ENSICAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2020–2021

1$^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – mercredi 13 janvier 2021

Durée : 1h 30min

Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point.

Les exercices sont indépendants et le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

L'espace est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Exercice 1. *(6 points)*

a) Trouvez les solutions réelles du système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) En se ramenant à un système différentiel d'ordre 1, trouvez les solutions réelles de l'équation différentielle

$$f^{(3)}(t) - 2f''(t) - f'(t) + 2f(t) = 0.$$

Indication : les trois valeurs propres sont des racines évidentes.

Exercice 2. *(6 points)*

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1\}$ un domaine borné de l'espace. Il est délimité par la surface ∂V qui est l'ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ centrée sur l'origine.

a) Déterminez les valeurs positives des coefficients α, β et γ pour que $\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \beta \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \gamma \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $(\theta, \varphi) \in]0, \pi[\times[0, 2\pi[$, soit un paramétrage de la surface ∂V.

b) Montrez que

$$\frac{\partial \vec{\sigma}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta)/2 \\ \sin(\varphi) \sin(\theta)/2 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Evaluez ce produit vectoriel en un point $\vec{\sigma}(\theta, \varphi)$ de votre choix pour savoir s'il pointe vers l'intérieur ou l'extérieur de V.

c) Soit le champ

$$\vec{A}(x, y, z) = z\vec{u}_z.$$

Calculez le flux Φ_A de $\vec{A}$ sortant du domaine V sans utiliser le théorème de Green-Ostrogradski.

d) Soit le champ
$$\vec{B}(x,y,z) = xy^2\,\vec{u}_x + yx^2\,\vec{u}_y.$$
Calculez l'intégrale $I_B = \iiint_V \operatorname{div}\vec{B}\;dV$ sans utiliser le théorème de Green-Ostrogradski.

Exercice 3. *(8 points)*

Soit S un domaine borné du plan Oxy. Son bord ∂S est une courbe fermée de longueur $L > 0$, et il est paramétré par l'arc $\vec{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ avec $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Le paramétrage a les propriétés suivantes :

- $\vec{\gamma}$ est de classe $\mathscr{C}^1$,
- $\vec{\gamma}$ fait une seule fois le tour de S avec $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(1)$ et $\vec{\gamma}'(0) = \vec{\gamma}'(1)$,
- le parcours se fait avec $\vec{u}_z \wedge \vec{\gamma}'(t)$ qui pointe toujours vers S,
- $\forall t \in [0,1]$, $||\vec{\gamma}'(t)|| = L$ (où L, on le rappelle, est la longueur du bord ∂S).

a) En appliquant le théorème de Stokes avec le champ $\vec{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, montrez que l'aire A du domaine S vérifie l'égalité
$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\gamma_x(t)\gamma_y'(t) - \gamma_y(t)\gamma_x'(t)\Big)\;dt.$$

b) Soit Γ la fonction à valeurs complexes, 1-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$, et qui est définie par $\forall t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = \gamma_x(t) + \mathrm{i}\,\gamma_y(t)$. Montrez que
$$A = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\int_0^1 \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)}\;dt\right)$$
($\overline{c} = c^*$ est le conjugué du nombre complexe c).

c) En considérant la série de Fourier de la dérivée de Γ, montrez que
$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2\,|c_n(\Gamma)|^2\,.$$

d) Soit f et g deux fonctions 1-périodiques et continues. Soient $N \in \mathbb{N}$, et $S_N(f)$ et $S_N(g)$ les sommes partielles de Fourier de f et g. Montrez que
$$\int_0^1 S_N(f)(t) \times \overline{S_N(g)(t)}\;dt = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$
Dans la question suivante, vous admettrez sans démonstration que
$$\int_0^1 f(t) \times \overline{g(t)}\;dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

e) Montrez que
$$L^2 \geq 4\pi A.$$
Dans quel cas a-t-on l'égalité ? Quelle figure géométrique est ∂S dans ce cas particulier ?