ESTIMATION OPTIMALE

Mohammed M'SAAD

ENSICAEN, 6 Boulevard Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex, France

PLAN

- ♠ Rappel
- ♠ Formulation du problème
- ♠ Prédicteur de Kalman
- ♠ Filtre de Kalman
- ♠ Comportement asymptotique
- ♠ Propriétés remarquables
- ♠ Adaptation paramétrique
- ♠ Conclusion

RAPPEL

- ♠ Représentation d'état et stabilité
- ♠ Observabilité et détectabilité
- ♠ Observabilité
- ♠ Observation asymptotique
- ♠ Détectabilité
- ♠ Valeur moyenne d'une forme quadratique
- ♠ Technique du complément d'un carré parfait

REPRESENTATION D'ETAT et STABILITE

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad avec \quad x(0) = x_o \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$\mathcal{SYS}$ *est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_{sa} \iff (det\,(zI_n - F) = 0 \implies \|z\| < 1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall Q = Q^T > 0, \exists ! P = P^T > 0 \ / \ F^T PF - P = -Q$$

OBSERVABILITE

Un système est observable si pour tout instant initial t_o et pour tout instant final $t_f > t_o$, il est possible de déterminer l'état initial $x(t_o)$ du système à partir de la connaissance de son comportement d'entrée-sortie sur l'intervalle $[t_o, t_f]$, soit

$$\{u(t)\}_{t\in[t_o,t_f]} \quad et \quad \{y(t)\}_{t\in[t_o,t_f]}$$
$$\Downarrow$$
$$x(t_o)$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour tout système décrit par une réalisation d'état (F, G, H).

P1 *La paire (H, F) est observable.*

P2 *La matrice d'observabilité*

$$\mathcal{M}_o = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang plein.

P3 *Le grammien d'observabilité défini par*

$$\mathcal{G}_o(k) = \sum_{i=o}^{k} \left(HF^i\right)^T \left(HF^i\right)$$

est une matrice définie strictement positive.

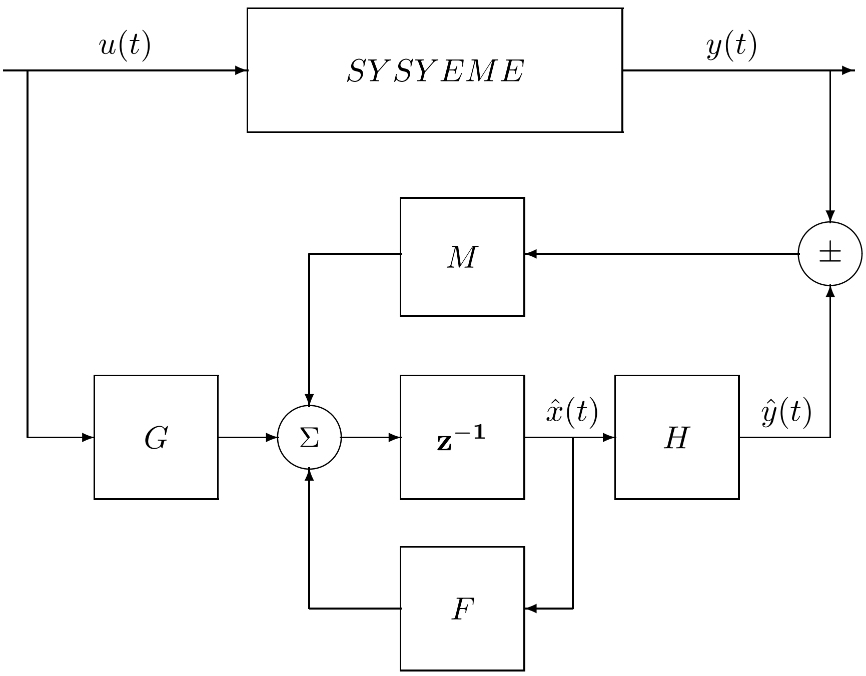
P4 $HF^{k-1}v = 0$ *pour tout* $k \iff v = 0$

OBSERVATION ASYMPTOTIQUE

$$\mathcal{SYS}\left\{\begin{array}{c} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad avec \quad x(0) = x_o \\ \\ y(t) = Hx(t) \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{OBSA}\left\{\begin{array}{c} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{array}\right.$$



OBSERVATION MODALE

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

et

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{EOBS} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x}(t+1) = (F - MH)\, \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) = H\tilde{x}(t) \end{array} \right.$$

