

# **SYSTEMES LINEAIRES**

## **UNE APPROCHE D'ETAT FONCTIONNELLE**

Mohammed M'SAAD

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

6 Boulevard du Maréchal Juin

F-14050 Caen cedex, France

Courriel : `mohammed.msaad@ensicaen.fr`

©Mohammed M'SAAD

Version septembre 2020



*Education is not the learning of facts, but training the mind to think*  
*Albert Einstein*



*L'art et la manière d'enseigner est essentiellement basée sur une symbiose  
entre une équipe pédagogique passionnée avec des élèves dévoués.*



*Au Docteur Hamza Kettani*



- *Professeur rigoureux, passionné, enthousiaste, généreux et soucieux de l'émancipation de ses élèves.*
- *Directeur attaché à la culture de l'excellence, de la solidarité et de la formation par la recherche qui a incité une génération de jeunes ingénieurs à devenir de brillants EC.*
- *Le Précurseur des Sciences pour l'Ingénieur au Maroc.*





*La terre est ma patrie et l'humanité, ma famille*

*Gibran Khalil Gibran*

*Caligraphie : Hassan Massoudy*





## NOTATIONS UTILISEES

$\mathcal{R}^n$ (resp. $\mathcal{C}^n$ )	<i>Ensemble des vecteurs réels (resp. complexes) de dimension <math>n</math>.</i>
$\mathcal{R}^{n \times m}$ (resp. $\mathcal{C}^{n \times m}$ )	<i>Ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension <math>n \times m</math>.</i>
$I_n$ (resp. $0_n$ )	<i>Matrice identité (resp. nulle) de dimension <math>n</math>.</i>
$A^T$ (resp. $A^*$ )	<i>Transposée (resp. conjuguée transposée) de la matrice <math>A</math>.</i>
$\sqrt{A}$	<i>Racine carrée de la matrice <math>A</math>.</i>
$\det(A)$	<i>Déterminant de la matrice <math>A</math>.</i>
$\text{trace}(A)$	<i>Trace de la matrice <math>A</math>.</i>
$\mathcal{V}(A)$	<i>Spectre de la matrice <math>A</math>.</i>
$\lambda_{\max}(A)$ (resp. $\lambda_{\min}(A)$ )	<i>Valeur propre maximale (resp. minimale) de la matrice <math>A</math>.</i>
$\sigma_{\max}(A)$ ( $\sigma_{\min}(A)$ )	<i>Valeur singulière maximale (resp. minimale) de la matrice <math>A</math>.</i>
$u(t) \in \mathcal{R}^m$	<i>Vecteur de commande.</i>
$y(t) \in \mathcal{R}^p$	<i>Vecteur de sortie.</i>
$x(t) \in \mathcal{R}^n$	<i>Vecteur d'état.</i>
$w(t) \in \mathcal{R}^n$	<i>Vecteur des perturbations d'état.</i>
$v(t) \in \mathcal{R}^p$	<i>Vecteur des bruits de mesure.</i>
$\mathcal{D}(t)$	<i>Données d'entrée-sortie jusqu'à l'instant <math>t</math>.</i>
$\mathcal{E}\{.\}$	<i>Espérance mathématique.</i>
$s$	<i>Variable complexe associée à la transformée de Laplace.</i>
$\mathcal{D}_s = \{s \in \mathcal{C} / \Re(s) \leq 0\}$	<i>Domaine de stabilité.</i>
$\mathcal{D}_{sa} = \{s \in \mathcal{C} / \Re(s) < 0\}$	<i>Domaine de stabilité asymptotique.</i>
$\mathcal{A}_i = \{s \in \mathcal{C} / \Re(s) = 0\}$	<i>Axe imaginaire du plan complexe en <math>s</math>.</i>
$\mathcal{R}[s]$	<i>Ensemble des polynômes à coefficients réels.</i>
$\mathcal{R}_{sa}[s]$	<i>Ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont situées dans <math>\mathcal{D}_{sa}</math>.</i>
$\mathcal{R}_s[s]$	<i>Ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont situées dans <math>\mathcal{D}_s</math>.</i>
$\mathcal{R}_{si}[s]$	<i>Ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont simples et situées sur <math>\mathcal{A}_i</math>.</i>
$\mathcal{R}^{p \times m}[s]$	<i>Ensemble des matrices polynomiales en <math>s</math> de dimension <math>p \times m</math>.</i>
$\mathcal{R}^{p \times m}(s)$	<i>Ensemble des matrices rationnelles en <math>s</math> de dimension <math>p \times m</math>.</i>
$(F, G, H, E)$	<i>Réalisation d'état du système.</i>
$Q_o = G_o G_o^T \geq 0$	<i>Matrice de covariance des perturbations d'état.</i>
$R_o = R_o^T > 0$	<i>Matrice de covariance des bruits de mesure.</i>
$Q_c = H_c^T H_c \geq 0$	<i>Matrice de pondération de l'état.</i>
$R_c = R_c^T > 0$	<i>Matrice de pondération de la commande.</i>
$Q_f = Q_f^T \geq 0$	<i>Matrice de pondération de l'état final.</i>
$K \in \mathcal{R}^{m \times n}$	<i>Gain du retour d'état.</i>
$M \in \mathcal{R}^{n \times p}$	<i>Gain de d'observation.</i>
$\mathcal{G}_{oe}(s) \in \mathcal{R}^{m \times m}(s)$	<i>Fonction de transfert en boucle ouverte en entrée du système de commande avec retour d'état .</i>
$\mathcal{S}_e(s) \in \mathcal{R}^{m \times m}(s)$	<i>Fonctions de sensibilité en entrée.</i>
$\mathcal{T}_e(s) \in \mathcal{R}^{m \times m}(s)$	<i>Fonctions de sensibilité complémentaire en entrée.</i>
$\mathcal{G}_{oo}(s),$	<i>Fonction de transfert en boucle ouverte en sortie de l'observateur.</i>
$\mathcal{S}_o(s)$	<i>Fonction de sensibilité en sortie.</i>
$\mathcal{T}_o(z)$	<i>Fonction de sensibilité complémentaire en sortie.</i>

## ACRONYMES UTILISES

$CM(SYS)$	<i>Configuration des modes du système.</i>
$CP(SYS)$	<i>Configuration des pôles du système.</i>
$CZ(SYS)$	<i>Configuration des zéros du système.</i>
$CRE$	<i>Commande avec retour d'état.</i>
$CREO$	<i>Commande avec retour d'état incorporant un observateur.</i>
$DPD(O)$	<i>Demi plan de droite (ouvert).</i>
$DPG(O)$	<i>Demi plan de gauche (ouvert).</i>
$DSC$	<i>Décomposition selon la commandabilité.</i>
$DSO$	<i>Décomposition selon l'observabilité.</i>
$EAR$	<i>Equation algébrique de Lyapunov.</i>
$EDL$	<i>Equation différentielle de Lyapunov.</i>
$EDS$	<i>Equation différentielle du système.</i>
$EDR$	<i>Equation différentielle de Riccati.</i>
$FCC$	<i>Forme canonique commandable.</i>
$FCO$	<i>Forme canonique observable.</i>
$FM$	<i>Forme modale.</i>
$FPPD$	<i>Factorisation polynomiale première à droite.</i>
$FPPG$	<i>Factorisation polynomiale première à gauche.</i>
$FTBO$	<i>Fonction de transfert en boucle ouverte.</i>
$FTS$	<i>Fonction de transfert du système.</i>
$OBS$	<i>Observateur.</i>
$OBSL$	<i>Observateur de Luenberger.</i>
$FK$	<i>Filtre de Kalman.</i>
$PY$	<i>Paramétrisation de Youla.</i>
$LQ$	<i>Linéaire quadratique.</i>
$LQD$	<i>Linéaire quadratique déterministe.</i>
$LQG$	<i>Linéaire quadratique gaussienne.</i>
$RTR$	<i>Restauration du transfert de la boucle.</i>
$MCO$	<i>Modèle de commande optimale.</i>
$MEO$	<i>Modèle d'estimation optimale.</i>
$MGC$	<i>Modèle générateur de la consigne.</i>
$MGP$	<i>Modèle générateur des perturbations.</i>
$PM$	<i>Précision maximale.</i>
$RAP$	<i>Rejet asymptotique des perturbations.</i>
$REG$	<i>Régulateur.</i>
$RES$	<i>Représentation (Réalisation) d'état du système.</i>
$RHS$	<i>Réponse harmonique du système.</i>
$RIS$	<i>Réponse impulsionnelle un système.</i>
$SYS$	<i>Système.</i>
$SCRE$	<i>Système de commande avec retour d'état.</i>
$SCREO$	<i>Système de commande avec retour d'état incorporant un observateur.</i>
$WEP$	<i>Pondération de l'erreur de poursuite.</i>

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Représentations</b>	<b>21</b>
2.1	Systèmes monovariables . . . . .	22
2.1.1	Réponses essentielles . . . . .	22
2.1.2	Représentations polynomiales . . . . .	23
2.1.3	Pôles et zéros . . . . .	27
2.2	Modélisation d'un système de chauffage . . . . .	29
2.3	Systèmes multivariables . . . . .	31
2.3.1	Représentation d'état . . . . .	31
2.3.2	Pluralité de la représentation d'état . . . . .	32
2.3.3	Fonction de transfert . . . . .	34
2.3.4	Matrice système . . . . .	36
2.3.5	Factorisations polynomiales . . . . .	38
2.3.6	Pôles et zéros d'une fonction de transfert. . . . .	40
2.4	Modèle de synthèse . . . . .	45
2.5	Opérations élémentaires . . . . .	46
2.6	Eléments de réalisation . . . . .	52
2.7	Modélisation d'une suspension . . . . .	59
2.8	Linearisation des systèmes . . . . .	62
2.8.1	Réseaux hydrauliques . . . . .	63
2.8.2	Pendule inversé . . . . .	65
2.8.3	Satellite orbital . . . . .	67
2.9	Systèmes linéaires variants dans le temps . . . . .	69
2.10	Conclusion . . . . .	71
2.11	Problèmes . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Structure</b>	<b>81</b>
3.1	Commandabilité. . . . .	82
3.1.1	Définitions . . . . .	82
3.1.2	L'essence du problème . . . . .	83
3.1.3	Critère usuel de commandabilité . . . . .	88
3.1.4	Forme canonique commandable . . . . .	90
3.1.5	Caractérisation des modes non commandables . . . . .	91
3.1.6	Stabilisabilité . . . . .	96
3.1.7	Récapitulatif . . . . .	96
3.2	Observabilité . . . . .	97
3.2.1	Définitions . . . . .	97
3.2.2	L'essence du problème . . . . .	99

3.2.3	<i>Le critère usuel d'observabilité</i>	103
3.2.4	<i>Forme canonique observable</i>	104
3.2.5	<i>Caractérisation des modes non observables</i>	105
3.2.6	<i>DéTECTABILITÉ</i>	108
3.2.7	<i>Récapitulatif</i>	108
3.3	<i>Réalisations minimales</i>	109
3.3.1	<i>Décomposition canonique</i>	109
3.3.2	<i>Réalisations minimales</i>	111
3.4	<i>Pôles et zéros d'un système</i>	114
3.4.1	<i>Pôles et zéros d'une fonction de transfert</i>	114
3.4.2	<i>Pôles et zéros d'une réalisation d'état</i>	115
3.4.3	<i>Interprétation physique des pôles et zéros.</i>	117
3.4.4	<i>Directions des pôles et des zéros</i>	119
3.5	<i>Systèmes interconnectés</i>	120
3.6	<i>Systèmes linéaires variants dans le temps</i>	126
3.7	<i>Conclusion</i>	130
3.8	<i>Problèmes</i>	130
<b>4</b>	<b><i>Stabilité</i></b>	<b>135</b>
4.1	<i>Systèmes linéaires invariants dans le temps</i>	136
4.1.1	<i>Stabilité externe</i>	136
4.1.2	<i>Intermédiaire</i>	141
4.1.3	<i>Stabilité interne</i>	142
4.1.4	<i>Le jugement dernier</i>	144
4.2	<i>Approche de Lyapunov</i>	145
4.2.1	<i>L'essentiel</i>	146
4.2.2	<i>Retour aux systèmes linéaires invariants dans le temps</i>	150
4.2.3	<i>Test algébrique de stabilité</i>	154
4.2.4	<i>Techniques de comparaison et majoration</i>	155
4.3	<i>Systèmes linéaires variants dans le temps</i>	157
4.3.1	<i>Stabilité uniforme <math>\mathcal{EBSB}</math></i>	157
4.3.2	<i>Stabilité uniforme interne</i>	158
4.4	<i>Passivité</i>	163
4.4.1	<i>Systèmes passifs</i>	164
4.4.2	<i>Systèmes réels positifs</i>	166
4.4.3	<i>Interprétation énergétique</i>	175
4.5	<i>Conclusion</i>	176
4.6	<i>Problèmes</i>	177
<b>5</b>	<b><i>Observation et commande</i></b>	<b>185</b>
5.1	<i>Observation des systèmes</i>	186
5.1.1	<i>Propriétés fondamentales</i>	190
5.1.2	<i>Synthèse modale</i>	193
5.1.3	<i>Observateur d'ordre réduit</i>	195
5.1.4	<i>Observateurs de Luenberger</i>	198
5.1.5	<i>Exemple d'application</i>	200
5.2	<i>Commande avec retour d'état</i>	202
5.2.1	<i>Propriétés fondamentales</i>	203
5.2.2	<i>Synthèse modale</i>	207

5.2.3	<i>Exemple d'application</i>	209
5.3	<i>Commande avec retour de sortie</i>	210
5.3.1	<i>Description du système de commande</i>	211
5.3.2	<i>Interprétation polynomiale</i>	215
5.3.3	<i>Paramétrisation des régulateurs stabilisants</i>	217
5.3.4	<i>Exemple d'application</i>	219
5.3.5	<i>Digression</i>	221
5.4	<i>Conclusion</i>	224
5.5	<i>Problèmes</i>	225
<b>6</b>	<b><i>Compensation parfaite des perturbations</i></b>	<b>229</b>
6.1	<i>Modélisation des perturbations</i>	230
6.2	<i>Formulation du problème</i>	231
6.3	<i>Méthode directe</i>	232
6.3.1	<i>Le problème de synthèse</i>	232
6.3.2	<i>Le principe de la méthode</i>	233
6.3.3	<i>Une solution usuelle</i>	234
6.3.4	<i>Une solution ingénieur</i>	236
6.3.5	<i>Une interprétation polynomiale</i>	238
6.4	<i>Méthode indirecte</i>	239
6.4.1	<i>Le modèle de synthèse</i>	241
6.4.2	<i>Commande avec retour d'état</i>	242
6.4.3	<i>Commande avec retour de sortie</i>	244
6.5	<i>Le retour d'état dynamique</i>	247
6.6	<i>Conclusion</i>	252
6.7	<i>Problèmes</i>	252
<b>7</b>	<b><i>Asservissements</i></b>	<b>261</b>
7.1	<i>Normes des systèmes</i>	262
7.2	<i>Admissibilité physique.</i>	267
7.3	<i>Stabilité interne.</i>	269
7.4	<i>Performances nominales.</i>	273
7.4.1	<i>Interprétation systémique</i>	274
7.4.2	<i>Recommandations usuelles</i>	278
7.5	<i>Robustesse en stabilité.</i>	281
7.6	<i>Conclusion</i>	288
7.7	<i>Problèmes.</i>	289
<b>8</b>	<b><i>Commande linéaire quadratique</i></b>	<b>291</b>
8.1	<i>Commande <math>\mathcal{LQ}</math></i>	292
8.1.1	<i>Commande <math>\mathcal{LQ}</math> à horizon fini</i>	292
8.1.2	<i>Commande <math>\mathcal{LQ}</math> à horizon infini</i>	294
8.1.3	<i>Propriétés fondamentales.</i>	295
8.1.4	<i>Precision maximale.</i>	299
8.1.5	<i>Exemples</i>	301
8.2	<i>Commande <math>\mathcal{LQD}</math></i>	304
8.2.1	<i>Observateur <math>\mathcal{LQ}</math></i>	304
8.2.2	<i>Commande <math>\mathcal{LQD}</math></i>	308
8.2.3	<i>Interprétation <math>\mathcal{H}_2</math></i>	310

