frac{G_c(s)}{s} - e^{-T_e s} \frac{G_c(s)}{s}$$

$$y(t) = (g * u_e)(t) \implies y_e(t) = (g_e * u_e)(t)$$

$$\uparrow$$

$$g(t) = g_{cind}(t) - g_{cind}(t - T_e)$$

$$\downarrow$$

$$\text{SYSE} \left\{ Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \mathcal{Z}(\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})\right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})$$

### EXEMPLES

$\mathcal{G}_c(s)$	$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_e^2(z+1)}{(z-1)^2}$
$\frac{\alpha}{s+\alpha}$	$\frac{1 - e^{-\alpha T_e}}{z - e^{-\alpha T_e}}$
$\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T_e}(1 + \alpha T_e))z + e^{-\alpha T_e}(e^{-\alpha T_e} + \alpha T_e - 1)}{z^2 - 2e^{-\alpha T_e}z + e^{-2\alpha T_e}}$

### CONFIGURATION POLES-ZEROS

avec

$$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{Z(z)}{P(z)} = \gamma \frac{\prod_{i=1}^{nz} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{np} (z - p_i)}$$

↓

$$\mathcal{Z}(\text{SYS}) : \{z_1, \dots, z_{nz}\} \longrightarrow \{ ? \}$$

$$\mathcal{P}(\text{SYS}) : \{p_{c1}, \dots, p_{cnp}\} \longrightarrow \{e^{p_{c1}T_e}, \dots, e^{p_{cnp}T_e}\}$$

↑

*Diapositives 51 et 52*

### INTERPRETATION PERTINENTE

- Pôles

des sortie de la forme  $y(t) = \gamma_i p_i^k \alpha(kT_e)$

pour une entrée identiquement nulle

- Configuration de zéros

une sortie identiquement nulle

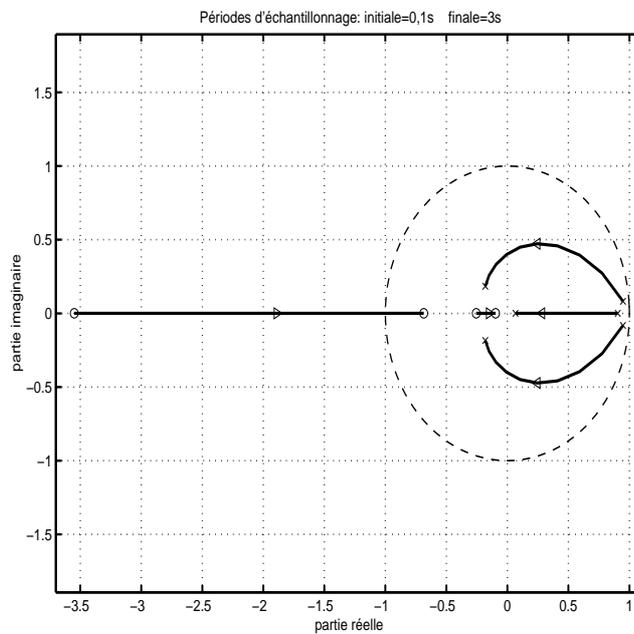
pour des entrées de la forme  $u(t) = \beta_i z_i^k \alpha(kT_e)$

**EXEMPLE**

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+1)}$$

↓

$$T_e \in [0.1s, 3s]$$



Pôles et zéros d'un système échantillonné

### EQUATION AUX DIFFERENCES

$$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$$

avec

$$\mathcal{G}(z) = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

↓

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-1}B(z^{-1})U(z)$$

$$Y(z) + \sum_{i=1}^{na} a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} z^{-1} U(z)$$

↓

$$y(kT_e) + \sum_{i=1}^{na} a_i y(kT_e - iT_e) = \sum_{i=0}^{nb} b_i u(kT_e - iT_e - T_e)$$

↓

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}\right) y(kT_e) = \left(\sum_{i=0}^{nb} b_i q^{-i}\right) q^{-1} u(kT_e)$$

⇕

$$A(q^{-1})y(kT_e) = q^{-1}B(q^{-1})u(kT_e)$$

### SYSTEMES EXIBANT UN RETARD

(*SYS* exhibe un retard pur  $\tau_\sigma$ )

$\Leftrightarrow$

( $g_c(t) = 0$  pour tout  $t < \tau_\sigma$ )



$\tau_\sigma = (d + 1)T_e - \eta T_e$  avec  $d \in \mathcal{N}$  et  $0 < \eta \leq 1$

$$g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

$g(\ell T_e) = 0$  pour tout  $\ell \in [1, d]$

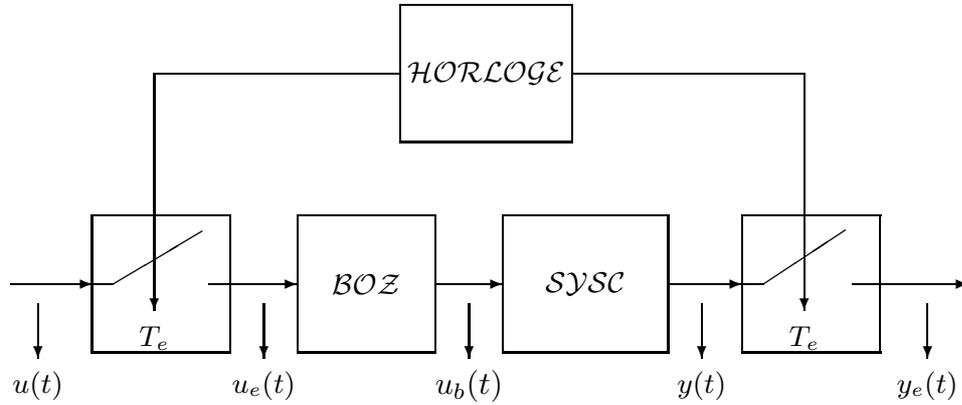


$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}}$$



$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

## REPRESENTATION D'ETAT



$$\text{SYSC} \begin{cases} \dot{x}(t) = F_c x(t) + G_c u_b(t) \text{ avec } x(t_o) = x_o \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u_b(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{TRÉS} \begin{cases} x(t) = e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{F_c(t-\tau)} G_c u_b(\tau) d\tau \\ y(t) = H_c e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) \\ \quad + \int_{t_o}^t H_c e^{F_c(t-\tau)} G_c u_b(\tau) d\tau + E_c u_b(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 x((k+1)T_e) &= e^{F_c((k+1)T_e - kT_e)} x(kT_e) \\
 &\quad + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{F_c((k+1)T_e - \tau)} G_c u_b(\tau) d\tau \\
 &\quad \downarrow \\
 u_b(\tau) &= u(kT_e) \quad \text{pour } \tau \in [kT_e, (k+1)T_e) \\
 (k+1)T_e - \tau &= \eta \\
 &\quad \downarrow \\
 x((k+1)T_e) &= (e^{F_c T_e}) x(kT_e) + \left( \int_0^{T_e} e^{F_c \eta} G_c d\eta \right) u(kT_e)
 \end{aligned}$$