RESULTAT

$$(H,\ F)\ \ est\ observable$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\ M \in \mathcal{R}^{n\times p} \quad / \quad det\,(zI_n - F + MH) = \prod_{i=1}^{n} (z - \mu_i)$$

$$\uparrow$$

$\{\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n\} \subset \mathcal{D}_{sp}$ sont les modes désirés de l'observateur

$$\downarrow$$

$\mathcal{D}_{sp}$ est une partie du disque unité
caractérisée par un amortissement minimal
et deux constantes de temps minimale et maximale

DETECTABILITE

Pour toute réalisation d'état (F, G, H) d'ordre fini n telle que $rang(\mathcal{M}_o) = r < n$, on peut toujours effectuer un changement de base

$$x(t) = T\bar{x}(t) \quad avec \quad T = \begin{bmatrix} T_o & T_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

qui permet de récrire le système sous la forme

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \bar{x}(t+1) = \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{G}u(t) \quad avec \quad \bar{x}(t_o) = T^{-1}x(t_o) \\ y(t) = \bar{H}\bar{x}(t) \end{cases}$$

avec

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \ \bar{G} = \begin{bmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad et \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$$

telle que la paire (H_o, F_o) est observable.

DEFINITION

La paire (H, F) est détectable si et seulement si tous ses modes non observables sont asymptotiquement stables, soit

$$\det(zI_{\bar{r}} - F_{\bar{o}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z \in \mathcal{D}_{sa}$$

RESULTAT

La paire (H, F) est détectable si et seulement si la synthèse d'un observateur est possible, soit

$$\exists M \in \mathcal{R}^{n \times p} \ / \ \det(zI_n - F + MH) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z \in \mathcal{D}_{sa}$$

VALEUR MOYENNE D'UNE FORME QUADRATIQUE

Soit x une variable gaussienne aléatoire de moyenne m_x et de covariance C_{xx} et P une matrice symétrique définie positive. On a

$$\mathcal{E}\left\{x^T P x\right\} = trace\left(PC_{xx}\right) + m_x^T P m_x$$

$$\uparrow$$

$$m_x = \mathcal{E}\left\{x\right\} \quad et \quad C_{xx} = \mathcal{E}\left\{\left(x - m_x\right)\left(x - m_x\right)^T\right\}$$

TECHNIQUE DU COMPLEMENT DU CARRE PARFAIT

La fonction quadratique définie par

$$J(x,u) = \left[\begin{array}{cc} x^T & u^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} W_x & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_u \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ u \end{array}\right]$$

peut se récrire sous la forme

$$J(x,u) = x^T\left(W_x - K^T W_u K\right)x + \left(u + Kx\right)^T W_u \left(u + Kx\right)$$

avec

$$W_u K = W_{xu}^T$$

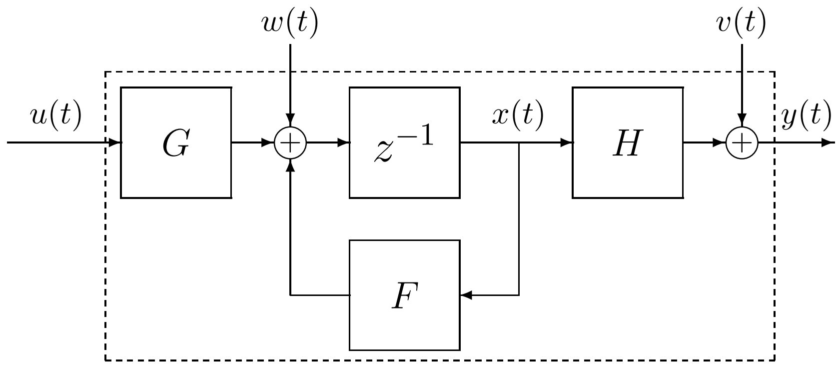
Il est clair que cette fonction est minimisée pour $u = -Kx$ et que le minimum correspondant est donné par

$$J(x,u) = x^T\left(W_x - K^T W_u K\right)x \;\geq\; 0$$

FORMULATION DU PROBLEME

$$\mathcal{SLIT} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



$(F,\ G,\ H)$ est une réalisation d'état du système que l'on peut obtenir en résolvant le problème de réalisation sous-jacent

$$\mathcal{G}\left(z\right) = H\left(zI_n - F\right)^{-1} G$$

$\{w(t)\} \in \mathcal{R}^n$ et $\{v(t)\} \in \mathcal{R}^p$ sont respectivement des bruits blancs tels que

$$\mathcal{E}\left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t-\tau)^T & v(t-\tau)^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_o & W_o \\ W_o^T & R_o \end{bmatrix} \delta(\tau)$$

avec $Q_o = G_o G_o^T \geq 0$ et $R_o = R_o^T > 0$ et $x(t_o)$ est une variable aléatoire indépendante des perturbations d'état telle que

$$\mathcal{E}\left\{x(t_o)\right\} = x_o \quad et \quad \mathcal{E}\left\{\left(x(t_o) - x_o\right)\left(x(t_o) - x_o\right)^T\right\} = \Sigma_o$$