8.3	<i>Commande <math>\mathcal{LQD}/\mathcal{RTB}</math></i>	311
8.3.1	<i><math>\mathcal{RTB}</math> en entrée</i>	313
8.3.2	<i><math>\mathcal{RTB}</math> en sortie</i>	315
8.4	<i>Synthèse <math>\mathcal{LQD}</math></i>	317
8.4.1	<i>Performances dynamiques</i>	317
8.4.2	<i>Robustesse en stabilité</i>	321
8.5	<i>Conclusion</i>	324
8.6	<i>Problèmes</i>	324
<b>9</b>	<b><i>Estimation linéaire quadratique</i></b>	<b>335</b>
9.1	<i>Préliminaires.</i>	336
9.2	<i>Estimation optimale</i>	337
9.3	<i>Applications</i>	341
9.3.1	<i>Filtrage</i>	342
9.3.2	<i>Identification</i>	342
9.3.3	<i>Commande <math>\mathcal{LQG}</math></i>	345
9.4	<i>Conclusion</i>	348
9.5	<i>Problèmes</i>	349
<b>10</b>	<b><i>Commande robuste</i></b>	<b>355</b>
10.1	<i>Une histoire de l'automatique</i>	356
10.2	<i>Transformation linéaire fractionnaire</i>	357
10.3	<i>Formulation du problème standard.</i>	363
10.4	<i>Le bouquet de problèmes standards</i>	366
10.5	<i>Synthèse <math>\mathcal{H}_2</math></i>	371
10.6	<i>Synthèse <math>\mathcal{H}_\infty</math></i>	372
10.6.1	<i>Synthèse usuelle</i>	373
10.6.2	<i>Synthèse standard</i>	376
10.6.3	<i>Synthèse générale</i>	379
10.7	<i>Sensibilité mixte.</i>	383
10.8	<i>Éléments de synthèse</i>	387
10.9	<i>Conclusion</i>	392
10.10	<i>Problèmes</i>	392
<b>11</b>	<b><i>Conclusion</i></b>	<b>399</b>
<b>A</b>	<b><i>Calcul matriciel</i></b>	<b>405</b>
A.1	<i>Généralités</i>	405
A.2	<i>Opérations matricielles.</i>	408
A.3	<i>Déterminants et lemmes d'inversion.</i>	411
A.4	<i>Transformation linéaire.</i>	413
A.5	<i>Équivalence et similitude.</i>	416
A.6	<i>Valeurs propres et valeurs singulières.</i>	417
A.7	<i>Exponentielle d'une matrice</i>	421
A.8	<i>Matrices définies positives ou non négatives.</i>	422
A.9	<i>Normes.</i>	425
A.10	<i>Inverses généralisées et pseudo-inverses.</i>	430
A.11	<i>Résolution des systèmes d'équations linéaires.</i>	433
A.12	<i>Equations matricielles linéaires.</i>	436

A.13	Conclusion	439
A.14	Problèmes	439
<b>B</b>	<b>Matrices polynomiales et rationnelles</b>	<b>443</b>
B.1	Définitions élémentaires.	444
B.2	Formes remarquables.	446
B.3	Factorisations polynomiales à droite.	448
B.4	Factorisations polynomiales à gauche.	452
B.5	Propriété des lignes et des colonnes.	456
B.6	Conclusion.	459
B.7	Problèmes	459
<b>C</b>	<b>Equations algébriques de Riccati</b>	<b>461</b>
C.1	Solutions générales.	462
C.2	Solutions stabilisantes.	466
C.3	Conclusion.	475





# Chapitre 1

## *Introduction*

*L'automatique a été vigoureusement développée tout au long des quatre dernières décennies comme en témoignent les études fondamentales et les applications industrielles réussies qui y ont été consacrées. Les études fondamentales ont permis d'enrichir le potentiel des connaissances de la théorie des systèmes linéaires qui est disponible dans des ouvrages communément utilisés pour l'enseignement de l'automatique dans de prestigieuses écoles d'ingénieurs à partir d'une lecture ingénieur des ouvrages pédagogiques rédigés par des enseignants-chercheurs qui ont participé activement aux contributions fondamentales et/ou aux applications industrielles réussies en la matière ([1], [4], [7], [8], [15], [18], [26], [30], [39], [40], [42], [46], [52], [53], [55], [57], [61], [65], [67], [70], [71], [77], [72], [76], [78], [81], [82], [89]). Quant aux applications industrielles, elles ont été réalisées à partir de méthodologies de commande conçues en exploitant judicieusement le potentiel fondamental de la théorie des systèmes pour réaliser un bon compromis performances/robustesse sous la bénédiction des réalisations logicielles disponibles au sein de l'environnement Silab pour tous.*

*Cet ouvrage est le fruit d'un investissement pédagogique pour l'enseignement de l'automatique dont l'ultime motivation est d'accompagner les élèves ingénieurs dans la construction de leur propre processus d'acquisition des connaissances disponibles en automatique linéaire. Les bases de la théorie des systèmes linéaires invariants dans le temps sont progressivement présentées d'une manière rigoureuse en adoptant une approche d'état vigoureusement soutenue par des interprétations fréquentielles et physiques pertinentes qui justifie le titre de l'ouvrage. Des digressions sont réservées au cas des systèmes linéaires variants dans le temps pour pouvoir traiter les problématiques d'estimation et d'adaptation paramétrique. Outre cette introduction et une conclusion, qui font l'objet des chapitres I et II, cet ouvrage se distingue par 9 chapitres et 3 annexes qui permettent de couvrir les problématiques essentielles des systèmes linéaires tout en offrant une opportunité de recouvrer les connaissances mathématiques requises si besoin est.*

*Le chapitre 2 est consacré aux diverses représentations des systèmes linéaires invariants dans le temps avec focus sur les réalisations d'état d'un système et d'une composition élémentaire de deux systèmes. Une attention particulière est accordée au passage d'une représentation à une autre avec un focus sur le passage d'une réalisation d'état aux autres représentations d'un système, notamment la matrice système, la fonction de transfert, la réponse impulsionnelle et la configuration des pôles et des zéros. Des exemples de modélisation de systèmes sont traités en guise d'illustration avec un focus sur le concept de linearisation. Une digression aux cas des systèmes linéaires variants dans le temps est faite à la fin du chapitre.*

*Le chapitre 3 est essentiellement réservé aux propriétés structurelles des systèmes linéaires, notamment la commandabilité et la stabilisabilité et l'observabilité et la détectabilité. Ces propriétés fondamentales sont présentées d'une manière ludique en exploitant judicieusement la pluralité de la représentation d'état et la dualité entre l'observation et la commande. Une attention particulière est réservée aux réalisations d'état minimales et à la perte éventuelle de commandabilité et/ou d'observabilité dans le cas d'une interconnection élémentaires de deux systèmes commandables et observables. Les propriétés de la matrice système sont proprement utilisées pour une meilleure perception des pôles et zéros d'un système multivariable. Une digression au cas des systèmes linéaires variants dans le temps est faite à la fin du chapitre modulo une extension appropriée des concepts de gramiens de commandabilité et d'observabilité.*

*Le chapitre 4 est dédié au problème de stabilité des systèmes linéaires. Le concept de stabilité externe (resp. interne) d'un système est judicieusement défini à partir du comportement de sa trajectoire de sortie (resp. sa trajectoire d'état) lorsque son entrée est identiquement nulle et que ses conditions initiales ne sont pas nulles. Cette définition a permis de déduire aisément un critère de stabilité externe (resp. interne) du système à partir de sa configuration de pôles (resp. sa configuration de modes) dont la faisabilité est limitée par les performances des solveurs des racines d'un polynôme (resp. de l'efficacité des algorithmes de calcul du spectre d'une matrice). Un critère algébrique pour le test de la stabilité interne a été développé à partir d'une approche de Lyapunov dans le cas des systèmes linéaires. Une digression au cas des systèmes linéaires variants dans le temps est faite à la fin du chapitre modulo une extension appropriée du concept de stabilité uniforme externe (resp. stabilité uniforme interne).*

*Le chapitre 5 est un agréable panorama sur les propriétés fondamentales des observateurs avec injection de sortie (resp. des systèmes de commande avec retour d'état). Une attention particulière est accordée aux invariants par injection de sortie (resp. par retour d'état) et une synthèse modale pour des considérations pédagogiques. La conception d'un système de commande avec retour d'état incorporant un observateur est effectuée sous la bénédiction du principe d'équivalence certitude avec une analyse rigoureuse de sa stabilité et ses performances. Le passage de la réalisation d'état du régulateur à sa fonction de transfert permet de recouvrer aisément la structure usuelle des régulateurs dans le contexte d'une approche polynomiale. Une attention particulière est réservée à la détermination de la classe des régulateurs stabilisants.*

*Le Chapitre 6 traite la problématique de compensation parfaite des perturbations en entrée du système (resp. de précision maximale pour une séquence de consigne) spécifique, i.e. dont le modèle générateur est connu, en exploitant judicieusement les concepts de commande avec retour d'état et d'injection de sortie. Outre une meilleure perception des concepts détectabilité et de stabilisabilité, ces études conduisent naturellement au concept de retour d'état dynamique qui n'est autre qu'un retour d'état sur une cascade composée du système avec des pondérations fréquentielles appropriées en entrée et en sortie. Ces pondérations se sont imposées par les exigences de l'ingénierie des systèmes en stabilité et performances.*

*Le chapitre 7 est un panorama motivé sur l'analyse des asservissements linéaires. Après une présentation concise des normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  des systèmes et d'un système de commande standard, on détermine la fonction de transfert d'un asservissement standard en*

fonction de ses fonctions de sensibilité usuelles modulo une étude préalable de l'admissibilité physique du système de commande sous-jacent. Les fonctions de sensibilité usuelles d'un asservissement constituent des quantificateurs appropriés de ses performances nominales et sa robustesse en stabilité. Un focus sur la passivité pour conforter la stabilité des systèmes asservis par le célèbre résultat de Kalman, Yakubovich et Popov.

Le chapitre 8 est consacré aux systèmes de commande linéaire quadratique déterministe ( $\mathcal{LQD}$ ) issue d'une combinaison d'une commande avec retour d'état et d'un observateur d'état, respectivement conçues dans un contexte déterministe à partir d'une synthèse linéaire quadratique ( $\mathcal{LQ}$ ) sous la bénédiction de la dualité entre l'observation et la commande. Une attention particulière est accordée aux propriétés fondamentales d'un système de commande avec retour d'état (resp. d'un observateur)  $\mathcal{LQ}$  et au concept de restauration du transfert ( $\mathcal{RTB}$ ) de la boucle pour doter le système de commande  $\mathcal{LQD}$  de la propriété de robustesse du système de commande (resp. de l'observateur)  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent. Une synthèse  $\mathcal{LQD}$  est développée à partir du concept de pondérations temporelles (resp. fréquentielles) pour affiner les performances dynamiques (resp. rehausser la robustesse en stabilité). Elle permet de conforter l'ingénierie des systèmes par une approche pragmatique de conception d'asservissement réalisant un bon compromis performances/robustesse.

Le chapitre 9 est dédiée à l'estimation optimale des variables d'état d'un système linéaire dans un contexte stochastique approprié par rapport aux résultats disponibles sur le calcul différentiel stochastique. Cette estimation optimale est réalisée par le filtre de Kalman et Bucy ( $\mathcal{FKB}$ ). Ce dernier est particulièrement obtenu d'une manière constructive à partir d'un résultat technique sur la comparaison des solutions de deux équations différentielles matricielles pour pallier la complexité fondamentale intrinsèque approche d'optimisation stochastique. La vraisemblance entre l'observateur  $\mathcal{LQ}$  et le  $\mathcal{FKB}$  est particulièrement mise en exergue. Trois applications de l'estimation optimale sont présentées, en l'occurrence le filtrage, l'adaptation paramétrique et la commande linéaire quadratique gaussienne  $\mathcal{LQG}$ .

Le chapitre 10 est une introduction motivée à la commande robuste à partir d'un bouquet de problèmes standards en automatique et des synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  qui se sont désormais imposées à l'ingénierie des systèmes par leur capacité de concevoir des asservissements réalisant de bon compromis performances/robustesse. La synthèse  $\mathcal{H}_2$  est présentée d'une manière concise, dans la mesure où elle peut être obtenue à partir d'une synthèse  $\mathcal{LQD}$  incorporant une capacité adéquate de  $\mathcal{RTB}$ , alors que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est présentée d'une manière vigoureuse. Une attention particulière est accordée à la formulation des problèmes de synthèse associés et aux relations entre les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{LQG}/\mathcal{LTR}$  et les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . La capacité intrinsèque d'une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  à réaliser un modelage admissible des fonctions de sensibilité usuelles d'un asservissement donné est particulièrement mise en évidence au travers d'un ensemble de problèmes de commande robuste.

Les annexes A et B constituent une présentation concise et précise des résultats d'algèbre linéaire pour les élèves qui n'ont pas les connaissances mathématiques vitales pour la théorie des systèmes, notamment le calcul matriciel et les matrices polynomiales et rationnelles. Une attention particulière est accordée aux décompositions matricielles, à la résolution des systèmes d'équations linéaires et des équations matricielles de Sylvester avec un focus sur les équations matricielles de Lyapunov.