### REPRESENTATION D'ETAT

$$\text{SYSC} \begin{cases} \dot{x}(t) = F_c x(t) + G_c u_b(t) \quad \text{avec } x(t_0) = x_0 \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u_b(t) \end{cases}$$

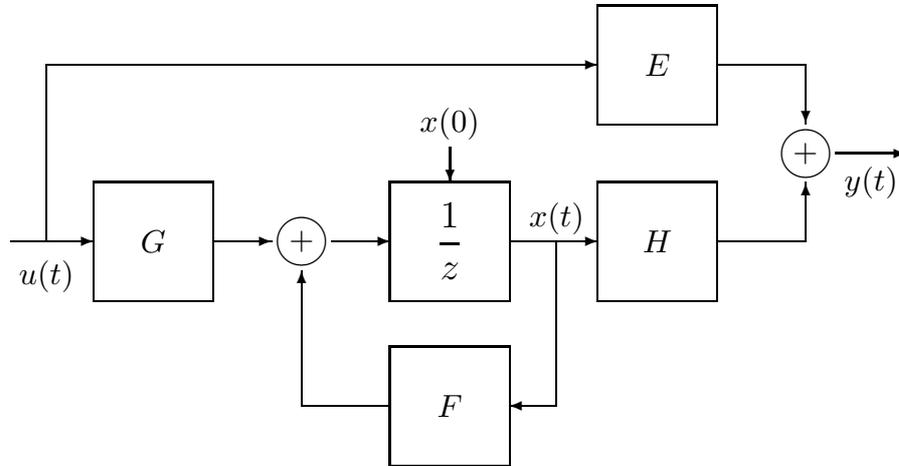
↓

$$\text{SYSE} \begin{cases} x((k+1)T_e) = F x(kT_e) + G u(kT_e) \quad \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(kT_e) = H x(kT_e) + E u(kT_e) \end{cases}$$

♠

$$F = e^{F_c T_e}, \quad G = \left( \int_0^{T_e} e^{F_c \tau} d\tau \right) G_c, \quad H = H_c \quad \text{et} \quad E = E_c$$

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} x((k+1)T_e) = Fx(kT_e) + Gu(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \\ y(kT_e) = Hx(kT_e) + Eu(kT_e) \end{cases}$$



### TRAJECTOIRE D'ENTREE-SORTIE

$$\mathcal{TES} \begin{cases} x(kT_e) = F^{(k-\ell)}x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} F^{(k-j-1)}Gu(jT_e) \\ y(kT_e) = HF^{(k-\ell)}x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} HF^{(k-j-1)}Gu(jT_e) + Eu(kT_e) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow g(kT_e) = \begin{cases} HF^{(k-1)}G & \text{pour } k > 0 \\ E & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**REALISATION D'ETAT → FONCTION DE TRANSFERT**

$$\text{SYSE} \begin{cases} zX(z) = FX(z) + GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + EU(z) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYSE} \begin{cases} (zI_n - F)X(z) = GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + EU(z) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow \mathcal{G}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G + E$$

**FONCTION DE TRANSFERT → REALISATION D'ETAT**

$$?(F, G, H, E) / \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = H(zI_n - F)^{-1}G + E$$

$$\downarrow$$

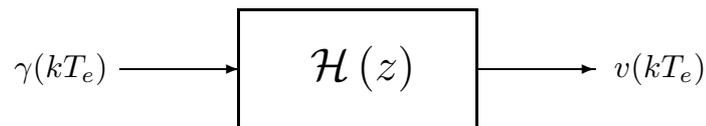
$$\frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F)G + \det(zI_n - F)E}{\det(zI_n - F)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{CP}(\text{SYS}) \subset \mathcal{CM}(\text{SYS}) \triangleq \mathcal{V}(F)$$

## MODELISATION DES PERTURBATIONS

$$V(z) = \mathcal{H}(z) \Gamma(z)$$



### ♠ Contexte déterministe

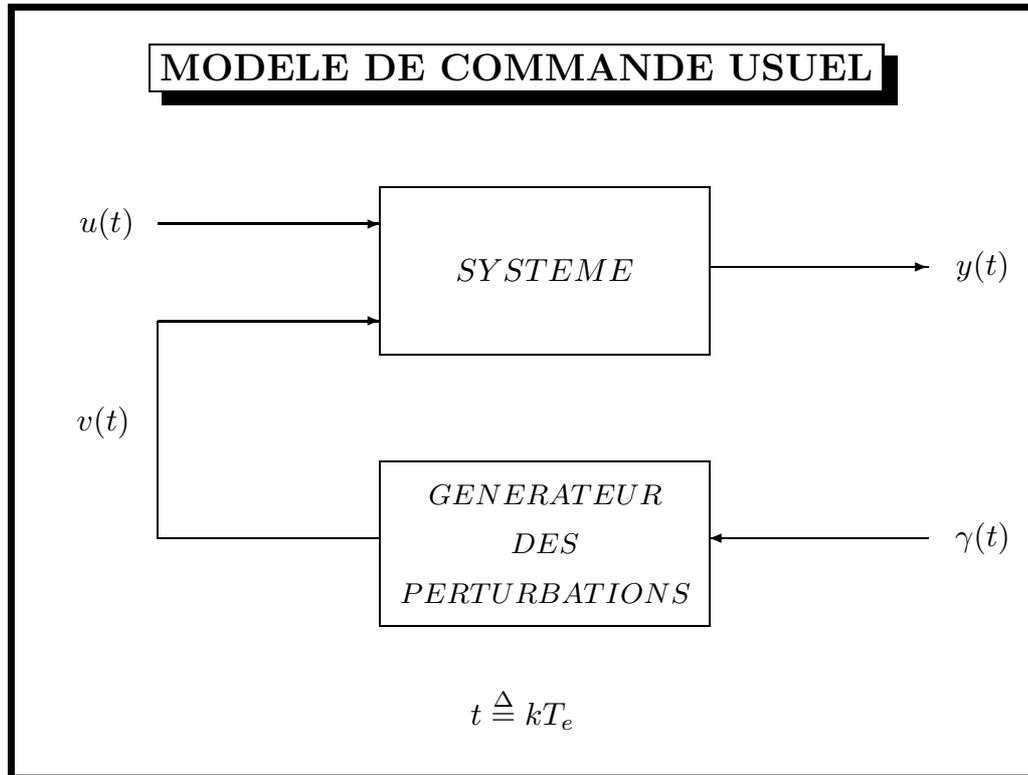
$\{\gamma(kT_e)\}$  est une impulsion d'amplitude inconnue