LE PROBLEME D'ESTIMATION OPTIMALE

$$\mathcal{SYS}\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases}$$

$$\spadesuit$$

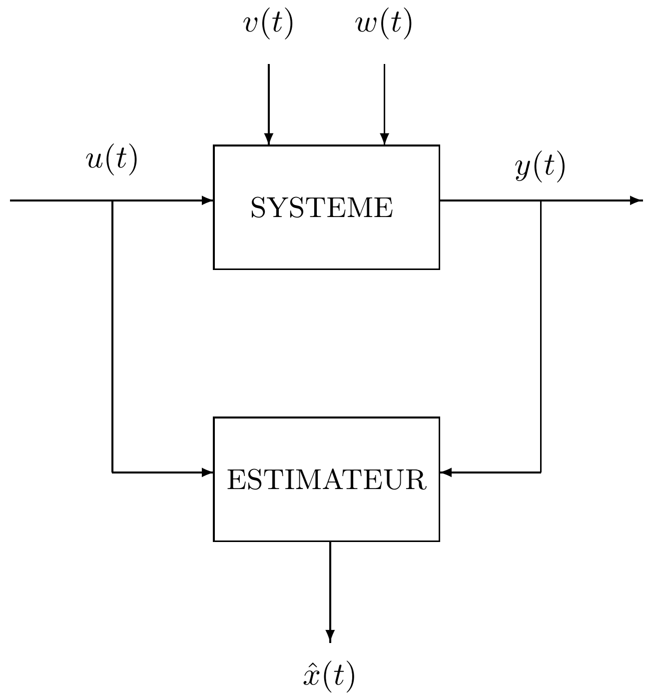
$$\mathcal{ESTA}\begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$?\ M \in \mathcal{R}^{n\times p}\ /\ \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\} = 0\ \ et\ \ \Sigma(t) = \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T\}\ \ est\ \ minimale$$

$$\uparrow$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$



COMPORTEMENT D'UN ESTIMATEUR

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{c} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{array} \right.$$

et

$$\mathcal{ESTA} \left\{ \begin{array}{c} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{x}(t+1) = (F - MH)\ \tilde{x}(t) + w(t) - Mv(t)$$

La consistance de l'estimateur est une conséquence directe de sa structure puisque l'erreur d'estimation peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t+1)\} = (F - MH)\ \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\}$$

qui fait apparaître clairement qu'elle est nulle en moyenne si et seulement si l'estimateur est asymptotiquement stable, soit

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\} \textit{ est asymptotiquement nulle}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{V}\left(F - MH\right)\ \subset\ \mathcal{D}_{sa}$$

PREDICTEUR DE KALMAN

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{c} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{array} \right.$$

$$\spadesuit$$

$$\mathcal{PK} \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t)\left(y(t) - \hat{y}(t/t-1)\right) \\ \hat{y}(t/t-1) = H\hat{x}(t/t-1) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$?\,\{M_p(t)\} \;\; / \;\; \Sigma\left(t/t-1\right) = \mathcal{E}\left\{\tilde{x}(t/t-1)\tilde{x}(t/t-1)^T\right\} \;\; est \;\; minimale$$

RESULTAT FONDAMENTAL I

$$\mathcal{PK} \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t)\left(y(t) - \hat{y}(t/t-1)\right) \\ \\ \hat{y}(t/t-1) = H\hat{x}(t/t-1) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} M_p(t) & = & \left(F\Sigma(t/t-1)H^T + W_o\right)\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1} \\ \Sigma(t+1/t) & = & F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o \;\; - \;\; \left(F\Sigma(t/t-1)H^T + W_o\right) ... \\ & & ... \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1}\left(H\Sigma(t/t-1)F^T + W_o^T\right) \end{array}$$

Preuve

L'erreur de prédiction est donnée par

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t+1/t) &= (F - M_p(t)H)\,\tilde{x}(t/t-1) + w(t) - M_p(t)v(t) \\
&= \begin{pmatrix} I_n & -M_p(t) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} \tilde{x}(t/t-1) + \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}(0) = x_o \implies \mathcal{E}\{\tilde{x}(t/t-1)\} = 0$$

et

$$(\mathcal{PK} \textit{ est asymptotiquement stable}) \implies \mathcal{E}\{\tilde{x}(t/t-1)\} = 0$$