*L'annexe C est un focus motivé sur les équations matricielles de Riccati avec une attention particulière à la classe des solutions symétriques, définies positives et stabilisantes qui s'est imposée en matière d'estimation et de commande optimales. Les résultats fondamentaux associés sont présentés d'une manière rigoureuse avec des remarques pertinentes sur les propriétés structurelles requises.*

*Cet ouvrage est particulièrement utilisé pour les enseignements des systèmes asservis, de commande linéaire quadratique et de commande robuste à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen. Bien que les problèmes proposés sont essentiellement motivés par une évaluation des connaissances acquises, certains peuvent être utilisés pour concevoir des bureaux d'étude pour développer un savoir faire en matière d'automatique industrielle.*

# Chapitre 2

## Représentations

Un système peut être représenté, comme l'indique la figure 2.1, par une application de l'ensemble de ses entrées à l'ensemble de ses sorties (via ses variables d'état) donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{SYS} : \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m\} &\rightarrow \mathcal{Y} = \{y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p\} \\ u(t) &\rightarrow y(t) = \mathcal{SYS}[u(t)] \end{aligned}$$

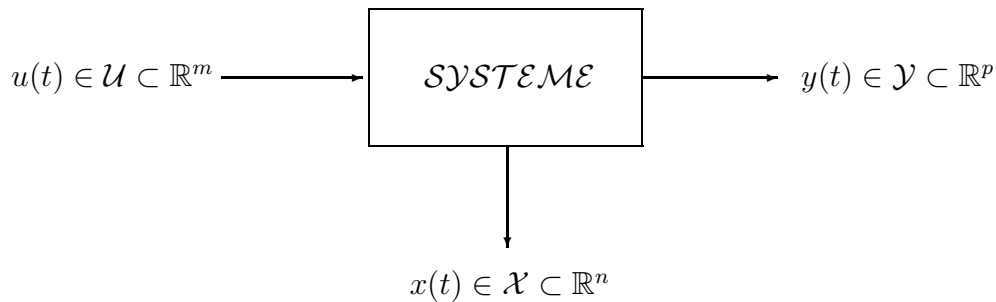


FIGURE 2.1 – Représentation du système

Dans le cas des systèmes linéaires, cette application vérifie le principe de superposition qui stipule que la réponse du système à une combinaison linéaire d'un ensemble d'entrées est égale à la même combinaison linéaire des réponses du système à chacune de ces entrées, soit

$$\mathcal{SYS} \left( \sum_{\ell} \alpha_{\ell} u_{\ell}(t) \right) = \sum_{\ell} \alpha_{\ell} y_{\ell}(t) \text{ avec } y_{\ell}(t) = \mathcal{SYS}(u_{\ell}(t))$$

Cette applications est définie par une description appropriée par rapport à la nature du contexte d'analyse ou de synthèse adopté. On distingue deux ensembles de représentations communément utilisées dans le contexte de la théorie des systèmes. Le premier concerne les réponses essentielles du système aux signaux tests, notamment l'impulsion et la sinusoïde généralisée. Ces représentations sont des modèles non paramétriques qui ne sont autres que la réponse impulsionnelle et la réponse harmonique du système. Le second ensemble est particulièrement dédié aux représentations paramétriques, en l'occurrence l'équation différentielle, la fonction de transfert et la représentation d'état. Et comme toutes ces représentations concernent un même système, il existe des relations de passage d'une représentation à une autre qui permettent de mettre en évidence les subtilités d'une représentation par rapport à une autre.

*Ce chapitre est consacré aux descriptions des systèmes linéaires en exploitant judicieusement les atouts de la représentation d'état et les relations de passage d'une représentation à l'autre, en l'occurrence les concepts de factorisation et de réalisation intrinsèques au passage d'une fonction de transfert à la représentation d'état. On présente d'abord d'une manière concise les réponses essentielles et les représentations polynomiales des systèmes monovariables avec un focus sur leurs configurations des pôles et des zéros. Les diverses représentations des systèmes multivariables sont ensuite progressivement présentées à partir de leur représentation d'état. Ces représentations sont confortées par deux études concises sur la composition des systèmes et le problème de réalisation et des exemples. Deux focus ont été consacrés à la modélisation d'un ensemble de systèmes non linéaires et à la représentation d'état des systèmes linéaires variants dans le temps pour des perspectives ambitieuses en matière de modélisation des systèmes. Ce fut une belle opportunité pour mieux apprécier le concept de linéarisation et la notion de matrice de transition d'un système.*

## 2.1 Systèmes monovariables

*La description des systèmes monovariables est particulièrement faite à partir de ses réponses essentielles et des représentations polynomiales. La représentation d'état est occultée pour des considérations pédagogiques dans la mesure où elle est dûment développée pour la représentation des systèmes multivariables.*

### 2.1.1 Réponses essentielles

*Les systèmes linéaires invariants peuvent être caractérisés par leurs réponses à un ensemble de signaux tests, notamment l'impulsion unitaire et la sinusoïde généralisée unitaire respectivement données par*

$$u(t) = \delta(t) \quad \text{et} \quad u(t) = e^{j\omega t} \alpha(t)$$

*Ces représentations sont des modèles non paramétriques fondamentalement issus du fait que le comportement d'entrée-sortie d'un système linéaire invariant, lorsque les conditions initiales sont nulles, peut être décrit par le produit de convolution de sa réponse impulsionnelle, que l'on notera  $\{g(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ , et de son entrée, soit*

$$y(t) = (g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (2.1)$$

$\Leftrightarrow$

$$y(t) = (u * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (2.2)$$

*L'appellation de réponse impulsionnelle de la séquence  $\{g(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  est justifiée par la propriété suivante*

$$(g * \delta)(t) = (\delta * g)(t) = g(t)$$

*La réponse d'un système à une sinusoïde générale unitaire, lorsque les conditions initiales sont nulles, est donnée par*

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left( \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} = \mathcal{G}(j\omega) e^{j\omega t} \quad (2.3)$$

modulo l'existence de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Et si l'on prend les transformées de Fourier des deux membres de cette expression, on obtient

$$Y(j\omega) = \mathcal{G}(j\omega) U(j\omega) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\omega t + j\varphi(\omega)} U(j\omega) \quad (2.4)$$

avec

$$\mathcal{M}(j\omega) = |\mathcal{G}(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg}(\mathcal{G}(j\omega)) \quad (2.5)$$

La sortie d'un système linéaire invariant, dont la réponse impulsionnelle admet une transformée de Fourier, ayant une entrée sinusoïdale est donc une sinusoïde de même pulsation que l'entrée, déphasée de  $\varphi(\omega)$  par rapport à l'entrée et dont l'amplitude est modifiée par le gain du système, i.e.  $\mathcal{M}(j\omega)$ , à la pulsation  $\omega$ .

La réponse harmonique d'un système est donnée par la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle, soit

$$\mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \mathcal{F}(g(t)) \quad (2.6)$$

Cette représentation est caractérisée par les diagrammes de Bode, Nyquist et Black selon la nature du problème qui nous occupe. Le diagramme de Bode permet de donner directement le gain et la phase du système en fonction de la pulsation. Les diagrammes de Nyquist et de Black sont particulièrement utilisés pour la représentation fréquentielle des fonctions de transfert en boucle ouverte d'un système asservi. Ces représentations fréquentielles permettent de déduire respectivement la robustesse en stabilité du système asservi et ses performances dynamiques.

**Remarque 2.1** La réponse fréquentielle d'un système est symétrique par rapport à l'axe imaginaire puisque

$$\mathcal{G}(j\omega) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) (e^{j\omega\tau})^* d\tau = (\mathcal{G}(-j\omega))^*$$

Par ailleurs, il est clair que les zéros de  $\mathcal{G}(j\omega)$ , i.e.  $\{\omega \in \mathbb{R} / \mathcal{G}(j\omega) = 0\}$ , correspondent aux fréquences asymptotiquement rejetées par le système.

## 2.1.2 Représentations polynomiales

Le comportement d'entrée-sortie d'un système linéaire invariant peut être décrit par l'équation différentielle

$$\rho^{na} y(t) + a_1 \rho^{na-1} y(t) + \dots + a_{na} y(t) = b_0 \rho^{nb} u(t) + b_1 \rho^{nb-1} u(t) + \dots + b_{nb} u(t)$$

que l'on peut récrire sous une forme beaucoup plus agréable du point de vue du calcul différentiel, soit

$$A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) \quad (2.7)$$

avec

$$A(\rho) = \rho^{na} + a_1\rho^{na-1} + \dots + a_{na-1}\rho + a_{na} \quad (2.8)$$

$$B(\rho) = b_0\rho^{nb} + b_1\rho^{nb-1} + \dots + b_{nb-1}\rho + b_{nb} \quad (2.9)$$

La fonction de transfert est obtenue en prenant les transformées de Laplace des deux membres de l'équation différentielle tout en supposant que les conditions initiales sont nulles. On aura alors

$$\mathcal{L}\{A(\rho)y(t)\} = \mathcal{L}\{B(\rho)u(t)\}$$

ou d'une manière équivalente

$$\sum_{i=0}^{na} a_i \mathcal{L}\{\rho^i y(t)\} = \sum_{i=0}^{nb} b_i \mathcal{L}\{\rho^i u(t)\} \text{ avec } a_0 = 1$$

Et comme les conditions initiales sont supposées être nulles, on obtient l'équation

$$\sum_{i=0}^{na} a_i s^i (\mathcal{L}\{y(t)\}) = \sum_{i=0}^{nb} b_i s^i (\mathcal{L}\{u(t)\})$$

La représentation sous-jacente est alors donnée par

$$Y(s) = \mathcal{G}(s)U(s) \quad (2.10)$$

avec

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^{nb} + b_1 s^{nb-1} + \dots + b_{nb-1} s + b_{nb}}{s^{na} + a_1 s^{na-1} + \dots + a_{na-1} s + a_{na}} \quad (2.11)$$

où  $\mathcal{G}(s)$  n'est autre que la fonction de transfert du système que l'on peut exprimer comme suit.

$$\mathcal{G}(s) \triangleq \frac{B_i(s^{-1})}{A_i(s^{-1})} = \frac{b_0 s^{-r} + b_1 s^{-r-1} + \dots + b_{nb-1} s^{-nb+1} + b_{nb} s^{-r-nb}}{1 + a_1 s^{-1} + \dots + a_{na-1} s^{-na+1} + a_{na} s^{-na}} \quad (2.12)$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{G}(s) = g_r s^{-r} + g_{r+1} s^{-r-1} + \dots + g_{r+i} s^{-r-i} + \dots = \sum_{i=r}^{\infty} g_i s^{-i} \quad (2.13)$$

où  $r = na - nb$  n'est autre que le degré relatif de la fonction de transfert du système.

Cette dernière expression de la fonction de transfert suggère de définir, modulo des conditions initiales nulles, un opérateur intégral à partir de l'opérateur différentiel comme suit

$$\rho^{-1} : f(t) \longrightarrow \rho^{-1}(f(t)) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.14)$$



Et compte tenu du fait que  $\mathcal{G}(\rho) = \sum_{i=r}^{\infty} g_i \rho^{-i}$ , on peut en déduire aisément que le système peut être décrit par

$$y(t) = \mathcal{G}(\rho)u(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} \left( u(t) \right) = \sum_{i=r}^{\infty} g_i \left( \rho^{-i} u(t) \right) \quad (2.15)$$

Ainsi la fraction rationnelle  $\mathcal{G}(\rho)$  est un opérateur différentiel linéaire que l'on peut utiliser pour décrire le système

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\rho) : \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}\} &\rightarrow \mathcal{Y} = \{y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}\} \\ u(t) &\rightarrow y(t) = G(\rho)[u(t)] \end{aligned}$$

L'équation différentielle peut être alors exprimée comme suit

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \rho^{-r-i} u(t) \iff \rho^r y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \rho^{-i} u(t)$$

La première expression montre clairement que la sortie du système est une combinaison linéaire des intégrales successives de son entrée à partir de son degré relatif  $r$ . Quant à la seconde expression, elle permet d'interpréter le degré relatif comme le plus petit ordre de dérivation de la sortie qui dépend explicitement de l'entrée.

**Remarque 2.2** L'équation différentielle du système (2.7)-(2.9) peut se récrire sous la forme, dite représentation d'état partiel, donnée par

$$\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{P} \begin{cases} A(\rho)z(t) = u(t) \\ y(t) = B(\rho)z(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

ou sous la forme

$$A_i(\rho^{-1})y(t) = B_i(\rho^{-1})u(t) \quad (2.17)$$

avec

$$B_i(\rho^{-1}) = \rho^{-r} (b_0 + b_1 \rho^{-1} + \dots + b_{nb-1} \rho^{-nb+1} + b_{nb} \rho^{-nb}) \quad (2.18)$$

$$A_i(\rho^{-1}) = 1 + a_1 \rho^{-1} + \dots + a_{na-1} \rho^{-na+1} + a_{na} \rho^{-na} \quad (2.19)$$

Et la relation entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_i(s^{-1})}{A_i(s^{-1})} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad (2.20)$$

**Remarque 2.3** Dans le cas où les conditions initiales ne seraient pas nulles, les transformées de Laplace des deux membres de l'équation différentielle sont respectivement données par

$$\mathcal{L}(\rho^{na-i}y(t)) = s^{na-i}Y(s) - \sum_{k=1}^{na-i} (\rho^{k-1}y(0^+)) s^{na-i-k}$$

et

$$\mathcal{L}(\rho^{nb-i}u(t)) = s^{nb-i}U(s) - \sum_{k=1}^{nb-i} (\rho^{k-1}u(0^+)) s^{nb-i-k}$$

On aura alors

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) + E(s)\Delta(s)$$

avec

$$A(s) = s^{na} + a_1s^{na-1} + \dots + a_{na-1}s + a_{na}$$

$$B(s) = b_0s^{nb} + b_1s^{nb-1} + \dots + b_{nb-1}s + b_{nb}$$

$$E(s) = e_0s^{ne} + e_1s^{ne-1} + \dots + e_{ne-1}s + e_{ne}$$

où  $ne < na$  puisque  $nb \leq na$ . Le système peut être alors décrit comme le montre la figure 2.2 où l'effet des conditions initiales est particulièrement mis en évidence à partir d'une réponse impulsionnelle d'un système dynamique bien défini.

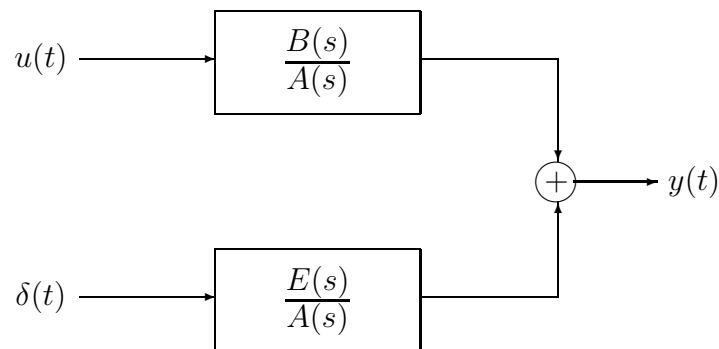


FIGURE 2.2 – Représentation d'un système

On peut ainsi interpréter les conditions initiales non nulles comme des perturbations de type impulsionnel qui affectent le fonctionnement du système. Et si l'on prend la transformée de Laplace inverse des deux membres de l'équation  $A(s)Y(s) = B(s)U(s) + E(s)\Delta(s)$  du système, on obtient l'équation différentielle suivante

$$A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + E(\rho)\delta(t)$$

avec des conditions initiales nulles.