$\{\gamma(kT_e)\}$  est une séquence d'impulsions largement espacées  
d'amplitudes et d'instantants d'occurrence inconnus

### ♠ Contexte stochastique

$\{\gamma(kT_e)\}$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes  
de moyenne nulle et de variances finies



$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\gamma(t) \end{cases}$$

↓

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_n bq^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = c_o + c_1q^{-1} + \dots + c_n c q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_n d q^{-nd}$$

$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_n e q^{-ne}$$

↓

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

## CONCLUSION

♠ Motivations

♠ Théorèmes fondamentaux

→ *Echantillonnage et Reconstruction*

♠ Modélisation

*CNA – SYSTÈME – CAN*

♠ Relations entre les diverses représentations

♠ Systèmes à retards

♠ Modélisation usuelle

$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\gamma(t) \end{cases}$$

↓

$$A_{\sigma}(z) = \begin{cases} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb+d+1-na} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

$$B_{\sigma}(z) = \begin{cases} z^{na-nb-d-1} z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

# STABILITE

## PLAN

- Concepts de stabilité
- Rappel et notations
- Stabilité externe
- Stabilité interne
- Résultats usuels
- Conclusion

## CONCEPTS DE STABILITE

- **Stabilité externe**

*Aptitude d'un système à produire  
des sorties bornées à partir d'entrées bornées*

- ♠ **Stabilité interne**

*Aptitude d'un système dynamique à recouvrer  
son état d'équilibre indépendamment des perturbations*

## RAPPEL

$$F_e(s) = \mathcal{L} \{ f_e(t) \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$



$$F_e(s) \quad \xrightarrow{z = e^{T_e s}} \quad F(z)$$



$$F_e(s) = F(z) \text{ pour } z = e^{T_e s}$$

## NOTATIONS

$$\mathcal{D}_s = \{z \in \mathcal{C} / |z| \leq 1\}$$

$$\mathcal{D}_{sa} = \{z \in \mathcal{C} / |z| < 1\}$$

$$\mathcal{C}_u = \{z \in \mathcal{C} / |z| = 1\}$$

$$\mathcal{R}_{sa}[z] = \{X(z) \in \mathcal{R}(z) / X(z) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sa}\}$$

$$\mathcal{R}_{us}[z] = \left\{ X(z) \in \mathcal{R}[z] / (X(z) = 0 \implies z \in \mathcal{C}_u) \right. \\ \left. \text{et } (X(z_1) = X(z_2) = 0) \implies (z_1 = z_2) \right\}$$

↓

$$\mathcal{R}_{sm}[z] = \mathcal{R}_{us}[z] \uplus \mathcal{R}_{sa}[z] \quad \text{et} \quad \mathcal{R}[z] = \mathcal{R}_{sm}[z] \cup \mathcal{R}_{ins}[z]$$

## STABILITE EXTERNE

$$\text{SYS} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u((k-\ell)T_e) \right.$$

↓

- $\text{SYS}$  est stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

- $\text{SYS}$  est marginalement stable si et seulement si

$\{g(kT_e)\}$  est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

- $\text{SYS}$  est instable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = \infty$$

### RESULTAT FUNDAMENTAL I

*Considérons un système linéaire invariant SYS décrit par sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert, respectivement notées par*

$$\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$$

$$\mathcal{G}(z) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{B(z^{-1})} \triangleq \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)}$$

*Les propositions suivantes sont équivalentes.*

*PR1. SYS est stable au sens EBSB.*

*PR2. La norme suivante de la réponse impulsionnelle est finie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT_e)| \leq B_g < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

*PR3. Les pôles de la fonction de transfert sont à l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon unitaire, soit*

$$A_\sigma(z) \in \mathcal{R}_{sa}[z]$$

**RESULTAT FUNDAMENTAL II**

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \\ \downarrow \end{array} \right.$$

- $\mathcal{SYS}$  est stable si et seulement si

$$A_\sigma(z) \in \mathcal{R}_{sa}(z)$$

- $\mathcal{SYS}$  est marginalement stable si et seulement si

$$A_\sigma(z) = A_{se}(z) \bullet A_{sm}(z)$$

avec

$$A_{se}(z) \in \mathcal{R}_{dn}(z) \cup \mathcal{R}_{sa}(z) \text{ et } A_{sm}(z) \in \mathcal{R}_{sm}(z)$$

- $\mathcal{SYS}$  est instable si et seulement si

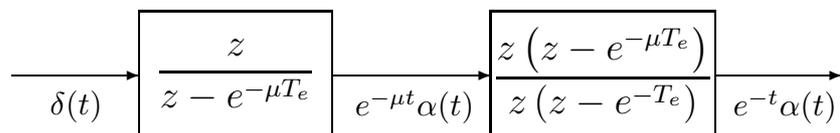
$$A_\sigma(z) \notin \mathcal{R}_{sa}(z) \cup \mathcal{R}_{sm}(z)$$

**REMARQUE**

*Un système est issu d'une interconnection de plusieurs systèmes*

↓

*Interconnexions en série, en parallèle et en contre réaction*



Stabilité externe pour tout  $\mu \in \mathcal{R}$

Stabilité interne pour tout  $\mu > 0$

## STABILITE INTERNE

$$\mathcal{SA} \left\{ \begin{array}{l} x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_o \end{array} \right.$$

↓

- $\mathcal{SYS}$  est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_e) = 0$$

- $\mathcal{SYS}$  est stable si et seulement si

$\{x(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$  est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

- $\mathcal{SYS}$  est instable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_e) = \infty$$

## RESULTAT FONDAMENTAL III

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Stabilité asymptotique

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F^k\| = 0$$

⇕

$$\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

⇕

$$\forall Q = Q^T > 0 \exists P = P^T > 0 / F^T P F - P = -Q$$

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Stabilité

$\{\|F^k\|\}_{k \in \mathcal{N}}$  est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

$\Updownarrow$

$$\left(\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_s\right) \text{ et } \left(\lambda_i \in \mathcal{C}_u \implies \lambda_i \text{ n'est pas défective}\right)$$