La matrice de variance de l'erreur de prédiction peut se récrire

$$
\begin{aligned}
\Sigma(t+1/t) &= \mathcal{E}\left\{\tilde{x}(t+1/t)\tilde{x}(t+1/t)^T\right\} \\
&= \begin{pmatrix} I_n & -M_p(t) \end{pmatrix} \mathcal{W}(t/t-1) \begin{pmatrix} I_n & -M_p(t) \end{pmatrix}^T
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(t/t-1) &= \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} \Sigma(t/t-1) \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} Q_o & W_o \\ W_o^T & R_o \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o & F\Sigma(t/t-1)H^T + W_o \\ H\Sigma(t/t-1)F^T + W_o^T & H\Sigma(t/t-1)H^T + R_o \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Il apparaît clairement que $\Sigma(t+1/t)$ est définie positive pourvu que $\Sigma(t/t-1)$ soit définie positive et que l'équation ci-dessous est semblable à la fonction quadratique qui apparaît dans le lemme du complément du carré parfait.

REMARQUE

Si $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont gaussiennes, alors le prédicteur de Kalman fournit une estimée à variance minimale de l'état, soit la moyenne conditionnelle de l'état à partir des données d'entrée-sortie passées

$$\hat{x}(t/t-1) = \mathcal{E}\left\{x(t)/\mathcal{D}(t-1)\right\}$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$\nu(t) = y(t) - H\hat{x}(t/t-1)$$

on aura

$$\mathcal{E}\left\{\nu(t)/\mathcal{D}(t-1)\right\} = 0$$

et

$$y(t) = H\hat{x}(t/t-1) + \nu(t) = \mathcal{E}\left\{y(t)/\mathcal{D}(t-1)\right\} + \nu(t)$$

$$y(t) = H\hat{x}(t/t-1) + \nu(t)$$

$\{\nu(t)\}$ est dite séquence d'innovation

$$\downarrow$$

$$\mathcal{MI}\left\{\begin{array}{l} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t)\nu(t) \\ \\ y(t) = H\hat{x}(t/t-1) + \nu(t) \end{array}\right.$$

$$\uparrow$$

modèle d'innovation

FILTRE DE KALMAN

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{c} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{array} \right.$$

♠

$$\mathcal{RPPF} \left\{ \begin{array}{c} \hat{x}(t/t) = \hat{x}(t/t-1) + M_f(t)\left(y(t) - H\hat{x}(t/t-1)\right) \\ \\ \hat{y}(t/t) = H\hat{x}(t/t) \end{array} \right.$$

♠

$$? \ \{M_f(t)\} \ \ / \ \ \Sigma\left(t/t\right) = \mathcal{E}\left\{\tilde{x}(t/t)\tilde{x}(t/t)^T\right\} \ \ \textit{est minimale}$$

RESULTAT FONDAMENTAL II

La relation de passage du filtre au prédicteur donnée par l'équation

$$\mathcal{RPFP} \left\{ \begin{array}{c} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t) + Gu(t) + \hat{w}(t/t) \\ \\ \hat{w}(t/t) = M_w(t)\left(y(t) - H\hat{x}(t/t-1)\right) \end{array} \right.$$

qui permet de trouver aisément la relation entre les gains du prédicteur et du filtre

$$M_p(t) = FM_f(t) + M_w(t)$$

avec

$$M_f(t) = \Sigma(t/t-1)H^T\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1}$$
$$M_w(t) = W_o\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1}$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$W_o = 0$$

$$\mathcal{PK}\left\{\begin{array}{l} \hat{x}(t+1/t) = (F - M_p(t)H)\,\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t)y(t) \\ \\ \hat{y}(t/t-1) = H\hat{x}(t/t-1) \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} M_p(t) & = & F\Sigma(t/t-1)H^T\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1} \\ \\ \Sigma(t+1/t) & = & F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o \;-\; F\Sigma(t/t-1)H^T.. \\ & & ...\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1} H\Sigma(t/t-1)F^T \end{array}$$

$$\mathcal{FK}\left\{\begin{array}{l} \hat{x}(t+1/t+1) \;=\; (I_n - M_f(t+1)H)\,F\hat{x}(t/t) \\ \qquad\qquad\qquad + \; (I_n - M_f(t+1)H)\,Gu(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \; M_f(t+1)y(t+1) \\ \hat{y}(t/t) = H\hat{x}(t/t) \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} M_f(t) & = & \Sigma(t/t-1)H^T\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1} \\ \\ \Sigma(t+1/t) & = & F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o \;-\; F\Sigma(t/t-1)H^T.. \\ & & ...\left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1} H\Sigma(t/t-1)F^T \end{array}$$