### 2.1.3 Pôles et zéros

La fonction de transfert d'un système peut se récrire sous une forme d'une fraction rationnelle irréductible

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \gamma \frac{\prod_1^{nb} (s - z_i)}{\prod_1^{na} (s - p_i)} \quad (2.21)$$

qui permet de mettre en exergue ses pôles (resp. ses zéros), i.e. les racines du polynôme  $A(s)$  (resp.  $B(s)$ ). Un système peut être alors complètement définie par sa configuration pôles-zéros donnée par

$$\mathcal{CPZ}(\mathcal{SYS}) = \mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \cup \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS})$$

avec

$$\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) = \{p_1, \dots, p_{na}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) = \{z_1, \dots, z_{nb}\}$$

Les aspects suivants permettent de mieux apprécier le sens physique des pôles et des zéros d'un système, notamment la classe des entrées qui n'ont aucun effet sur la sortie du système et la relation intrinsèque entre les pôles et la réponse impulsionnelle du système.

- Comme la fonction de transfert est une fraction rationnelle irréductible, les configurations des pôles et des des zéros sont disjointes, i.e.  $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \cap \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) = \emptyset$ , on aura

$$\mathcal{G}(z_i) = 0 \quad \text{pour tout } z_i \in \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS})$$

Cette propriété justifie l'appellation zéros que l'on peut mieux comprendre en remarquant que pour toute entrée de la forme  $u_i(t) = e^{z_i t} \alpha(t)$  et des conditions initiales nulles, la sortie du système est particulièrement donnée par

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau) e^{z_i(t-\tau)} d\tau = \left( \int_0^\infty g(\tau) e^{-z_i \tau} d\tau \right) e^{z_i t} = \mathcal{G}(z_i) e^{z_i t}$$

On peut donc conclure que les entrées  $\{e^{z_i t} \alpha(t)\}$  pour  $i \in [1, nb]$  n'ont aucun effet sur la sortie du système et qu'il en est de même pour toute combinaison linéaire de ces entrées, en l'occurrence les zéros de  $\mathcal{G}(j\omega)$  correspondent aux fréquences asymptotiquement rejetées par le système. Les zéros du système permettent donc de caractériser la classe des entrées qui sont bloquées par le système, soit l'ensemble

$$\mathcal{EARS} \triangleq \{\{u(t)\} \in \mathbb{R} / B(\rho)u(t) = 0\}$$

- La fonction de transfert d'un système est une fraction rationnelle propre que l'on peut toujours décomposer en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{\prod_{i=1}^{n_{pd}} (s - p_i)^{m_i}} = \gamma_o + \sum_{i=1}^{n_{pd}} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\gamma_{ij}}{(s - p_i)^j} \quad (2.22)$$

avec

$$\gamma_o = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}(s) \quad (2.23)$$

$$\gamma_{ij} = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(m_i - j)!} \left( \frac{d}{ds} \right)^{(m_i - j)} \left[ (s - p_i)^{m_i} \mathcal{G}(s) \right] \right\} \quad (2.24)$$

où  $n_{pd}$  et  $m_i$  désignent le nombre de pôles distincts et l'ordre de multiplicité du pôle  $s = p_i$  et les  $\gamma_{ij}$  sont des nombres complexes. Cette décomposition permet de déterminer aisément la réponse impulsionnelle du système, soit

$$g(t) = \gamma_o \delta(t) + \sum_{i=1}^{n_{pd}} \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t} \alpha(t)$$

puisque

$$\mathcal{L} \left( \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_i t} \alpha(t) \right) = \frac{1}{(s - p_i)^\ell}$$

Et comme la fonction de transfert est une fraction rationnelle à coefficients réels, si le système admet un pôle complexe  $p_k$ , alors son conjugué  $p_k^*$  est aussi un pôle du système que l'on peut noter  $p_\ell$  et on aura  $\gamma_{\ell j} = \gamma_{k j}^*$ . On peut ainsi montrer aisément que les composantes principales d'une réponse impulsionnelle se distinguent par la nature de ses pôles, i.e. un pôle réel  $p_i$  ou une paire de pôles complexes conjugués  $\sigma_i \pm j\omega_i$ , et peuvent se mettre sous les formes suivantes dans le cas d'un pôle d'ordre de multiplicité  $m_i$ .

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} t^{j-1} e^{p_i t} \alpha(t)$$

et

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \alpha(t)$$

où les  $\mu_{ij}$  et  $\varphi_i$  sont des nombres réels qui dépendent de la nature des pôles.

On notera qu'un pôle réel (resp. une paire de pôles complexes conjugués) du système constitue un mode rigide (resp. oscillatoire) du système et que la réponse impulsionnelle d'un système peut être exprimée en fonction de ses modes distincts comme suit

$$\begin{aligned} g(t) = & \gamma_o \delta(t) \\ & + \sum_{i=1}^{n_{mrd}} \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} t^{j-1} e^{p_i t} \alpha(t) \\ & + \sum_{i=1}^{n_{mod}} \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \alpha(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $n_{mrd}$  et  $n_{mod}$  désignent respectivement le nombre de modes rigides et oscillatoires distincts. Cette expression permet de mettre en évidence les composantes fondamentales de la réponse impulsionnelle intrinsèques aux différents modes du système.

## 2.2 Modélisation d'un système de chauffage

On se propose d'étudier le problème de modélisation d'un système de chauffage domestique dont le diagramme fonctionnel peut être représenté comme le montre la figure 2.3.  $\mathcal{ENC}$  est l'enceinte dont la température est mesurée par le capteur  $\mathcal{CAP}$  et  $\mathcal{CHA}$  est la chaudière qui permet de produire la puissance de chauffe requise pour l'enceinte, alors que  $\mathcal{EXT}$  représente toutes les sources externes susceptibles de dissiper la chaleur emmagasinée dans l'enceinte. Les séquences  $\{u(t)\}$ ,  $\{\theta_{en}(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désignent respectivement la puissance de chauffe fournie par la chaudière, la température dans l'enceinte et sa mesure, alors que les séquences  $\{\theta_{ch}(t)\}$  et  $\{\theta_{ex}(t)\}$  désignent respectivement la température dans la chaudière et la température extérieure.

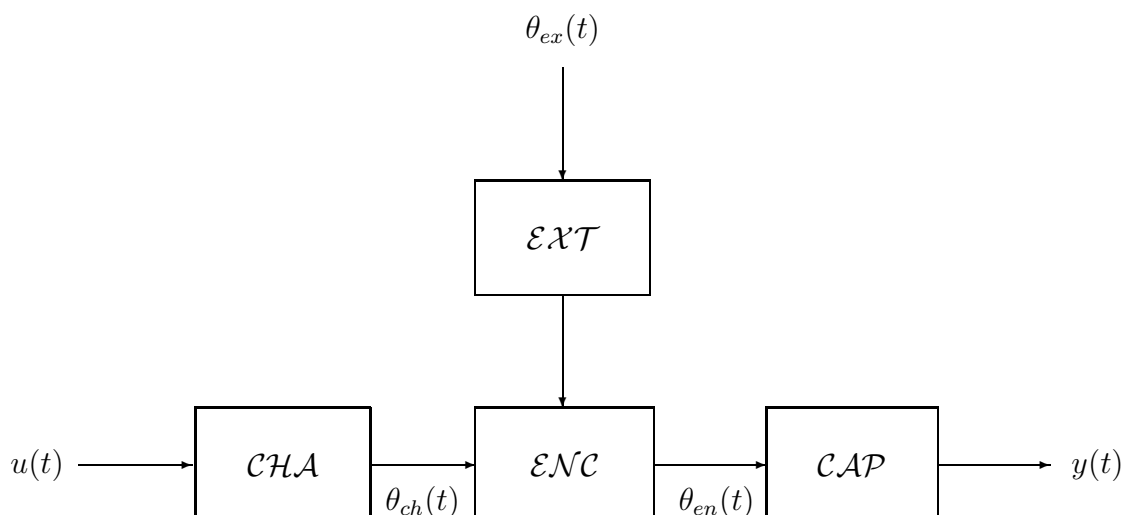


FIGURE 2.3 – Système de chauffage domestique

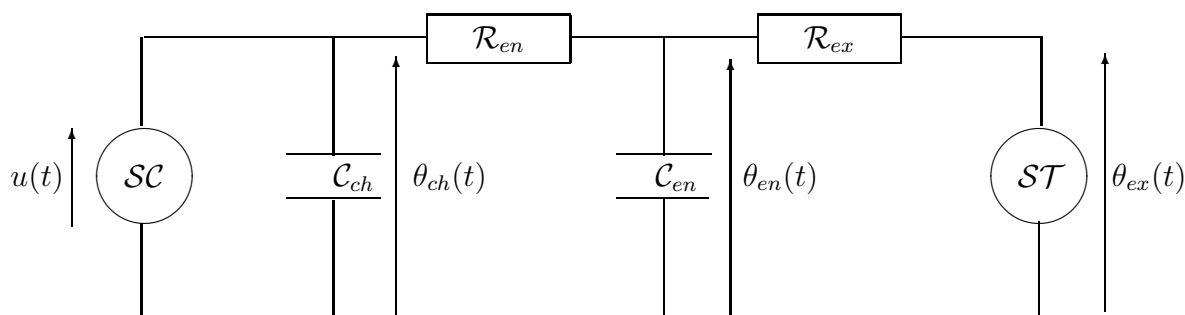


FIGURE 2.4 – Modélisation de l'installation de chauffage

La modélisation du système thermique peut être effectuée en exploitant son analogie par rapport

au système électrique de la figure 2.4. La source de courant  $SC$  et la capacité  $C_{ch}$  représentent respectivement la puissance de chauffe de la chaudière et sa capacité calorifique, alors que la capacité  $C_{en}$  représente la capacité calorifique de l'enceinte. Les résistances  $R_{en}$  et  $R_{ex}$  permettent de modéliser respectivement la dissipation de la chaleur de la chaudière vers l'enceinte et de l'enceinte vers l'extérieur. Quant à la source de tension  $ST$ , elle représente les effets de la température extérieure. Par ailleurs, on peut supposer que le capteur de température dans l'enceinte peut être décrit par un gain unitaire modulo un bruit de mesure, i.e.

$$y(t) = \theta_{en}(t) + \eta(t)$$

où  $\{\eta(t)\}$  désigne le bruit de mesure qui est une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies.

Conformément à l'analogie par rapport au système électrique de la figure 2.4, les équations du système thermique considéré sont données par

$$ST\mathcal{H} \left\{ \begin{array}{l} C_{ch} \rho \theta_{ch}(t) = u(t) - \frac{1}{R_{en}} (\theta_{ch}(t) - \theta_{en}(t)) \\ C_{en} \rho \theta_{en}(t) = \frac{1}{R_{en}} (\theta_{ch}(t) - \theta_{en}(t)) - \frac{1}{R_{ex}} (\theta_{en}(t) - v(t)) \end{array} \right.$$

soit

$$ST\mathcal{H} \left\{ \begin{array}{l} (1 + R_{en} C_{ch} \rho) \theta_{ch}(t) = R_{en} u(t) + \theta_{en}(t) \\ (R_{en} R_{ex} C_{en} \rho + R_{en} + R_{ex}) \theta_{en}(t) = R_{ex} \theta_{ch}(t) + R_{en} v(t) \end{array} \right.$$

On peut alors en déduire aisément l'équation différentielle reliant la température de l'enceinte à la puissance de chauffe fournie par la chaudière et la température externe en éliminant la température de la chaudière entre les deux équations du système thermique, soit

$$ST\mathcal{H} \{ (\rho^2 + 2\zeta\omega\rho + \omega^2) \theta_{en}(t) = \beta u(t) + \omega^2 (1 + \tau\rho) v(t) \quad (2.26)$$

où les paramètres  $\zeta$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  et  $\beta$  sont respectivement données par

$$\zeta = \frac{1}{2} (R_{en} C_{ch} + R_{ex} C_{ch} + R_{ex} C_{en}) \sqrt{\frac{1}{R_{en} C_{ch} R_{ex} C_{en}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{R_{en} C_{ch} R_{ex} C_{en}}}$$

$$\beta = \frac{R_{ex}}{R_{en} C_{ch} R_{ex} C_{en}}$$

$$\tau = R_{en} C_{ch}$$

Et compte tenu de l'hypothèse faite sur la modélisation du capteur, on peut en déduire que

l'équation du système est

$$\text{SYS } \{ A(\rho) y(t) = B(\rho) u(t) + E(\rho) v(t) + A(\rho) \eta(t) \quad (2.27)$$

avec

$$A(\rho) = \rho^2 + 2\zeta\omega\rho + \omega^2, \quad B(\rho) = \beta \quad \text{et} \quad E(\rho) = \omega^2(1 + \tau\rho) \quad (2.28)$$

## 2.3 Systèmes multivariables

Ce paragraphe est consacré aux différentes représentations des systèmes linéaires multivariables issues d'une représentation d'état avec un focus sur la pluralité de la représentation d'état. On en déduit ensuite les autres représentations en accordant une attention particulière aux factorisations essentielles de la fonction de transfert et aux propriétés fondamentales de la matrice système.

### 2.3.1 Représentation d'état

La classe des systèmes linéaires invariants dans le temps peut être décrite par les équations d'état et de sortie

$$\text{RES } \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $(F, G, H, E) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$  désigne la réalisation d'état du système associée à son vecteur d'état  $x(t)$  que l'on peut représenter comme l'indique la figure 2.5.

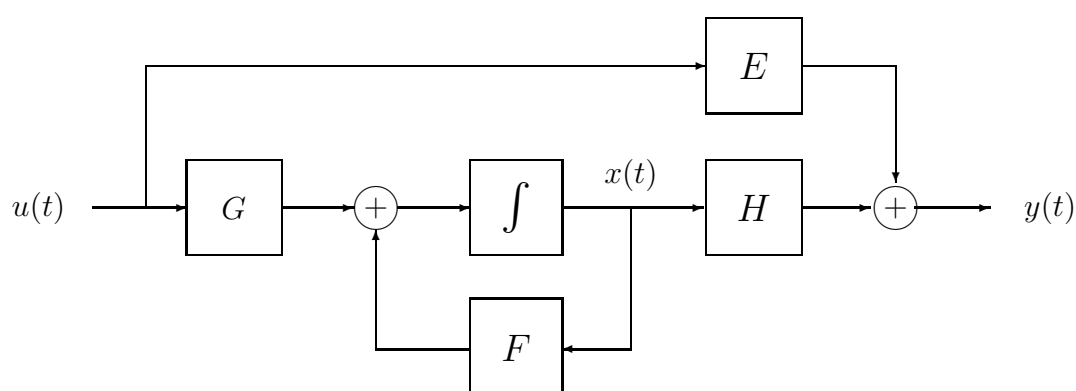


FIGURE 2.5 – Représentation d'état du système

Cette figure illustre bien la nature intrinsèque des variables d'état : une mémoire parfaite du système qui permet de réaliser une prédiction parfaite du comportement futur du système dans le contexte idéal considéré comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat 2.1** Les trajectoires d'état et de sortie d'un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$  sont respectivement données par les expressions

$$\mathcal{TES} \begin{cases} x(t) = e^{Ft}x_o + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau \\ y(t) = He^{Ft}x_o + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Eu(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

**Preuve.** Notons d'abord que l'équation d'état du système peut se récrire comme suit

$$e^{-Ft}(\rho x(t) - Fx(t)) = e^{-Ft}Gu(t)$$

ou d'une manière équivalente

$$\rho(e^{-Ft}x(t)) = e^{-Ft}Gu(t)$$

Et si l'on intègre les deux membres de cette équation entre les instants 0 et  $t$ , on obtient

$$e^{-Ft}x(t) = e^{-Ft}x_o + \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)d\tau$$

On retrouve bien les expressions des trajectoires d'état et de sortie du système (2.30).