$\Updownarrow$

$$\forall Q = Q^T \geq 0 \exists P = P^T \geq 0 / F^T P F - P = -Q$$

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Instabilité

$\{\|F^k\|\}_{k \in \mathcal{N}}$  n'est pas bornée

$\Updownarrow$

$$\exists i \in [1, n] / \left(\lambda_i \notin \mathcal{D}_s\right) \text{ ou } \left(\lambda_i \in \mathcal{C}_u \implies \lambda_i \text{ est défective}\right)$$

## ELEMENTS FONDAMENTAUX

### PROCESSUS ALEATOIRES

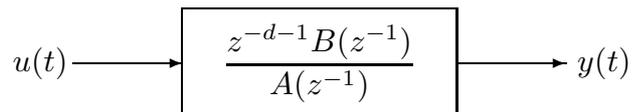


$$\mathcal{E}(u(t)) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\left((u(t))^2\right) = \sigma_u^2$$



$$\mathcal{E}(y(t)) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\left((y(t))^2\right) = \sigma_y^2$$

## ENTREES ASYMPTOTIQUEMENT REJETEES



$$A(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sa}[z]$$



- Entrées usuelles

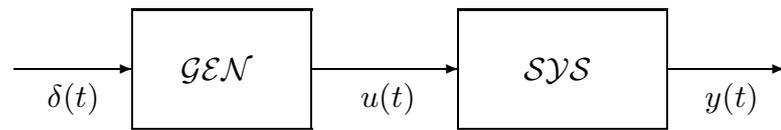
$$u(t) = \delta_a(t)$$

$$u(t) = \mathcal{F}(q^{-1})\delta(t) \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

- Entrées non usuelles

$$B(q^{-1})u(t) = \mathcal{F}(q^{-1})\delta(t) \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

### PRINCIPE DU MODELE INTERNE



↑  
*SYS est stable et GE<sub>N</sub> est marginalement stable*

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \iff \mathcal{CPSU}(\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}) \subset \mathcal{CZ}(\mathcal{S}\mathcal{Y}\mathcal{S})$$

↑

$$\mathcal{CPSU}(\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}) = \mathcal{C}\mathcal{P}(\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}) \cap \mathcal{C}_u$$

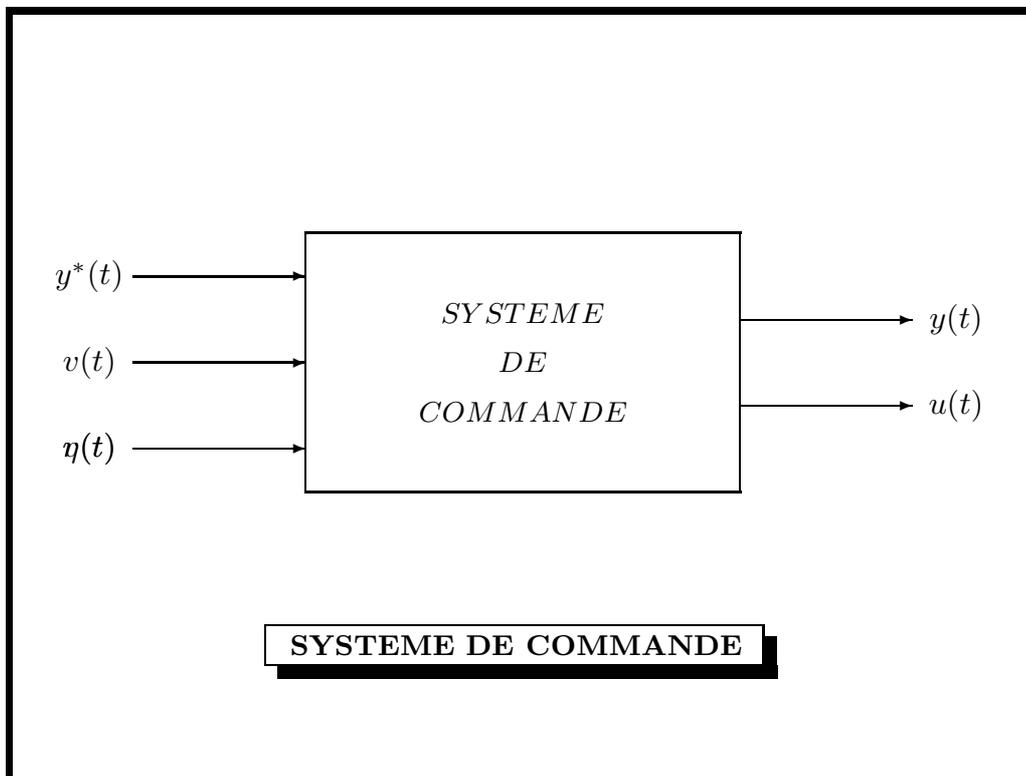
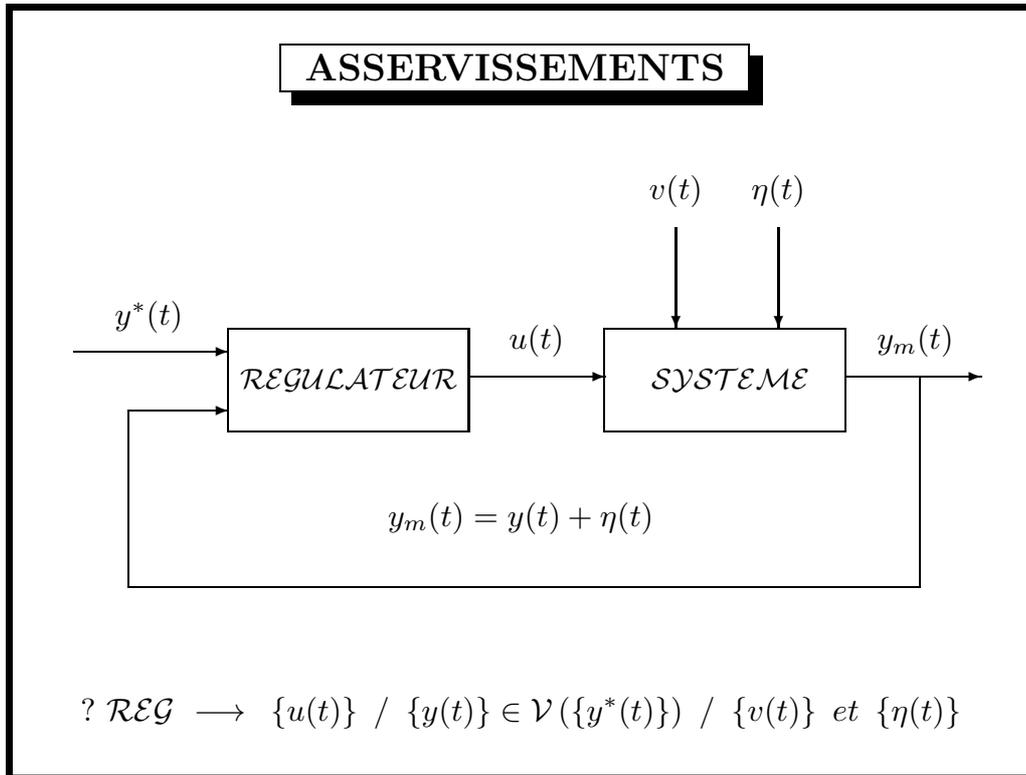
### CONCLUSION