RESULTAT FONDAMENTAL III

Supposons que $(H,\ F)$ *est détectable et* $(F,\ G_o)$ *stabilisable. Alors le comportement asymptotique du prédicteur et du filtre de Kalman est donné par les équations*

$$\hat{x}(t+1/t) = (F - M_p H)\,\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p y(t)$$

$$\hat{x}(t{+}1/t{+}1) = (I_n - M_f H)\,F\hat{x}(t/t){+}(I_n - M_f H)\,Gu(t){+}M_f y(t{+}1)$$

avec

$$M_p = F\Sigma H^T\left[R_o + H\Sigma H^T\right]^{-1} = FM_f$$

$$\Sigma = F\Sigma F^T \ + \ Q_o \ - \ F\Sigma H^T\left[R_o + H\Sigma H^T\right]^{-1} H\Sigma F^T$$

Ces estimateurs sont asymptotiquement stables et ont la même dynamique, soit

$$\mathcal{V}\left(F - M_p H\right) = \mathcal{V}\left(\left(I_n - M_f H\right)F\right) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

Preuve

$\longrightarrow$ une conséquence directe du résultat fondamental suivant

Supposons que $(H,\ F)$ *est détectable et* $(F,\ G_o)$ *stabilisable, alors l'équation algébrique de Riccati*

$$\Sigma = F\Sigma F^T - F\Sigma H^T\left(R_o + H\Sigma H^T\right)^{-1} H\Sigma F^T + Q_o$$

admet une solution symétrique et définie non-négative unique Σ *qui vérifie la propriété de stabilité suivante*

$$\mathcal{V}\left(F - MH\right) \ \subset \ \mathcal{D}_{sa} \text{ avec } M = F\Sigma H^T\left(R_o + H\Sigma H^T\right)^{-1}$$

Si en plus la paire $(F,\ G_o)$ *est commandable, alors la solution* Σ *est définie positive.*

En effet, supposons que la séquence matricielle $\{\Sigma(t/t-1)\}$ converge vers une matrice Σ, alors Σ est une solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\Sigma = F\Sigma F^T - F\Sigma H^T \left(R_o + H\Sigma H^T\right)^{-1} H\Sigma F^T + Q_o$$

La séquence de gain de prédiction (respectivement de filtrage) converge alors vers le gain de prédiction M_p (respectivement le gain de filtrage M_f), soit

$$M_p = F\Sigma H^T \left(R_o + H\Sigma H^T\right)^{-1} = FM_f$$

$$\Uparrow$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} M_p(t) = M_p \quad et \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} M_f(t) = M_f$$

La solution Σ est stabilisante puisque $(H,\ F)$ est détectable et $(F,\ G_o)$ stabilisable comme l'indique le résultat ci-dessus.

Les erreurs de prédiction et de filtrage sont respectivement données par

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t+1/t)\} = (F - M_pH)\ \mathcal{E}\{\tilde{x}(t/t-1)\}$$

et

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t+1/t+1)\} = (I_n - M_fH)\, F\ \mathcal{E}\{\tilde{x}(t/t)\}$$

Le polynôme caractéristique du filtre peut se récrire comme suit

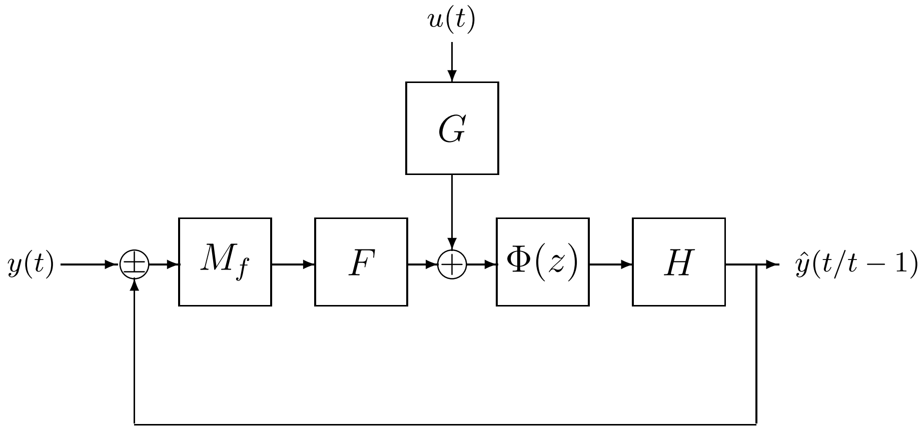
$$\begin{aligned} P_{cfil}(z) &= det\,(zI_n - (I_n - M_fH)\,F) = det\,(zI_n - F\,(I_n - M_fH)) \\ &= det\,(zI_n - F + FM_fH) = det\,(zI_n - F + M_pH) \\ &= P_{cpre}(z) \end{aligned}$$