*CQFD.*

Les trajectoires d'état et de sortie du système permettent d'en déduire aisément sa **matrice de transition** et sa **réponse impulsionnelle**. La matrice de transition du système n'est autre que la matrice de passage de l'état  $x(\tau)$  à l'état  $x(t)$  pour une entrée identiquement nulle, soit  $\phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)}$ . Ainsi la matrice de transition du système est la solution de l'équation différentielle

$$\rho\phi(t, \tau) = F\phi(t, \tau) \text{ avec } \phi(\tau, \tau) = I_n \quad (2.31)$$

Et comme la réponse impulsionnelle du système n'est autre que la sortie du système issue d'une impulsion unitaire et des conditions initiales nulles, on aura

$$g(t) = \begin{cases} HF^tG\alpha(t) & \text{pour } t > 0 \\ E\delta(t) & \text{pour } t = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

### 2.3.2 Pluralité de la représentation d'état

La représentation d'état se distingue principalement par sa pluralité qui est mise en évidence par le résultat suivant

**Résultat 2.2** Considérons un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  associé à un vecteur d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et effectuons un changement de base dans l'espace d'état défini par

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$



où  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de transformation régulière. Alors  $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur d'état du système associé à la réalisation d'état  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  donnée par

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT \quad \text{et} \quad \bar{E} = E$$

La **preuve** est triviale. Il suffit de récrire les équations du système pour le vecteur d'état  $\bar{x}(t)$  modulo quelques manipulations algébriques relativement simples comme suit

$$\dot{\bar{x}}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}FT\bar{x}(t) + T^{-1}Gu(t)$$

$$y(t) = H(T\bar{x}(t)) + Eu(t) = HT\bar{x}(t) + Eu(t)$$

On aboutit alors naturellement au système équivalent suivant

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{G}u(t) \\ y(t) = \bar{H}\bar{x}(t) + \bar{E}u(t) \end{cases}$$

On notera que le polynôme caractéristique de la matrice d'état d'un système est invariant par changement de base puisque

$$\begin{aligned} \det(sI_n - \bar{F}) &= \det(T^{-1}sI_nT - T^{-1}FT) \\ &= \det(T^{-1}(sI_n - F)T) \\ &= \det(sI_n - F) \end{aligned}$$

Cette propriété est l'essence des notions de **modes** d'un système qui sont définis à partir du spectre de sa matrice d'état comme suit.

**Définition 2.1** La configuration des modes d'un système est constituée par le spectre de sa matrice d'état, soit

$$\mathcal{CM}(\text{SYS}) = \mathcal{V}\{F\} \tag{2.33}$$

Le polynôme des modes d'une réalisation d'état n'est autre que le polynôme caractéristique de sa matrice d'état, que l'on désignera par

$$M(s) \triangleq \det(sI_n - F) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{m_i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^r m_i = n \tag{2.34}$$

où  $r$  et  $m_i$  désignent respectivement le nombre des valeurs propres distinctes et l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$ .

Les indices de multiplicité des modes du système peuvent être aisément déterminés à partir de la décomposition spectrale de sa matrice d'état comme l'indique la remarque suivante.

**Remarque 2.4** Compte tenu du résultat A.11, les indices de multiplicité d'une valeur propre  $\lambda_i$  d'ordre de multiplicité  $m_i$  sont les dimensions des blocs de Jordan qui lui sont associés, soit les nombres  $\nu_{ij}$  pour  $j \in [1, n_i]$  avec  $\sum_{j=1}^{n_i} \nu_{ij} = m_i$ . Ils sont particulièrement mis en évidence en récrivant le polynôme caractéristique du système sous la forme

$$M(s) = \prod_{i=1}^r \left( \prod_{j=1}^{n_i} (s - \lambda_i)^{\nu_{ij}} \right)$$

Dans le cas des systèmes dont tous les modes sont simples, la matrice d'état peut être factorisée comme suit

$$F = T \Lambda T^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 \dots v_i \dots v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \dots w_i \dots w_n \end{pmatrix}^{-1}$$

où  $v_i \in \mathbb{C}^n$  (resp.  $w_i \in \mathbb{C}^n$ ) désigne le vecteur propre à gauche (resp. à droite) associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

### 2.3.3 Fonction de transfert

Supposons que les transformées de Laplace des séquences d'entrée-sortie et de l'état existent, alors on peut récrire le système (2.29) sous la forme

$$\mathcal{RET} \begin{cases} sX(s) - x_o = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + EU(s) \end{cases}$$

Et en éliminant  $X(s)$  entre les deux équations d'état et de sortie, on peut en déduire la relation qui relie la sortie du système à son entrée d'une part et aux conditions initiales d'autre part, soit

$$\mathcal{RFT} \{ Y(s) = \mathcal{G}(s)U(s) + \mathcal{H}(s)x_o\Delta(s) \} \quad (2.35)$$

avec

$$\mathcal{G}(s) = H(sI_n - F)^{-1}G + E \quad (2.36)$$

$$\mathcal{H}(s) = H(sI_n - F)^{-1} \quad (2.37)$$

**Remarque 2.5** La description (2.35)-(2.37) du système peut être représentée comme l'indique la figure 2.6 qui met en exergue le fait que les conditions initiales peuvent être interprétées comme une entrée impulsionnelle  $x_o\delta(t)$ .

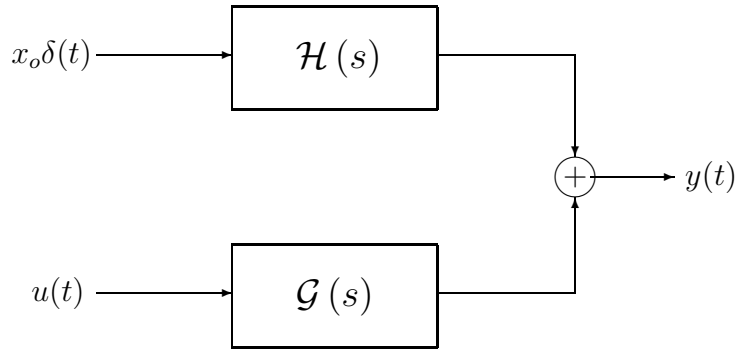


FIGURE 2.6 – Représentation du système

Le passage d'une réalisation d'état du système à sa fonction de transfert peut être déduit directement de l'équation (2.35) en occultant les conditions, soit

$$\mathcal{RFT} \left\{ Y(s) = \mathcal{G}(s) U(s) \text{ avec } \mathcal{G}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G + E \right. \quad (2.38)$$

Le résultat suivant précise la nature de la fonction de transfert du système (2.29) tout en précisant ses deux factorisations triviales ainsi que l'une de ses expressions pertinentes.

**Résultat 2.3** La fonction de transfert du système 2.38 est une matrice de fractions rationnelles irréductibles propres d'ordre au plus égal à l'ordre du système que l'on peut exprimer comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \left[ G_{ij}(s) \right]_{(i,j) \in [p,m]} \triangleq \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.39)$$

ou d'une manière équivalente sous la forme des factorisations polynomiales suivantes

$$\mathcal{G}(s) = B(s) (A(s)I_m)^{-1} = (A(s)I_p)^{-1} B(s) \quad (2.40)$$

où  $A(s)$  est le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions rationnelles  $G_{ij}(s)$  et  $B(s) = A(s)\mathcal{G}(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$ .

La preuve de ce résultat est triviale.

**Remarque 2.6** Compte tenu du fait que  $(sI_n - F)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^{i+1}} F^i$ , on peut exprimer la fonction de transfert du système comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k s^{-k} \text{ avec } g_k = \begin{cases} HF^{k-1}G & \text{pour } k \geq 1 \\ E & \text{pour } k = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Les scalaires  $g_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , qui apparaissent dans la forme (2.41) de la fonction de transfert, ne sont autres que les paramètres de Markov du système qui sont principalement utilisés pour

résoudre le problème de réalisation, i.e. le passage d'une fonction de transfert à une réalisation d'état ([46]), et de réduction d'ordre des modèles ([88]). La réduction d'ordre d'un modèle est une opération impérative dans la pratique pour des considérations de simplicité de mise en oeuvre. Par ailleurs, il apparaît clairement que le système exhibe un retard uniforme égal à  $d$  si ses paramètres de Markov vérifient la propriété suivante

$$g_k = 0 \text{ pour } i \leq d$$

**Remarque 2.7** Bien que les fractions rationnelles propres  $\mathcal{G}_{ij}(s)$  pour  $(i, j) \in [1, p] \times [1, m]$  sont irréductibles, les fractions rationnelles propres  $\mathcal{G}_{ij}(s)$  et  $\mathcal{G}_{k\ell}(s)$  avec  $(i, j) \neq (k, \ell)$  peuvent avoir des pôles et des zéros communs dans le cas des systèmes multivariables.

Compte tenu des notations adoptées pour la fonction de transfert et la réalisation d'état d'un système et du fait et que sa représentation d'état peut se récrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \rho x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

on peut le désigner par l'expression suivante

$$\mathcal{G}(s) \triangleq \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \quad (2.42)$$

Par ailleurs, contrairement à la réalisation d'état, la fonction de transfert d'un système est un invariant par un changement de base dans l'espace d'état comme le montre les simples manipulations algébriques suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(s) &= \bar{H} \left( sI_n - \bar{F} \right)^{-1} \bar{G} + \bar{E} \\ &= HT \left( T^{-1} sI_n T - T^{-1} FT \right)^{-1} T^{-1} G + E \\ &= HT \left( T^{-1} \left( sI_n - F \right) T \right)^{-1} T^{-1} G + E \\ &= H \left( sI_n - F \right)^{-1} G + E \\ &= \mathcal{G}(s) \end{aligned}$$

Cette propriété est tout à fait naturelle dans la mesure où la fonction de transfert est une représentation externe qui n'a aucune raison d'être différente pour un même système.

### 2.3.4 Matrice système

Les équations d'état et de sortie (2.29) du système peuvent se récrire comme suit

$$\mathcal{SE} \left\{ \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ Y(s) \end{pmatrix} \right. \quad (2.43)$$

Cette forme suggère de définir une matrice système du système à partir de l'une de ses réalisations d'état comme suit

$$\mathcal{MS} \left\{ \mathcal{M}_\sigma(s) = \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ -H & E \end{pmatrix} \right. \quad (2.44)$$

Comme pour la représentation d'état, la matrice système est plurielle. On montre aisément que les matrices systèmes associées à une réalisations d'état  $(F, G, H, E)$  et une réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  issue d'un changement de base  $x(t) = T\bar{x}(t)$  sont reliées comme suit

$$\bar{\mathcal{M}}_\sigma(s) = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \mathcal{M}_\sigma(s) \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

Le résultat suivant précise les propriétés essentielles de la matrice système qui seront utilisées pour définir les zéros du système au moment opportun.

**Résultat 2.4** La matrice système  $\mathcal{M}_\sigma(s)$  se distingue par les trois propriétés fondamentales suivantes.

$\mathcal{P}1$ . Le rang de la matrice système est relié au rang de la fonction de transfert comme suit

$$\text{rang}(\mathcal{M}_\sigma(s)) = n + \text{rang}(\mathcal{G}(s))$$

$\mathcal{P}2$ . Le rang de la matrice système est un invariant par changement de base

$\mathcal{P}3$ . Dans le cas des systèmes carrés, i.e. qui ont autant d'entrées que de sorties, on a

$$\det(\mathcal{G}(s)) = \frac{\det(\mathcal{M}_\sigma(s))}{\det(sI_n - F)}$$

**Preuve.** La propriété  $\mathcal{P}1$  découle naturellement du fait que la matrice  $sI_n - F$  est de rang plein et de la factorisation suivante de la matrice système.

$$\begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ H(sI_n - F)^{-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ 0 & \mathcal{G}(s) \end{pmatrix}$$

Pour la preuve de la propriété  $\mathcal{P}2$ , on considère un changement de base  $x(t) = T\bar{x}(t)$  qui permet de passer de  $(F, G, H, E)$  à  $(T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, E)$ , la matrice système associée à la nouvelle réalisation est donnée par

$$\begin{pmatrix} sI_n - T^{-1}FT & -T^{-1}G \\ HT & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

Il apparaît clairement que le rang de la matrice système est invariant par changement de base. Quant à la propriété  $\mathcal{P}3$ , elle résulte naturellement du calcul du déterminant de la matrice système à la lumière du résultat A.2, soit

$$\det(\mathcal{M}_\sigma(s)) = \det(sI_n - F) \det(H(sI_n - F)^{-1}G + E)$$

*CQFD*

**Remarque 2.8** La fonction de transfert d'un système monovarié peut s'exprimer en fonction de sa matrice système comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\det(\mathcal{M}_\sigma(s))}{\det(sI_n - F)}$$

Ainsi, tout zéro du système est une racine du déterminant de la matrice système.

### 2.3.5 Factorisations polynomiales

L'approche polynomiale de la théorie des systèmes est fondamentalement basée sur des modèles du type factorisations polynomiales premières que l'on peut élaborer directement à partir des fonctions de transfert ou indirectement à partir des réalisations d'état du système. On distingue deux factorisations polynomiales de la fonction de transfert d'un système qui conduisent naturellement aux formes différentielles usuelles.