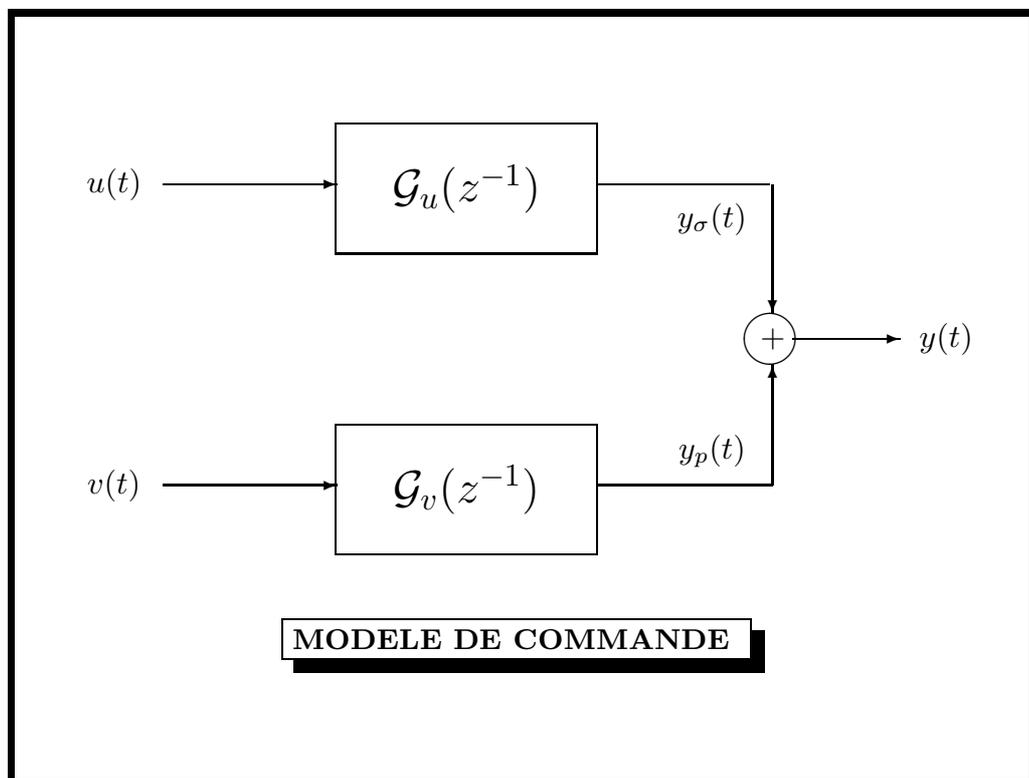
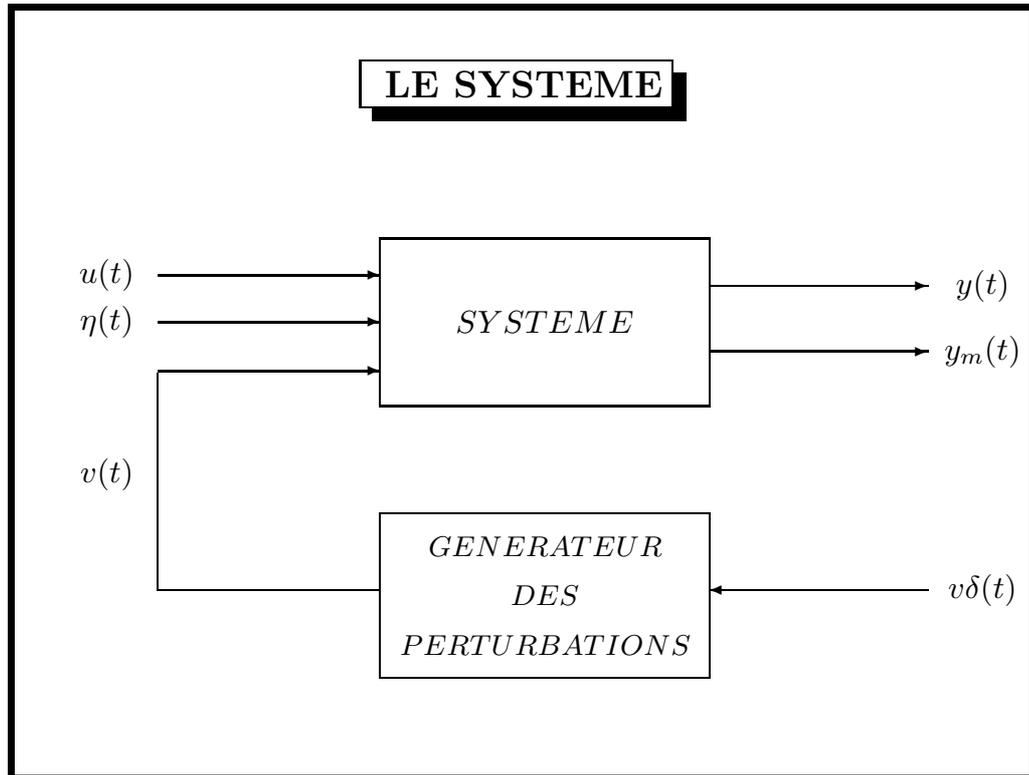
- Stabilité externe → réponse impulsionnelle
- Résultats fondamentaux de stabilité externe
- Limitation de la stabilité externe
- Stabilité interne → trajectoire d'état du système homogène
- Résultat fondamental de stabilité interne
- Outils fondamentaux à retenir