On aura donc

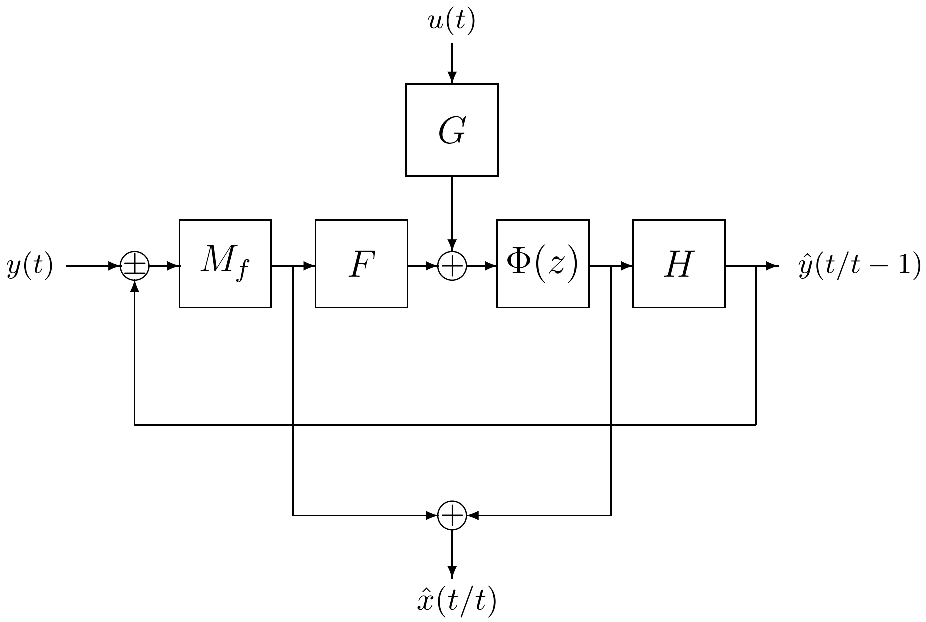
$$\mathcal{V}\,(F - M_pH) = \mathcal{V}\,((I_n - M_fH)\,F)$$

ce qui prouve que le prédicteur et le filtre ont la même dynamique

Prédicteur de Kalman



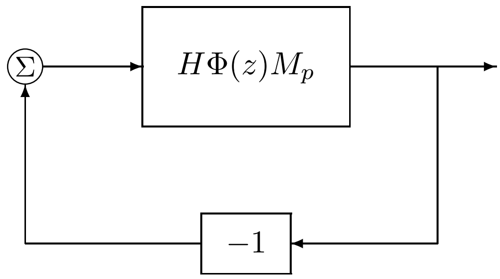
Filtre de Kalman



PROPRIETES REMARQUABLES

Les matrices de transfert obtenues en ouvrant les boucle en sortie sont données par

$$\mathcal{G}_{oo}(z) = H\Phi(z)M_p = H\Phi(z)FM_f \quad avec \quad \Phi(z) = (zI_n - F)^{-1}$$

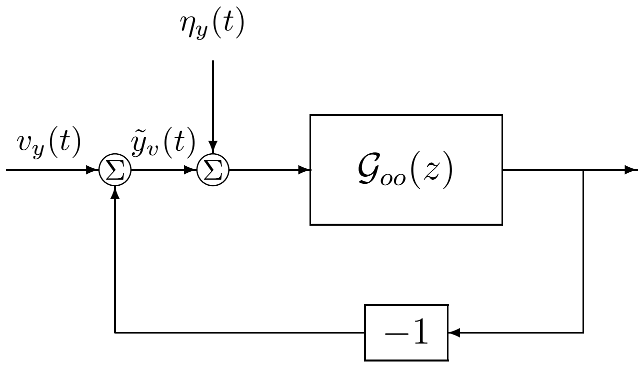


Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire qui y sont associées sont alors respectivement données par

$$\mathcal{S}_o(z) = (I_p + \mathcal{G}_{oo}(z))^{-1} \quad et \quad \mathcal{T}_o(z) = \mathcal{G}_{oo}(z)\,(I_p + \mathcal{G}_{oo}(z))^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{Y}_v(z) = \mathcal{S}_o(z)V_y(z) - \mathcal{T}_o(z)N_y(z)$$



RESULTAT FONDAMENTAL IV

Posons

$$\mathcal{M}_{oo}(z) = H\left(zI_n - F\right)^{-1} G_o$$

$$A(z) = det\left(zI_n - F\right) \quad et \quad P_{cest}(z) = det\left(zI_n - F + M_p H\right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sigma_{min}\left(R_o\right)}{\sigma_{max}\left(R_o + H\Sigma H^T\right)}} \leq 1$$

Alors les estimateurs de Kalman possèdent les propriétés suivantes

P1. *L'égalité de différence de retour*

$$\left(I_p + \mathcal{G}_{oo}(z)\right)\left(R_o + H\Sigma H^T\right)\left(I_p + \mathcal{G}_{oo}(z^{-1})\right)^T$$
$$=$$
$$R_o + \mathcal{M}_{oo}(z)\mathcal{M}_{oo}(z^{-1})^T$$

est toujours vérifiée pour tout $z \in \mathcal{C}$.