**La factorisation polynomiale première à droite donnée par**

$$\mathcal{FPD} \left\{ \mathcal{G}(s) = B_d(s)A_d^{-1}(s) \right. \quad (2.45)$$

où  $B_d(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$  et  $A_d(s)$  est une matrice polynomiale inversible de dimension  $m$  qui sont premières entre elles à droite, i.e. il existe des matrices polynomiales  $X_d(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}[s]$  et  $Y_d(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  telles que

$$X_d(s)B_d(s) + Y_d(s)A_d(s) = I_m \quad (2.46)$$

On notera qu'il existe une infinité de factorisations polynomiales premières à droite de la forme

$$\mathcal{G}(s) = \bar{B}_d(s)\bar{A}_d^{-1}(s) = B_d(s)A_d^{-1}(s) \quad (2.47)$$

avec

$$\bar{B}_d(s) = B_d(s)U_d(s) \text{ et } \bar{A}_d(s) = A_d(s)U_d(s) \quad (2.48)$$

où  $U_d(s)$  est une matrice unimodulaire de dimension  $m$ . La factorisation polynomiale première à droite conduit à la représentation d'état partiel donnée par

$$\mathcal{FPDC} \left\{ \begin{array}{l} A_d(\rho)z(t) = u(t) \\ y(t) = B_d(\rho)z(t) \end{array} \right. \quad (2.49)$$

où  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  est un état partiel du système. Cette représentation est utilisée pour la détermination de la forme canonique commandable qui permet de concevoir aisément un système de commande avec retour d'état.

**La factorisation polynomiale première à gauche donnée par**

$$\mathcal{FPG} \left\{ \mathcal{G}(s) = A_g^{-1}(s)B_g(s) \right. \quad (2.50)$$

où  $B_{\sigma_g}(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$  et  $A_d(s)$  est une matrice polynomiale inversible de dimension  $p$  qui sont premières entre elles à gauche, i.e. il existe des matrices polynomiales  $X_g(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}[s]$  et  $Y_g(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  telles que

$$B_g(s)X_g(s) + A_g(s)Y_g(s) = I_p \quad (2.51)$$

Comme pour les factorisations polynomiales premières à droite, il existe une infinité de factorisations polynomiales (premières) à gauche de la forme

$$\mathcal{G}(s) = \bar{A}_g^{-1}(s)\bar{B}_g(s) \quad (2.52)$$

avec

$$\bar{B}_g(s) = U_g(s)B_g(s) \quad \text{et} \quad \bar{A}_g(s) = U_g(s)A_d(s) \quad (2.53)$$

où  $U_g(s)$  est une matrice unimodulaire de dimension  $p$ . La factorisation première à gauche permet de retrouver la forme différentielle usuelle

$$\mathcal{FPGC} \quad \{ \quad A_g(\rho)y(t) = B_g(\rho)u(t) \quad (2.54)$$

qui particulièrement utilisée pour la détermination de la forme canonique observable qui est fondamentalement motivée par des considérations de simplicité de synthèse d'observateurs.

**Remarque 2.9** Comme la matrice polynomiale  $A_d(s)$  (resp.  $A_g(s)$ ) est inversible, on peut postuler que la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  est de rang plein si et seulement si la matrice polynomiale  $B_d(s)$  (resp.  $B_g(s)$ ) est de rang plein. Par ailleurs, les matrices polynomiales  $B_d(s)$  et  $B_g(s)$  sont bien définies par rapport à la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  qui n'est pas bien définie par rapport à ses pôles.

**Remarque 2.10** Les factorisations polynomiales d'un système peuvent être aisément obtenues en vertu du résultat B.5 qui stipule que l'on peut exprimer la fonction de transfert d'un système comme suit

$$\mathcal{G}(s) = U(s)\mathcal{S}_{mc}(s)V(s)$$

où  $U(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  et  $V(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  sont deux matrices unimodulaires et  $\mathcal{S}_{mc}(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle et propre unique appelée forme de Smith-McMillan de la fonction de transfert qui se distingue par une structure particulière donnée par

$$\mathcal{S}_{mc}(s) = \Psi(s)\Phi^{-1}(s) = \Phi^{-1}(s)\Psi(s)$$

avec

$$\Psi(s) = \text{diag}(\Psi_1(s), \dots, \Psi_r(s), 0, \dots, 0)$$

$$\Phi(s) = \text{diag}(\Phi_1(s), \dots, \Phi_r(s), 1, \dots, 1)$$

où  $r = \text{rang}(\mathcal{G}(s)) \leq \min(m, p)$  et  $\{\Psi_i(s)\}$  et  $\{\Phi_i(s)\}$  sont des polynômes normalisés premiers entre eux satisfaisant les propriétés suivantes

$$\Psi_i(s) \text{ divise } \Psi_{i+1}(s) \quad \text{et} \quad \Phi_{i+1}(s) \text{ divise } \Phi_i(s) \quad \text{pour } i \in [1, r-1]$$

En effet, on peut vérifier aisément que l'on peut obtenir une factorisation polynomiale première à gauche (resp. à droite) de la fonction de transfert du système avec

$$A_g(s) = \Phi(s)U^{-1}(s) \quad \text{et} \quad B_g(s) = \Psi(s)V(s)$$

$$(\text{resp. } A_d(s) = V^{-1}(s)\Phi(s) \quad \text{et} \quad B_d(s) = U(s)\Psi(s))$$

### 2.3.6 Pôles et zéros d'une fonction de transfert.

Plusieurs études fondamentales ont été consacrées aux pôles et zéros des systèmes multivariables ([15], [46], [70], [89]). Ces contributions peuvent être présentées d'une manière concise dans le cas d'une représentation des systèmes par leur fonction de transfert en utilisant le résultat 2.3.

La notion de pôles des systèmes monovariables peut être étendue d'une manière naturelle aux systèmes multivariables en utilisant l'essence de la notion de **pôles** d'un système, en l'occurrence les nombres complexes finis qui conduisent aux singularités de sa fonction de transfert, i.e. l'ensemble

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) = \left\{ \mu \in \mathbb{C}_f / \lim_{s \rightarrow \mu} \mathcal{G}(s) = \pm\infty \right\} \triangleq \{ \mu_1, \dots, \mu_{np} \}$$

où  $\mathbb{C}_f$  désigne un ensemble fini de nombres complexes et  $np$  n'est autre que le nombre des pôles du système. On peut en déduire naturellement les faits suivants.

*F1.* Tout pôle d'une entrée  $G_{ij}(s)$  de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  est un pôle du système et chaque pôle de la la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  doit être un pôle d'au moins l'une de ses entrées  $G_{ij}(s)$ .

*F2.* La configuration des pôles d'un système est incluse dans sa configuration des modes, i.e.  $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{CM}(\mathcal{SYS})$ . Les modes du système qui sont simplifiés lors de la détermination de la fonction de transfert du système ne figurent pas dans sa configuration des pôles.

L'extension de la notion de zéros des systèmes monovariables aux systèmes multivariables n'est pas triviale compte tenu des deux faits suivants.

*F1.* Un zéro d'une entrée  $G_{ij}(s)$  de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  n'est pas nécessairement un zéro du système et un zéro de la la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  n'est pas nécessairement un zéro de l'une de ses entrées  $G_{ij}(s)$ .

*F2.* Les zéros d'un système ne sont autres que les pôles du système inverse correspondant.



Le premier aspect stipule que si une composante de l'entrée d'un système est bloquée au niveau d'une composante de la sortie du système, elle n'est pas nécessairement bloquée sur toutes les composantes de sa sortie. Quant au second aspect, il constitue l'essence de la définition suivante des zéros de transmission d'une fonction de transfert à partir des nombres complexes qui conduisent à une dégénérescence de leur rang.

**Définition 2.2** Considérons un système décrit par sa fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}$ , on dira que  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro du système si la propriété suivante est satisfaite

$$\text{rang}(\mathcal{G}(\zeta)) < \text{rang}(\mathcal{G}(s))$$

Si en plus  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  et  $\det(\mathcal{G}(s)) \neq 0$ , alors  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro de transmission du système si et seulement si  $\det(\mathcal{G}(\zeta)) = 0$ .

Cette définition concerne les zéros de transmission des systèmes qui ne sont pas nécessairement des zéros de blocage du système, i.e. les nombres complexes finis pour lesquels la fonction de transfert du système est nulle, qui sont définis à partir d'une extension naive de la définition des zéros des systèmes monovariabiles.

Les deux résultats suivants précisent comment déterminer les pôles et les zéros de transmission d'une fonction de transfert.

**Résultat 2.5** Les pôles d'une fonction de transfert sont les racines du plus petit commun multiple des dénominateurs de l'ensemble de ses mineurs non nuls modulo une simplification préalable des éventuels facteurs communs. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique ou polynôme des pôles de la fonction de transfert que l'on désignera par  $\Phi(s)$ .

**Résultat 2.6** Les zéros d'une fonction de transfert de rang normal  $r$  sont les racines du plus grand commun diviseur des numérateurs de tous les mineurs d'ordre  $r$ , pourvu que ces mineurs aient été préalablement exprimés de manière à ce qu'ils aient comme dénominateurs le polynôme des pôles de la fonction de transfert  $\Phi(s)$ . Ce polynôme est appelé polynôme des zéros de transmission de la fonction de transfert que l'on désignera par  $\Psi(s)$ .

Les exemples suivants permettent d'illustrer les résultats 2.5 et 2.6 tout en relevant des aspects spécifiques aux zéros des fonctions de transfert.

**Exemple 2.1** Considérons la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-2}{s+5} & \frac{s-3}{s+3} \end{pmatrix}$$

Son rang normal est égal à 1 et son polynôme des pôles (resp. des zéros) est  $\Phi(s) = (s+3)(s+5)$  (resp.  $\Psi(s) = 1$ ). Ainsi, cette fonction de transfert admet deux pôles  $p_1 = -3$  et  $p_2 = -5$  mais n'admet aucun zéro alors que chacun de ses éléments admet un zéro.

**Exemple 2.2** Considérons la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{s+2} \begin{pmatrix} s-3 & 5 \\ 5 & s-3 \end{pmatrix}$$

Les mineurs d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) sont donnés par les fractions rationnelles

$$\frac{s-3}{s+2}, \frac{5}{s+2}, \frac{5}{s+2} \text{ et } \frac{s-3}{s+2} \left( \text{resp. } \det(\mathcal{G}(s)) = \frac{s-8}{s+2} \right)$$

Le rang normal de cette fonction de transfert est donc égal à 2 et son polynôme des pôles (resp. des zéros) est donné par  $\Phi(s) = s+2$  (resp.  $\Psi(s) = s-8$ ). Elle admet donc un pôle  $p_1 = -2$  et un zéro de transmission  $z_1 = 8$  qui est bien différent des zéros de transmission des éléments de la fonction de transfert qui sont égaux à un.

**Exemple 2.3** Soit la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)} \begin{pmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)(s-1) \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{pmatrix}$$

dont les mineurs non identiquement nuls d'ordre 1 et d'ordre 2 sont respectivement donnés par

$$\frac{1}{s+1}, \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}, \frac{-1}{s-1}, \frac{1}{s+2}, \frac{1}{s+2}$$

et

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)}, \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+2)} \text{ et } \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Le rang normal de cette fonction de transfert est égal à 2 et le polynômes des pôles (resp. des zéros) est  $\Phi(s) = (s+1)(s-1)(s+2)^2$  (resp.  $\Psi(s) = s-1$ ). Elle admet donc deux pôles simples  $p_1 = 1$  et  $p_2 = -1$ , un pôle double  $p_3 = p_4 = -2$  et un seul zéro  $z_1 = 1$ . On notera que cette fonction de transfert admet un pôle et un zéro communs  $p_1 = z_1 = 1$ .

Ces exemples illustrent bien la problématique intrinsèque aux zéros d'une fonction de transfert d'un système multivariable, notamment la fonction de transfert n'admet aucun zéro alors que chacun de ses éléments admet un zéro comme le montre l'exemple 2.1, les zéros d'une fonction de transfert ne sont pas égaux aux zéros de leurs entrées respectives comme le montre l'exemple 2.2 et une fonction de transfert peut avoir des pôles et des zéros égaux comme le montre l'exemple 2.3.

**Remarque 2.11** Les pôles d'une fonction de transfert sont essentiellement des pôles de ses éléments modulo une indetermination de leur ordre de multiplicité. Pour apprécier cet aspect des choses, considérons la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{s-\mu} \mathcal{G}_{\bar{\mu}}(s)$$

où  $\mathcal{G}_{\bar{\mu}}(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  et n'admet aucun pôle réel de valeur  $\mu$ . En effet, compte tenu du mineur

d'ordre  $m$  de la fonction de transfert donnée par

$$\det(\mathcal{G}(s)) = \frac{1}{(s - \mu)^m} \det(\mathcal{G}_{\bar{\mu}}(s))$$

on peut conclure que la fonction de transfert admet un pôle réel de valeur  $\mu$  et d'ordre de multiplicité  $m$  pourvu que  $\det(\mathcal{G}_{\bar{\mu}}(s))$  n'admet aucun zéro de valeur  $\mu$ . Et cette multiplicité n'est pas perceptible à partir des éléments de la fonction de transfert.

La définition 2.2 est néanmoins mal appropriée pour la détection d'une dégénérescence de rang des fonctions de transfert qui ont éventuellement des zéros et des pôles communs : une propriété probable dans le cas des fonctions de transfert des systèmes multivariables. Pour pallier ce problème, la définition 2.2 est judicieusement modifiée modulo une restriction aux fonctions de transfert de rang plein qui ne constituent pas une perte de généralité pourvu que le choix des entrées et des sorties du système ait été raisonnablement effectué.

**Définition 2.3** Considérons une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  de rang plein en colonnes (resp en lignes). Alors  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro de transmission de  $\mathcal{G}(s)$  si et seulement si

$$\exists v \in \mathbb{C}^{*m} / \lim_{s \rightarrow \zeta} \mathcal{G}(s)v = 0 \quad \left( \text{resp. } \exists w \in \mathbb{C}^{*m} / \lim_{s \rightarrow \zeta} w^* \mathcal{G}(s) = 0 \right)$$

Les exemples suivants permettent de mieux apprécier l'application de la définition 2.3 dans le cas d'une fonction de transfert qui admet des pôles et des zéros communs.

**Exemple 2.4** Considérons un système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{s+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et notons qu'elle est de rang plein, admet un pôle  $p = -2$  et vérifie la propriété suivante

$$\mathcal{G}(s)V(s) = Z(s) \quad \text{avec } V(s) = \begin{pmatrix} -2 \\ s+2 \end{pmatrix} \quad \text{et } Z(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s+2 \end{pmatrix}$$

Et en vertu de la définition 2.3, on en déduit que le système admet un zéro  $\zeta = -2$  puisque  $\lim_{s \rightarrow -2} \mathcal{G}(s)V(s) = 0$ . Par ailleurs, le système inverse est donné par

$$\mathcal{G}^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{s+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il admet un pôle  $p = -2$ , ce qui confirme le fait que le système admet un zéro  $\zeta = -2$ .

**Exemple 2.5** Considérons le système décrit par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{s+1} \end{pmatrix}$$

Comme le système est de rang plein, on peut déterminer ses zéros en vertu de la définition 2.3 qui permet de postuler que le système admet deux zéros  $\zeta_1 = -1$  et  $\zeta_2 = -2$ . Par ailleurs, le système admet deux pôles  $p_1 = -1$  et  $p_2 = -2$ .