# SYSTEMES ASSERVIS

## PLAN

- ♠ Asservissements
- ♠ Le système
- ♠ Le régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systémique





$$MCOM \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})v\delta(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{array} \right.$$

$$\uparrow$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_{ne}q^{-ne}$$

$$\uparrow$$

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

### MODELE DE COMMANDE

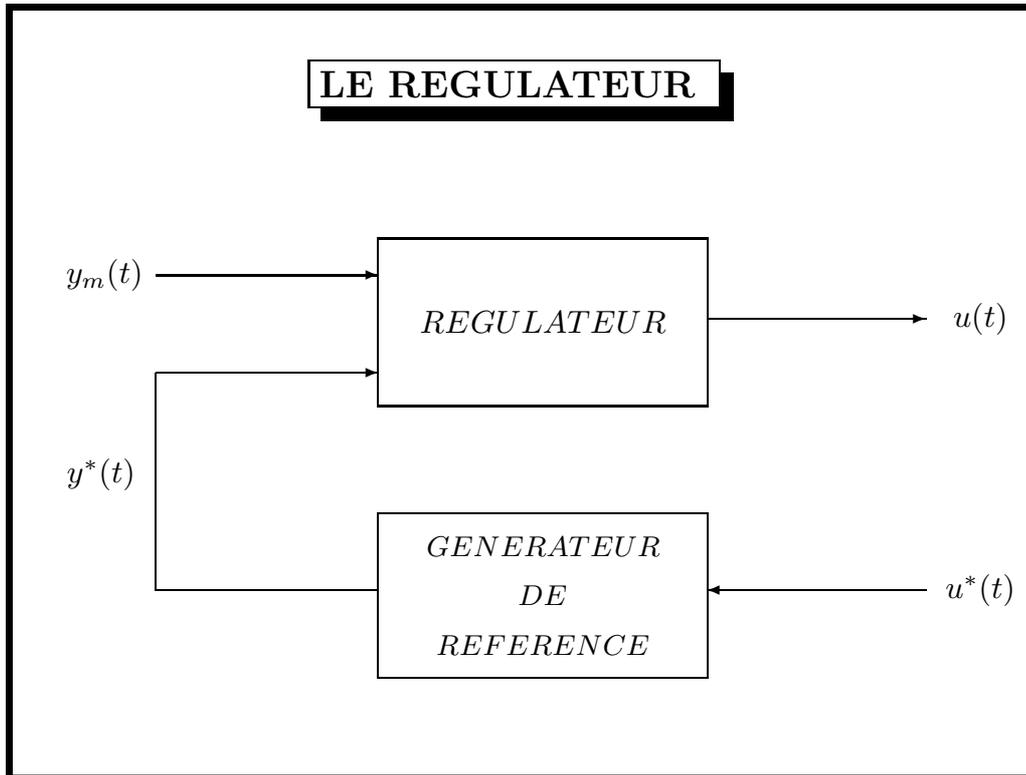
$$MODC \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \mathcal{G}_u(q^{-1}) u(t) + \mathcal{G}_v(q^{-1}) v(t) \\ v(t) = \mathcal{H}(q^{-1}) v\delta(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_u(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_v(q^{-1}) = \frac{E(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

$$\mathcal{H}(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$$



$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_p(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}_r(q^{-1}) y_m(t) + \mathcal{R}_p(q^{-1}) y^*(t + d + 1) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

↑

$$\mathcal{R}_r(q^{-1}) = \frac{R_n(q^{-1})}{R_d(q^{-1})}, \quad \mathcal{R}_p(q^{-1}) = \frac{R_p(q^{-1})}{R_d(q^{-1})}$$

et

$$\mathcal{G}^*(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

### COMMANDE AVEC RETOUR UNITAIRE

$$R_p(q^{-1}) = q^{-d-1} R_n(q^{-1})$$

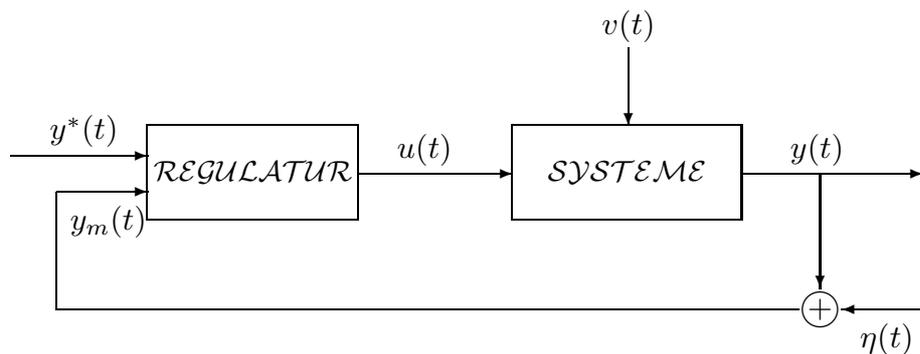
↓

$$\mathcal{REGRU} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}(q^{-1}) (y^*(t) - y_m(t)) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{R}(q^{-1}) = \frac{R_n(q^{-1})}{R_d(q^{-1})}$$

### SYSTEME DE COMMANDE



?  $\mathcal{REG} \rightarrow \{u(t)\} / \{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$  et  $\{\eta(t)\}$

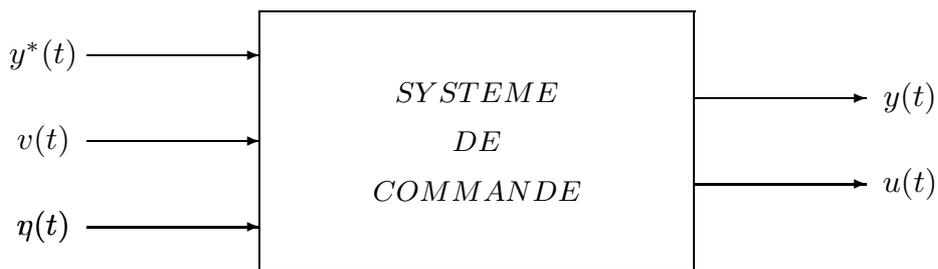
### EQUATIONS FONDAMENTALES

♠ *Le système*

$$\mathcal{MC} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{cases}$$

♠ *Le régulateur*

$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_p(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})v(t) = C^*(q^{-1})\delta_v(t) \end{cases}$$