P2. *Les modes des estimateurs peuvent être déterminés à partir de l'équation de factorisation spectrale suivante*

$$\frac{P_{cest}(z^{-1})P_{cest}(z)}{A(z^{-1})A(z)} = \frac{\det\left(R_o + \mathcal{M}_{oo}(z)\mathcal{M}_{oo}(z^{-1})^T\right)}{\det\left(R_o + H\Sigma H^T\right)}$$

P3. *La fonction de sensibilité des estimateurs vérifie l'inégalité de différence de retour*

$$\sigma_{max}\left(\mathcal{S}_o(z)\right) \;\leq\; \frac{1}{\beta} \text{ pour tout } z \in \mathcal{C}_{01}$$

REMARQUES

R1. La propriété P2 permet de déduire le comportement asymptotique des modes des estimateurs lorsque les matrices de variance des perturbations d'état et de sortie sont suffisamment petites, soit

$$P_{cest}(z)P_{cest}(z^{-1}) \approx B_{oo}(z)B_{oo}(z^{-1}) \ \ lorsque \ \ R_o \longrightarrow 0$$

et

$$P_{cest}(z)P_{cest}(z^{-1}) \approx A(z)A(z^{-1}) \ \ lorsque \ \ Q_o \longrightarrow 0$$

avec

$$\frac{B_{oo}(z)B_{oo}(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} = det\left(\mathcal{M}_{oo}(z)\mathcal{M}_{oo}(z^{-1})^T\right)$$

$$\uparrow$$

$$Q_o = GG^T \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}_{oo}(z) = H\left(zI_n - F\right)^{-1} G = \mathcal{G}(z)$$

R2. La propriété P4 confère aux estimateurs de Kalman une robustesse remarquable : les erreurs de modélisation et les perturbations que l'on peut ramener en sortie sont relativement bien atténuées en basses fréquences. Dans le cas des systèmes monovariables, une telle propriété devient

$$\mid 1 + \mathcal{G}_{oo}(e^{j\omega T_e}) \mid \ \ \geq \ \beta \ \ pour \ tout \ \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_e}, \ \ +\frac{\pi}{T_e}\right]$$

Le lieu de Nyquist du gain en boucle ouverte se trouve ainsi à l'extérieur d'un cercle de centre le point critique $(-1, 0j)$ et de rayon β. Les marges de module, de gain et de phase qui en résultent sont respectivement données par

$$\Delta M = \beta, \quad \Delta G \in \left[\frac{1}{1+\beta}, \ \frac{1}{1-\beta}\right] \ \ et \ \ \Delta\phi \ \geq \ 2\arcsin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

R3. En supposant que les conditions initiales sont nulles, on peut récrire le prédicteur et le filtre comme suit

$$\hat{Y}_p(z) = F_{pu}(z)U(z) + F_{py}(z)Y(z)$$

avec

$$F_{pu}(z) = \frac{H Adj\left(zI_n - F + M_pH\right)G}{P_{cest}(z)}$$

$$F_{py}(z) = \frac{H Adj\left(zI_n - F + M_pH\right)M_p}{P_{cest}(z)}$$

et

$$\hat{Y}_f(z) = F_{fu}(z)U(z) + F_{fy}(z)Y(z)$$

avec

$$F_{fu}(z) = \frac{H Adj\left(zI_n - F - M_fHF\right)\left(I_n - M_fH\right)G}{P_{cest}(z)}$$

$$F_{fy}(z) = \frac{z\ H Adj\left(zI_n - F - M_fHF\right)M_f}{P_{cest}(z)}$$

R4. L'erreur de prédiction de la sortie est donnée par

$$\tilde{y}(t/t-1) = H\tilde{x}(t/t-1) + v(t)$$

avec

$$\tilde{x}(t+1/t) = \left(F - M_pH\right)\tilde{x}(t/t-1) + w(t) - M_pv(t)$$

En supposant que les conditions initiales sont nulles et en utilisant le lemmme d'inversion, on aura

$$\tilde{Y}(z) = \mathcal{S}_o(z)V(z) + H\left(zI_n - F + M_pH\right)^{-1}W(z)$$

Conformément à la propriété de robustesse du prédicteur, les effets les plus néfastes des perturbations d'état et des bruits de mesure sur la prédiction de la sortie correspondent à une amplification d'un facteur β