**Exemple 2.6** La condition de rang plein est impérative pour l'application de la définition 2.3 comme l'illustre le cas du système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

On notera que ce système n'est pas de rang plein et qu'il n'admet aucun zéro de transmission

$$\mathcal{G}(s) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ pour tout } s \in \mathbb{C}$$

Le résultat suivant permet de caractériser les zéros de transmission d'une fonction de transfert qui n'est pas nécessairement de rang plein pourvu que ses configurations des pôles et des zéros soient disjointes.

**Résultat 2.7** Considérons un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$ . Si  $\zeta \in \mathbb{C}$  n'est pas un pôle de  $\mathcal{G}(s)$ , alors  $\zeta$  est un zéro de transmission de  $\mathcal{G}(s)$  si et seulement si

$$\text{rang}(\mathcal{G}(\zeta)) < \text{rang normal}(\mathcal{G}(s))$$

Si en plus  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$  et  $\det(\mathcal{G}(s)) \neq 0$ , alors  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro de transmission du système si et seulement si  $\det(\mathcal{G}(\zeta)) = 0$ .

Ce résultat peut être utilisé pour déterminer les zéros de la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

dont le rang normal est égal à 2 puisque

$$\det(\mathcal{G}(s)) = \frac{2 - s^2}{(s+1)^2(s+2)^2}$$

Ainsi cette fonction de transfert admet deux zéros  $z_1 = \sqrt{2}$  et  $z_2 = -\sqrt{2}$  qui sont distincts de ses pôles, notamment  $p_1 = p_2 = -1$  et  $p_3 = p_4 = -2$ . Par ailleurs, ce résultat n'est pas

applicable dans le cas de la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{s-1} \end{pmatrix}$$

puisqu'elle admet un pôle et un zéro de transmission communs  $p = \zeta = 1$ , alors que  $\det(\mathcal{G}(1)) \neq 0$ . La détermination des zéros est effectuée en vertu de la définition 2.3.

**Résultat 2.8** *Considérons une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  de rang plein en colonnes. Alors  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro de transmission de  $\mathcal{G}(s)$  si et seulement si*

$$\exists \neq v \in \mathbb{C}^m / \mathcal{G}(\zeta)v = 0$$

**Preuve.** Elle peut être faite, sans aucune perte de généralité, à partir de la forme de Smith-McMillan de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  donnée par le résultat B.5 en se remémorant que  $U(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  et  $V(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  sont deux matrices unimodulaires et  $\mathcal{S}_{mc}(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle et propre unique qui se distingue par sa structure diagonale.

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Pour ce faire, supposons que  $\zeta$  est un zéro de  $\Psi_m(s)$ , i.e.  $\Psi_m(\zeta) = 0$ , et posons  $v = V^{-1}(\zeta)e_m$  où  $e_m^* = (0 \ \dots \ 0 \ 1) \in \mathbb{R}^m$ . Alors, on peut vérifier aisément que  $\mathcal{G}(\zeta)v = 0$ .

Montrons ensuite que la condition est suffisante. Pour ce faire, supposons qu'il existe un vecteur non nul  $v \in \mathbb{C}^m / \mathcal{G}(\zeta)v = U(\zeta)\mathcal{S}_{mc}(\zeta)V(\zeta)v = 0$  et posons

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \triangleq V(\zeta)v \in \mathbb{R}^m$$

Alors on aura  $\alpha_i(\zeta)u_i = 0$  pour tout  $i \in [1, m]$ , et donc  $\zeta \in \mathbb{C}$  doit être un zéro de l'un des polynômes  $\Psi(s)$  pour  $i \in [1, m]$ .

*CQFD*

## 2.4 Modèle de synthèse

La simplicité est une spécification vitale pour la conception des systèmes de commande, de prédiction ou de filtrage. Elle est intrinsèquement liée à la simplicité du modèle de synthèse, en l'occurrence un modèle linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état ou une fonction de transfert dont la complexité peut être essentiellement caractérisée par la structure du modèle, notamment les nombres des variables d'état, des entrées et des sorties du système. Ainsi, on peut postuler que cette structure est judicieusement spécifiée pourvu que les propriétés suivantes soient satisfaites

$$\mathcal{CM}(\mathcal{SYS}) = \mathcal{CP}(\mathcal{SYS}), \quad \text{rang}(G) = m \quad \text{et} \quad \text{rang}(H) = p$$

Ces propriétés permettent d'éviter toutes les redondances possibles des variables d'état, des entrées et des sorties du système et d'assurer que sa fonction de transfert est de rang plein en lignes (rep. en colonnes) si  $m \leq p$  (resp. si  $m \geq p$ ). Par ailleurs, il faut privilégier les cas des systèmes carrés, i.e.  $m = p$ , pour des considérations de simplicité d'analyse et de synthèse.

## 2.5 Opérations élémentaires

Les systèmes sont principalement conçus à partir de trois ensembles d'opérations élémentaires qui seront présentés dans ce qui suit d'une manière concise et précise.

**Le premier ensemble concerne les trois compositions élémentaires entre deux systèmes respectivement caractérisés par**

$$\mathcal{G}_1(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_1 & G_1 \\ \hline H_1 & E_1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_2 & G_2 \\ \hline H_2 & E_2 \end{array} \right)$$

qui se distinguent par la nature de l'interconnection des deux systèmes. La figure 2.7 montre une **interconnection en cascade** où il apparaît clairement que

$$u_1(t) = u(t), \quad u_2(t) = y_1(t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = y(t)$$

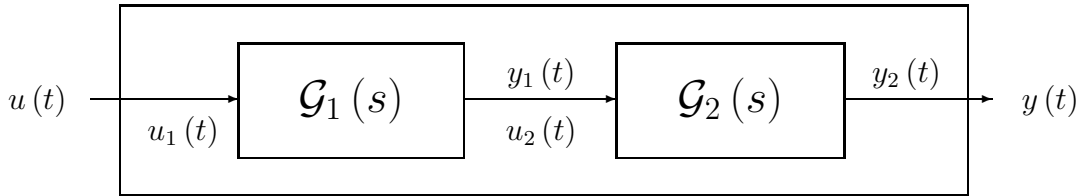


FIGURE 2.7 – Interconnection en cascade

La description de cette cascade peut être faite à partir des représentations d'état respectives des systèmes  $\mathcal{G}_1(s)$  et  $\mathcal{G}_2(s)$  en effectuant les substitutions requises, soit

$$\rho x_1(t) = F_1 x_1(t) + G_1 u(t)$$

$$\rho x_2(t) = F_2 x_2(t) + G_2 u_2(t) = F_2 x_2(t) + G_2 H_1 x_1(t) + G_2 E_1 u(t)$$

$$y(t) = H_2 x_2(t) + E_2 u_2(t) = H_2 x_e(t) + E_2 H_1 x_1(t) + E_2 E_1 u(t)$$

Et si l'on considère toutes les variables d'état des systèmes  $\mathcal{G}_1(s)$  et  $\mathcal{G}_2(s)$  comme variables d'état de la cascade, alors elle peut être caractérisée par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} F_1 & 0 & G_1 \\ \hline G_2 H_1 & F_2 & G_2 E_1 \\ \hline H_2 & E_2 H_1 & E_2 E_1 \end{array} \right)$$

La figure 2.8 montre **une interconnection du type parallèle** où il apparaît clairement que

$$u(t) = u_1(t) = u_2(t) \text{ et } y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

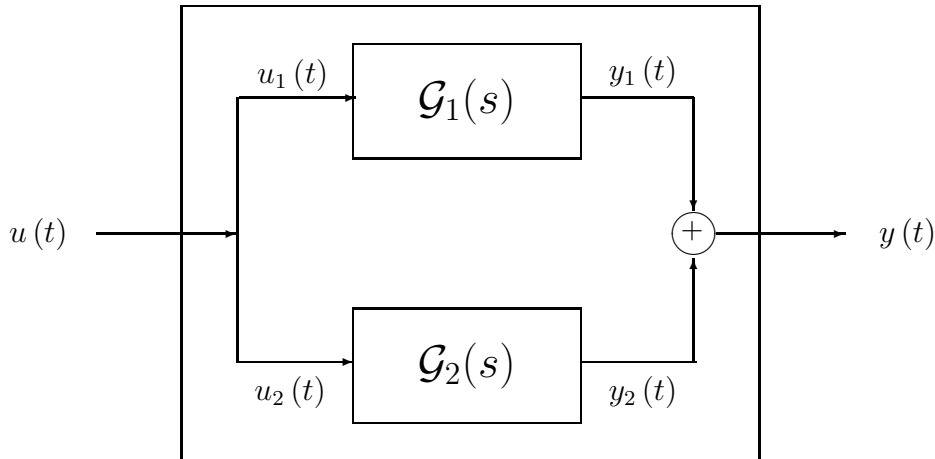


FIGURE 2.8 – Interconnection en parallèle

La description de l'interconnection parallèle peut être faite à partir des représentations d'état respectives des systèmes  $\mathcal{G}_1(s)$  et  $\mathcal{G}_2(s)$  en effectuant les substitutions requises, soit

$$\rho x_1(t) = F_1 x_1(t) + G_1 u(t)$$

$$\rho x_2(t) = F_2 x_2(t) + G_2 u(t)$$

et

$$y(t) = H_1 x_1(t) + H_2 x_2(t) + (E_1 + E_2) u(t)$$

Et si l'on considère toutes les variables d'état des systèmes  $\mathcal{G}_1(s)$  et  $\mathcal{G}_2(s)$  comme variables d'état de l'interconnection parallèle, alors elle peut être caractérisée par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & F_2 & G_2 \\ \hline H_1 & H_2 & E_1 + E_2 \end{array} \right)$$

La figure 2.9 montre **une interconnection du type rétroaction** où il apparaît clairement que

$$u_1(t) = u(t) - y_2(t) \text{ et } y(t) = y_1(t) = u_2(t)$$

La description de l'interconnection en rétroaction peut être faite à partir des réalisations d'état respectives des systèmes  $\mathcal{G}_1(s)$  et  $\mathcal{G}_2(s)$  en effectuant les substitutions requises. Compte tenu des équations de sortie des systèmes, on a

$$(I + E_2 E_1) u_1(t) = u(t) - E_2 H_1 x_1(t) - H_2 x_2(t)$$

Et si la matrice  $I + E_2E_1$  est inversible, alors l'équation de la sortie de l'interconnection en rétroaction est donnée par

$$y(t) = (I - E_1(I + E_2E_1)^{-1}E_2)H_1x_1(t) - E_1(I + E_2E_1)^{-1}H_2x_2(t) + E_1(I + E_2E_1)^{-1}u(t)$$

Cette équation peut se récrire comme suit en vertu des résultats A.5 et A.6 d'inversion matriciel.

$$y(t) = E_{12}H_1x_1(t) - E_{12}E_1H_2x_2(t) + E_1E_{21}u(t)$$

avec

$$E_{12} = (I + E_1E_2)^{-1} \text{ et } E_{21} = (I + E_2E_1)^{-1}$$

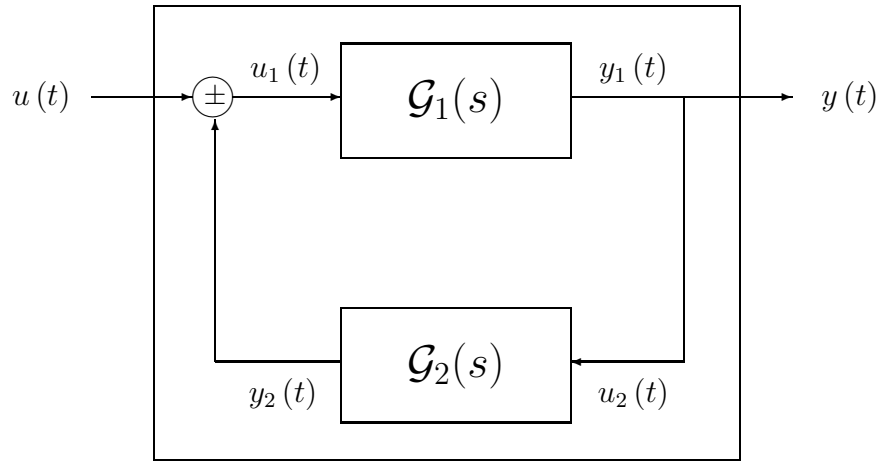


FIGURE 2.9 – Interconnection en rétroaction

Et si l'on considère toutes les variables d'état des systèmes  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  comme variables d'état de l'interconnection en rétroaction, alors elle peut être caractérisée par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} F_1 - G_1E_2E_{12}H_1 & -G_1E_{21}H_2 & G_1E_{21} \\ G_2E_{12}H_1 & F_2 - G_2E_1E_{21}H_2 & G_2E_1E_{21} \\ \hline E_{12}H_1 & -E_{12}E_1H_2 & E_1E_{21} \end{array} \right)$$

**Remarque 2.12** Les réalisations d'état des compositions considérées ont été établies autour des variables d'état des systèmes interconnectés. L'hypothèse requise dans le cas d'une interconnection en contre réaction, i.e. la matrice  $I + E_2E_1$  est inversible, est satisfaite si l'un des systèmes interconnectés est strictement propre et c'est le cas dans la plupart des problèmes d'automatique.

**Le second ensemble concerne les trois systèmes usuels associés à un système donné** en l'occurrence le système dual, le système conjugué et le système inverse, qui sont particulièrement définis par leur relation intrinsèque au système.



La fonction de transfert du **système dual** est égale à la transposée de la fonction de transfert du système, soit

$$\mathcal{G}_d(s) = \mathcal{G}^T(s) = (H(sI_n - F)^{-1}G + E)^T = G^T(sI_n - F^T)^{-1}H^T + E^T$$

On aura alors

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \rightarrow \mathcal{G}_d(s) = \left( \begin{array}{c|c} F^T & H^T \\ \hline G^T & E^T \end{array} \right)$$

La fonction de transfert du **système conjugué** est donnée par

$$\mathcal{G}_c(s) = \mathcal{G}^T(-s) = (H(-sI_n - F)^{-1}G + E)^T = -G^T(sI_n + F^T)^{-1}H^T + E^T$$

On aura alors

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \rightarrow \mathcal{G}_c(s) = \left( \begin{array}{c|c} -F^T & H^T \\ \hline -G^T & E^T \end{array} \right)$$

La fonction de transfert du **système inverse** est donnée par  $\mathcal{G}_i(s) = (\mathcal{G}(s))^{-1}$  pourvu que la fonction de transfert du système soit inversible. Dans ce cas le système inverse peut être réalisé à partir d'une interconnection en rétroaction appropriée comme l'indique la figure 2.10.