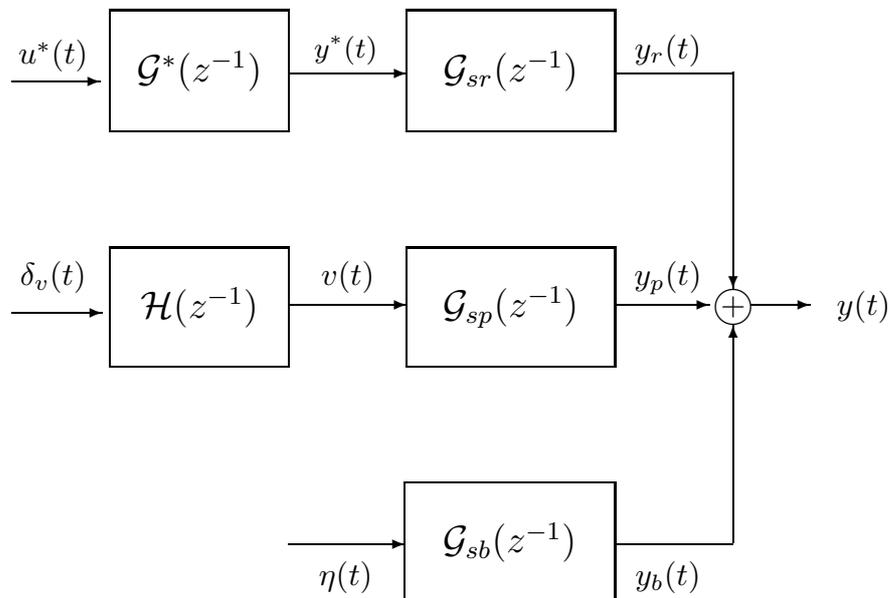
SYSTEME DE COMMANDE

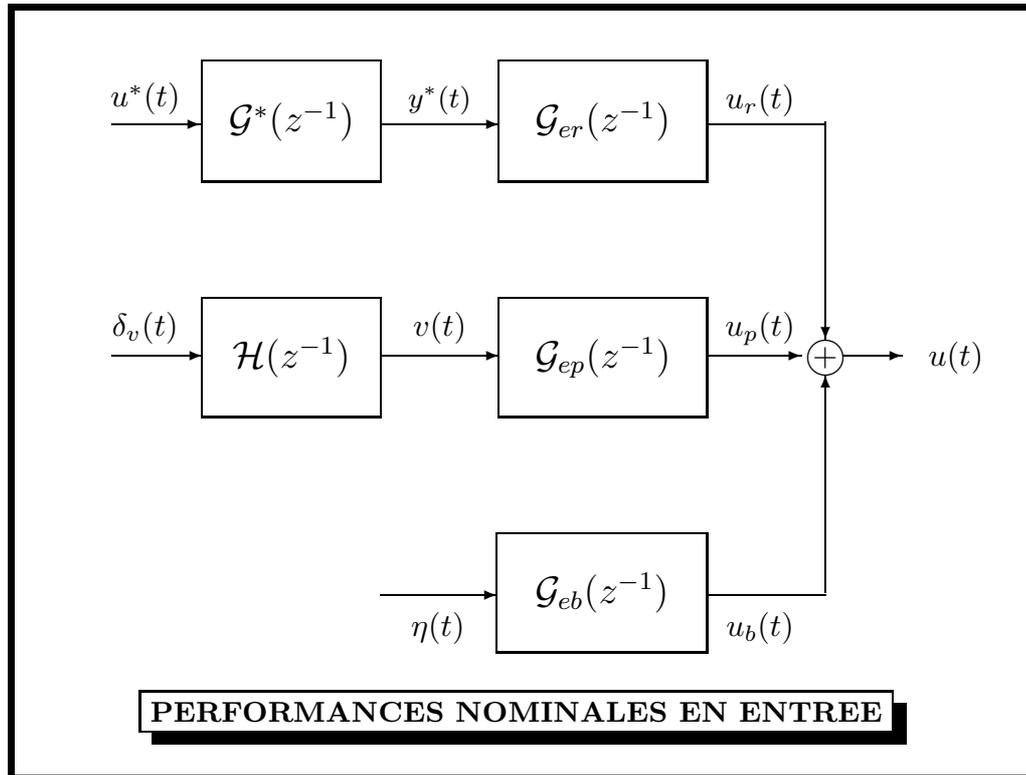
**SYSTEME DE COMMANDE NOMINAL**

$$\mathcal{SAS} \left\{ \begin{array}{l}
 y(t) = \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_p(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\
 \quad + \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t) \\
 u(t) = \frac{A(q^{-1})R_p(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\
 \quad - \frac{E(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t)
 \end{array} \right.$$

↑

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

**PERFORMANCES NOMINALES EN SORTIE**



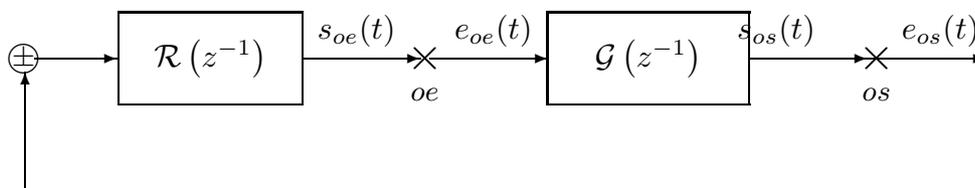
**FONCTIONS DE TRANSFERT DU SYSTEME ASSERVI**

$$FTR \left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \triangleq \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) \triangleq \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) \triangleq -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}
 \end{array} \right.$$

## ANALYSE SYSTEMIQUE

- Fonctions de transfert essentielles
- Stabilité nominale
- Synthèse modale
- Marge de stabilité
- Dynamique de poursuite
- Dynamique de régulation
- Sensibilité aux bruits de mesure

## FONCTIONS DE TRANSFERT ESSENTIELLES



## TRANSFERTS VITAUX

- Gain en boucle ouverte

$$\mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{R}(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{R}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_o(z^{-1}) \triangleq \mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{os}(z^{-1})$$

- Différence de retour

$$\mathcal{DR}_e(z^{-1}) \triangleq 1 + \mathcal{G}_{oe}(z^{-1}) \text{ et } \mathcal{DR}_s(z^{-1}) \triangleq 1 + \mathcal{G}_{os}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{DR}_e(z^{-1}) = \mathcal{DR}_s(z^{-1})$$

- ♠ Fonction de sensibilité

$$\mathcal{S}_e(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_e(z^{-1}))^{-1} \text{ et } \mathcal{S}_s(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_s(z^{-1}))^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}(z^{-1}))^{-1}$$

- ♠ Fonction de sensibilité complémentaire

$$\mathcal{T}_e(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_e(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_{oe}(z^{-1})$$

et

$$\mathcal{T}_s(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}_s(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_{os}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq (\mathcal{DR}(z^{-1}))^{-1} \mathcal{G}_o(z^{-1})$$

### PROPRIETES ESSENTIELLES

♠ Relation essentielle

$$\mathcal{S}(z) + \mathcal{T}(z) = 1 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{C}$$

♠ Fonction de sensibilité

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPH}$$

♠ Fonction de sensibilité complémentaire

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

### FONCTIONS DE SENSIBILITE USUELLES

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPH}$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

$$\mathcal{GS}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

$$\mathcal{RS}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{FPH} \\ \text{?FPB} \end{cases}$$