REMARQUE

La synthèse du prédicteur et du filtre de Kalman aurait pu être effectuée directement pour les systèmes variants dans le temps, soit

$$\mathcal{SLVT}\left\{\begin{array}{c} x(t+1)=F(t)x(t)+G(t)u(t)+w(t) \\ \\ y(t)=H(t)x(t)+v(t) \end{array}\right.$$

pourvu que

$$(H(t),\ F(t)) \text{ est uniformément détectable}$$

$$(F(t),\ G_o) \text{ est uniformément stabilisable}$$

Le système $\mathcal{SLVT}$ est uniformément observables s'il existe un instant t_f et des constantes positives α_o, α_1, β_o et β_1 tels que le grammien d'observabilité du système défini par

$$\mathcal{G}_o\left(t_o,t_f\right)=\sum_{t=t_o+1}^{t_f}\Phi(t,t_o+1)^T H(t)^T H(t)\Phi(t,t_o+1)$$

avec

$$\Phi(t,t_o)=\left\{\begin{array}{c} F(t-1)F(t-2)\dots F(t_o)\ \ pour\ t>t_o \\ I_n\ \ pour\ t=t_o \end{array}\right.$$

vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}_o\left(t_f-t,t_1\right)\ >\ 0\ \ \forall\ t_f \\ \alpha_o I_n\ \leq\ \left(\mathcal{G}_o\left(t_f-t,t_1\right)\right)^{-1}\ \leq\ \alpha_1 I_n\ \ \forall\ t_f \\ \beta_o I_n\ \leq\ \Phi(t_f,t_f-t)\left(\mathcal{G}_o\left(t_f-t,t_f\right)\right)^{-1}\Phi(t_f,t_f-t)^T\ \leq\ \beta_o I_n\ \ \forall\ t_f \end{array}$$

ADAPTATION PARAMETRIQUE

$$\mathcal{SYS} \left\{ A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + v(t) \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} \theta(t+1) = \theta(t) \;\; avec \;\; \theta_o = \theta \\ \\ y(t) = \phi(t-1)^T\theta(t) + v(t) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{SYS}$ est est uniformément observable pourvu que $\{u(t)\}$ est choisie de manière à satisfaire la condition d'excitation persistante

$$\text{La matrice } \frac{1}{t}\sum_{t=1}^{t} \phi(t-1)\phi(t-1)^T \text{ est régulière}$$

Le prédicteur de Kalman correspondant est obtenu en prenant

$$F(t) = I_n, \; G(t) = 0, \; H(t) = \phi(t-1)^T, R_o = \sigma_o \; et \; Q_o = 0$$

soit les équations

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + \frac{F(t-1)\phi(t-1)}{\sigma_o + \phi(t-1)^T F(t-1)\phi(t-1)}\, \varepsilon_o(t) \\ \\ \varepsilon_o(t) &= y(t) - \phi(t-1)^T\hat{\theta}(t-1) \\ \\ \Sigma(t) &= \Sigma(t-1) - \frac{\Sigma(t-1)\phi(t-1)\phi(t-1)^T\Sigma(t-1)}{\sigma_o + \phi(t-1)^T\Sigma(t-1)\phi(t-1)} \end{aligned}$$

qui ne sont autre que les équations de l'algorithme d'adaptation paramétrique aux moindres carrés

LE BONUS KALAMAN

On peut effectuer une adaptation paramétrique dans le cas des systèmes linéaires variant dans le temps

$$\mathcal{SLPVT} \left\{ \begin{array}{c} \theta(t+1) = F(t)\theta(t) + G(t)\theta^* + w(t) \\ y(t) = H(t)\theta(t) + v(t) \end{array} \right.$$

♠

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(t+1) &= F(t)\hat{\theta}(t) + G(t)\theta^* + \Gamma(t)\left(y(t) - H(t)\hat{\theta}(t)\right) \\
\Gamma(t) &= F(t)\Sigma(t)H(t)^T \left(R_o + H(t)\Sigma(t)H(t)^T\right)^{-1} \\
\Sigma(t+1) &= F(t)\Sigma(t)F(t)^T - F(t)\Sigma(t)H(t)^T ... \\
&\qquad ... \left(R_o + H(t)\Sigma(t)H(t)^T\right)^{-1} H(t)\Sigma(t)F(t)^T + Q_o
\end{aligned}$$

CONCLUSION

♠ Le problème d'estimation optimale

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{c} x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + w(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + v(t) \end{array} \right.$$

a été étudié à la lumière de la culture Kalmanienne

♠ Prédicteur et Filtre de Kalman

♠ Versions stationnaires des estimateurs de Kalman

♠ Propriétés d'ingénieur des estimateurs de Kalman

♠ Remarques pertinentes

♠ Estimation et adaptation paramétrique aux moindres carrés