ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie FISE

TD1 - Systèmes différentiels linéaires

Exercice 1. *Système homogène : solutions complexes et réelles*
Résoudre les systèmes différentiels suivants. Vous déterminerez leurs solutions réelles :

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

On posera $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Système homogène*

Résoudre les systèmes différentiels suivants (on posera $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$)

$$(a) \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{3}{2}z(t) \\ y'(t) = -\frac{3}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \end{cases}$$

Exercice 3. *Système avec second membre*

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 3e^{2t} \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) + 9t \end{cases}$

1) Déterminer la solution générale $X_h(t)$ du système homogène associé où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.
2) Déterminer une solution particulière $X_p(t)$ (on pourra choisir une solution sous la forme de polynômes de degré 1 et d'exponentielles).

Exercice 4. *Système avec second membre*

Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où
$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5. *Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 3*
Trouver les solutions f(t) de l'EDL d'ordre 3 : $f^{(3)}(t)+f''(t) - 10f'(t) + 8f(t) = 4\exp(2t)$

1) Préciser X(t) et le système différentiel d'ordre 1 associé à cette équation différentielle.
2) Déterminer la solution générale $X(t)$.
3) En déduire la solution générale f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3.