### STABILITE NOMINALE

Le système asservi est stable si et seulement si tous ses modes sont situés dans le domaine de stabilité, soit

$$\mathcal{SAS} \text{ est stable} \iff \mathcal{CM}(\mathcal{SAS}) \subset \mathcal{D}_{sa}^{pz}$$

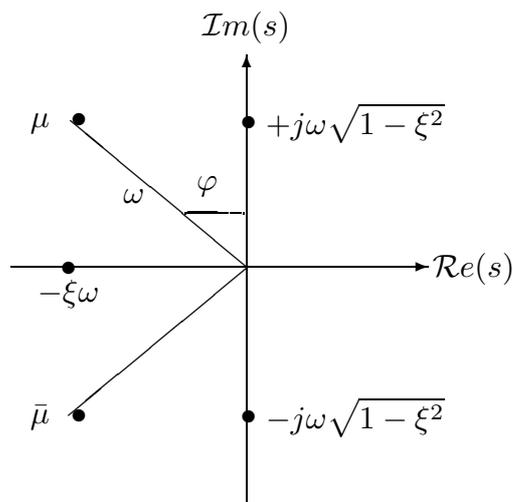
ou d'une manière équivalente

$$(\mathcal{SAS} \text{ est stable}) \iff (P_c(z^{-1}) = 0 \implies |z| < 1)$$

↑

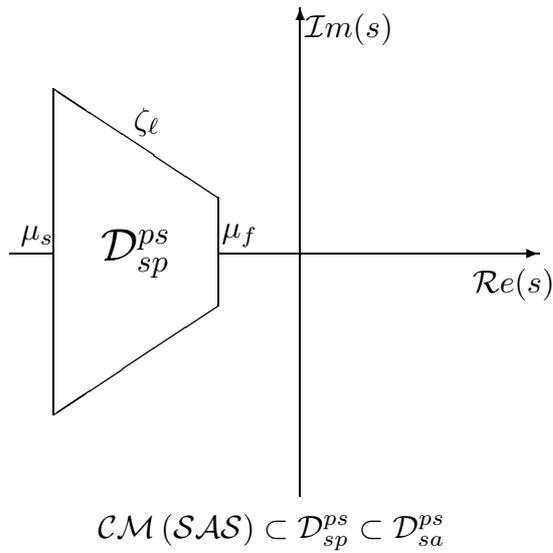
$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})$$

### PAPPEL



$$\text{Mode } (\xi, \omega) \rightarrow s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2$$

## DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES



$$\mathcal{D}_{sp}^{ps} = \left\{ s \in \mathbb{C} / \mathcal{Re}(s) \in [-\mu \xi_r \omega_r, -\xi_r \omega_r] \text{ avec } \mu > 1 \right. \\ \left. \text{et } |\mathcal{Im}(s)| \leq |\mathcal{Re}(s)| \frac{\sqrt{1 - \xi_r^2}}{\xi_r} \right\}$$

↓

$$\mu_s \in \mathcal{D}_{sp}^{ps} \longrightarrow \mu_z = e^{\mu_s T_e} \in \mathcal{D}_{sp}^{pz} \triangleq \mathcal{D}_{sp}$$

$$\text{Mode } (\xi, \omega) \longrightarrow 1 - 2e^{-\xi \omega T_e} \cos(\sqrt{1 - \xi^2} \omega T_e) z^{-1} + e^{-2\xi \omega T_e} z^{-2}$$

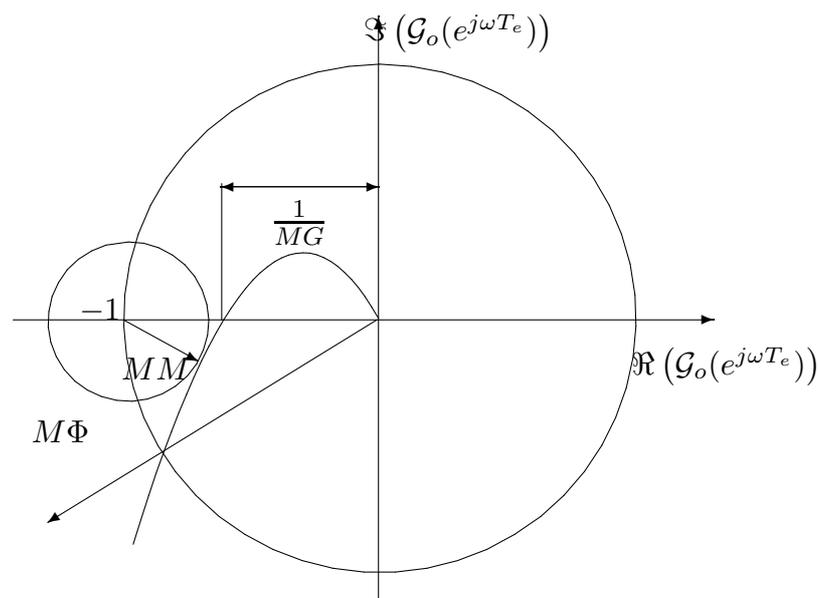
**SYNTHESE MODALE**

$$? (R_n(z^{-1}), R_n(z^{-1})) / P_c(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1}) \triangleq M(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$M_d(z^{-1}) = 1 - 2e^{-\xi_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\xi_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$M_a(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{nm-2} (1 - \mu_{ai}) \quad \text{avec } \mu_{ai} \in \mathcal{D}_{sp}$$

$$\downarrow$$
**EQUATION POLYNOMIALE****MARGES DE STABILITE**

### DYNAMIQUE DE POURSUITE

$$\begin{aligned}
 \mathcal{DP}(z^{-1}) &= \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1}) \\
 &= \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) \\
 &= \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} z^{d+1} \mathcal{G}^*(z^{-1})
 \end{aligned}$$

↓

*Le retard et les zéros du système  
sont invariants par rétroaction*

### CAS D'UN RETOUR UNITAIRE

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) = \mathcal{T}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

↓

*La poursuite parfaite  
n'est réalisable avec un retour unitaire*

### DYNAMIQUE DE REGULATION

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}$$

↓

*Les zéros de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_v(z^{-1})$   
sont invariants par rétroaction*

### SENSIBILITE AUX BRUITS DE MESURE

$$SBM : \{\eta(t)\} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_{sb}(t) \\ y_{eb}(t) \end{pmatrix}$$

$$SBM(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{T}(z^{-1}) \\ -\mathcal{RS}(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

## CONCLUSION

- ♠ Asservissement standard
- ♠ Une démarche méthodologique et rationnelle
- ♠ Système
- ♠ Régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systémique

UNE APPROCHE SYSTEME

DANS

UN CONTEXTE POLYNOMIAL