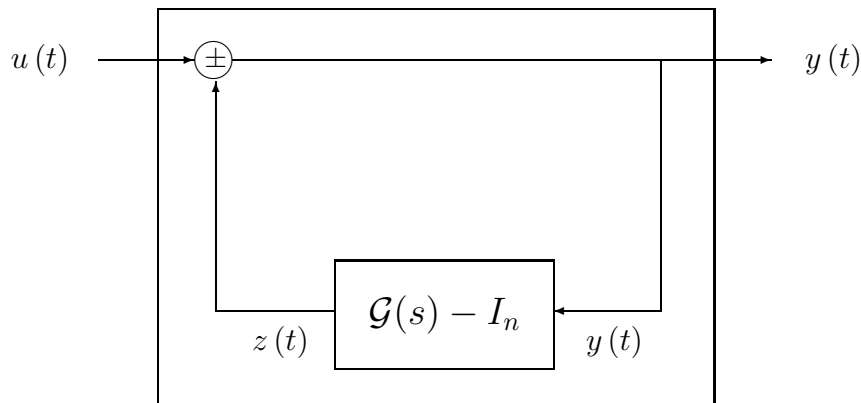


FIGURE 2.10 – Réalisation d'un système inverse

En effet on a

$$Y(s) = U(s) - (\mathcal{G}(s) - I_n)Y(s)$$

soit

$$U(s) = \mathcal{G}(s)Y(s) \iff Y(s) = \mathcal{G}_i(s)U(s)$$

Le système inverse peut être alors déterminé à partir de la représentation d'état du système dont la fonction de transfert est  $\mathcal{G}(s) - I_n$  et de la relation entre  $z(t)$  et  $y(t)$ , soit

$$S\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{V} \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + Gy(t) \\ z(t) = Hx(t) + (E - I_n)y(t) \\ y(t) = u(t) - z(t) \end{array} \right.$$

En éliminant la variable  $z(t)$  entre les deux dernières équations, on obtient  $Ey(t) = -Hx(t) + u(t)$ . Et si la matrice  $E$  est inversible, alors on peut en déduire aisément une représentation d'état du système inverse

$$\text{SIN}\mathcal{V} \begin{cases} \rho x(t) = (F - GE^{-1}H)x(t) + GE^{-1}u(t) \\ y(t) = -E^{-1}Hx(t) + E^{-1}u(t) \end{cases}$$

On aura alors

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \rightarrow \mathcal{G}^{-1}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F - GE^{-1}H & GE^{-1} \\ \hline -E^{-1}H & E^{-1} \end{array} \right)$$

**Remarque 2.13** On peut vérifier aisément que cette caractérisation reste valable dans le cas des systèmes qui ne sont pas nécessairement carrés pourvu que la matrice  $E$  admet une inverse à droite (resp. à gauche), i.e.  $\exists E^d \in \mathbb{R}^{m \times p} / EE^d = I_p$  (resp.  $\exists E^g \in \mathbb{R}^{p \times m} / E^gE = I_m$ ). On aura alors

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \rightarrow \mathcal{G}^i(s) = \left( \begin{array}{c|c} F - GE^iH & GE^i \\ \hline -E^iH & E^i \end{array} \right)$$

$E^i$  désigne l'inverse disponible de la matrice  $E$ , soit  $E^{-1}$ ,  $E^d$  ou  $E^g$ . En effet, considérons le cas où la matrice  $E$  admet une inverse à droite, alors on aura

$$\mathcal{G}(s)\mathcal{G}^d(s) = \left( \begin{array}{cc|c} F & GE^dH & GE^d \\ 0 & F - GE^dH & -GE^d \\ \hline H & EE^dH & EE^d \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} F & GE^dH & GE^d \\ 0 & F - GE^dH & -GE^d \\ \hline H & H & I_p \end{array} \right)$$

Et en effectuant un changement de base défini par la matrice  $T = \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$  sur le système  $\mathcal{G}(s)\mathcal{G}^d(s)$ , on obtient

$$\mathcal{G}(s)\mathcal{G}^d(s) = \left( \begin{array}{cc|c} F & 0 & 0 \\ 0 & F - GE^dH & -GE^d \\ \hline H & 0 & I_p \end{array} \right) = I_p$$

Ce résultat peut être transposé par dualité au cas où la matrice  $E$  admet une inverse à gauche.

**Le troisième ensemble concerne la commande avec retour d'état et l'injection de sortie qui sont respectivement définis à partir des opérations suivantes**

$$\text{SYS} \left\{ \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \right\} \rightarrow \text{SCRE} \left\{ \left( \begin{array}{c|c} F - GK & G \\ \hline H - EK & E \end{array} \right) \right\}$$

et

$$\text{SYS} \left\{ \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \right\} \rightarrow \text{SIS} \left\{ \left( \begin{array}{c|c} F - MH & G - ME \\ \hline H & E \end{array} \right) \right\}$$

où  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  désignent respectivement le gain de commande avec retour d'état et d'injection de sortie. La dualité entre la commande avec retour d'état et l'injection de la sortie peut être naturellement mise en exergue à partir des faits suivants.

F1. Comme le dual du système de commande avec retour d'état est donné par

$$SCR\mathcal{E} \left\{ \left( \frac{F - GK}{H - EK} \middle| \frac{G}{E} \right) \right\} \longrightarrow DSCR\mathcal{E} \left\{ \left( \frac{F^T - K^T G^T}{G^T} \middle| \frac{H^T - K^T E^T}{E^T} \right) \right\}$$

on peut en déduire que le dual du système de commande avec retour d'état sur le dual du système est donné par

$$SCR\mathcal{E}\mathcal{D} \left\{ \left( \frac{F^T - H^T K_d}{G^T - E^T K_d} \middle| \frac{H^T}{E^T} \right) \right\} \longrightarrow DSCR\mathcal{E}\mathcal{D} \left\{ \left( \frac{F - K_d^T H}{H} \middle| \frac{G - K_d^T E}{E} \right) \right\}$$

Il apparaît alors clairement que le concept d'injection de sortie peut être obtenu à partir du dual du concept de commande avec retour d'état sur le dual du système, soit

$$SIS = \left( DSCR\mathcal{E}\mathcal{D} \right)_{K_d^T=M}$$

F2. Comme l'injection de sortie sur le dual du système est donnée par

$$DSYS \left\{ \left( \frac{F^T}{G^T} \middle| \frac{H^T}{E^T} \right) \right\} \longrightarrow SIS\mathcal{D} \left\{ \left( \frac{F^T - M_d G^T}{G^T} \middle| \frac{H^T - M_d E^T}{E^T} \right) \right\}$$

et que le dual du système obtenu par une injection de sortie à partir du dual du système est donné par

$$SIS\mathcal{D} \left\{ \left( \frac{F^T - M_d G^T}{G^T} \middle| \frac{H^T - M_d E^T}{E^T} \right) \right\} \longrightarrow DSIS\mathcal{D} \left\{ \left( \frac{F - G M_d^T}{H - E M_d^T} \middle| \frac{G}{E} \right) \right\}$$

on peut postuler naturellement que le concept de commande avec retour d'état peut être obtenu à partir du dual du concept d'injection de sortie sur le dual du système, soit

$$SCR\mathcal{E} = \left( DSIS\mathcal{D} \right)_{M_d^T=K}$$

La dualité entre les concepts de commande avec retour d'état et d'injection de sortie est judicieusement exploitée pour alléger le développement fondamental et les outils de synthèse.

**Remarque 2.14** Les trois opérations élémentaire sont vitales pour la conception des systèmes de commande. La composition des systèmes est impérative pour la compensation des perturbations et la précision. Quant aux autres opérations, elles permettent de formuler convenablement toutes les problématiques de synthèse et de mise ne oeuvre associées.

Ces bonus seront particulièrement mis en exergue aux chapitres suivants. La dualité est potentiellement utilisée pour des considérations pédagogiques, notamment le développement d'une approche déterministe pour les synthèses optimales (voir chapitres 8 et 10).

## 2.6 Éléments de réalisation

La diversité des représentations d'un système est un atout pour apprécier aisément leurs propriétés fondamentales. Cette aisance peut être confortée par une maîtrise des techniques de passage d'une représentation à l'autre, en l'occurrence les concepts de factorisation et de réalisation et le calcul opérationnel comme l'indique la figure 2.11. Le concept de factorisation (resp. le calcul opérationnel) a été vigoureusement développé dans l'annexe B (resp. peut être effectué en utilisant les résultats A.6 et A.14). Quant au problème de réalisation, il a été développée d'une manière compréhensible dans les prouesses pédagogiques reconnues de notre communauté ([15], [42], [46], [70], [89]).

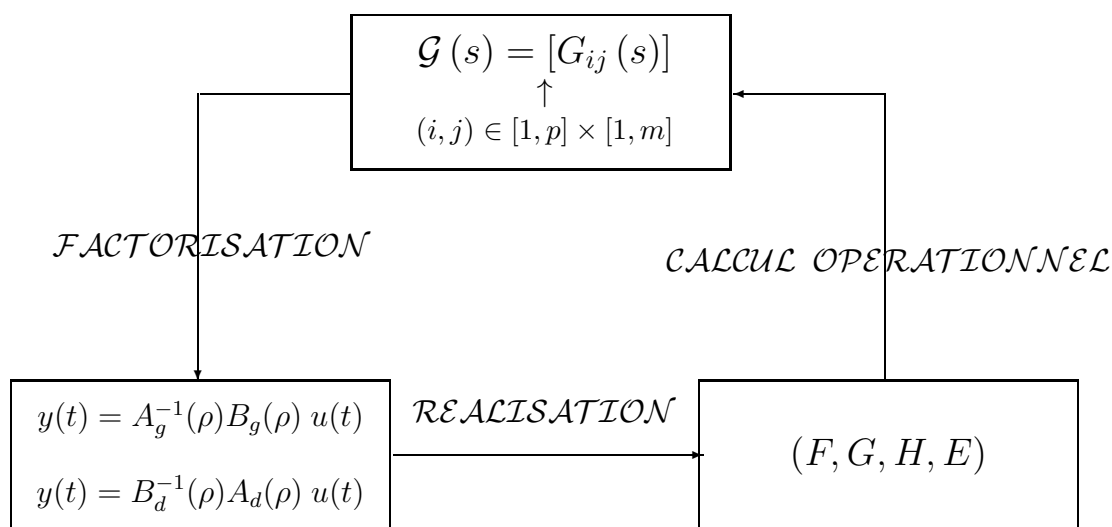


FIGURE 2.11 – Relations entre les modèles paramétriques d'un système

Dans ce qui suit, on traitera six problèmes judicieusement choisis pour une meilleure perception de la problématique de réalisation. Les trois premiers problèmes concernent les systèmes monovariables, alors que les trois derniers sont consacrés aux systèmes multivariables.

**Systèmes monovariables.** Comme la représentation d'état est plurielle, on se focalisera sur des réalisations canoniques qui sont principalement motivées par des considérations pédagogiques, en l'occurrence une simplicité remarquable aussi bien du point de vue de l'analyse que du point de vue de la synthèse. On considérera d'abord le cas des systèmes décrit par la fonction de transfert d'ordre trois

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (2.55)$$

pour mieux apprécier la démarche avant de l'étendre naturellement au cas des fonctions de transfert d'ordre  $n$ .

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.56)$$

On peut déterminer aisément deux réalisations d'état équivalentes et en déduire les réalisations d'état d'un système d'ordre  $n$ .

**La première réalisation** est issue de la représentation d'état partiel 2.16 que l'on peut récrire comme suit dans le cas considéré

$$\begin{aligned}\rho^3 z(t) &= -a_1 \rho^2 z(t) - a_2 \rho z(t) - a_3 z(t) + u(t) \\ y(t) &= b_o \rho^3 z(t) + b_1 \rho^2 z(t) + b_2 \rho z(t) + b_3 z(t)\end{aligned}\tag{2.57}$$

Cette forme suggère de définir un vecteur d'état à partir de la variable  $z(t)$  comme suit

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 z(t) \\ \rho z(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

En effet, compte tenu de la représentation d'état partiel 2.57, on obtient

$$\begin{aligned}\rho x_{c1}(t) &= -a_1 \rho^2 z(t) - a_2 \rho z(t) - a_3 z(t) + u(t) \\ &= -a_1 x_{c1}(t) - a_2 x_{c2}(t) - a_3 x_{c3}(t) + u(t) \\ \rho x_{c2}(t) &= x_{c1}(t) \\ \rho x_{c3}(t) &= x_{c2}(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}y(t) &= b_o \rho^3 z(t) + b_1 \rho^2 z(t) + b_2 \rho z(t) + b_3 z(t) \\ &= b_o (u(t) - a_1 x_{c1}(t) - a_2 x_{c2}(t) - a_3 x_{c3}(t)) + b_1 x_{c1}(t) + b_2 x_{c2}(t) + b_3 x_{c3}(t) \\ &= (b_1 - b_o a_1) x_{c1}(t) + (b_2 - b_o a_2) x_{c2}(t) + (b_3 - b_o a_3) x_{c3}(t) + b_o u(t)\end{aligned}$$

Le système peut alors décrit par les équations d'état et de sortie

$$\begin{cases} \rho x_c(t) = F_c x_c(t) + G_c u(t) \\ y(t) = H_c x_c(t) + E_c u(t) \end{cases}$$

où  $(F_c, G_c, H_c, E_c)$  est une réalisation du système, dite forme canonique commandable, donnée par

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_c^T = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ b_3 - b_o a_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_c = b_o$$

L'appellation forme canonique commandable est justifiée par le fait que la paire  $(F_c, G_c)$  est commandable : il est toujours possible de déterminer une séquence de commande admissible qui permet de réaliser une transition d'état arbitraire en temps fini. Quant à l'appellation état partiel, elle est naturellement motivée par le fait que  $z(t)$  est une variable d'état du système.

En adoptant la même approche d'état partiel, on peut déduire que la forme canonique commandable associée à la fonction de transfert (2.56) est donnée par

$$\mathcal{FCC} \begin{cases} \rho x_c(t) = F_c x_c(t) + G_c u(t) \\ y(t) = H_c x_c(t) + E_c u(t) \end{cases}\tag{2.58}$$

avec

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}, G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, H_c^* = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ \vdots \\ b_n - b_o a_n \end{bmatrix} \text{ et } E = b_o \quad (2.59)$$

**La seconde réalisation d'état** est issue de description (2.17) que l'on peut récrire comme suit dans le cas considéré

$$y(t) = \rho^{-1}((-a_1 y(t) + b_1 u(t))) + \rho^{-1}((-a_2 y(t) + b_2 u(t)) \\ + \rho^{-1}(-a_3 y(t) + b_3 u(t))) + b_o u(t)$$

Ce système comporte trois intégrateurs dont les sorties peuvent être considérées comme des variables d'état que l'on peut définir à partir de la description (2.17) du système comme suit

$$x_{o1}(t) = \rho^{-1} \left( \left( \left( -a_1 y(t) + b_1 u(t) \right) + \rho^{-1} \left( -a_2 Y(s) + b_2 U(s) \right) \dots \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \dots \dots + \rho^{-1} \left( -a_3 y(t) + b_3 u(t) \right) \right) \right) \\ x_{o2}(t) = \rho^{-1} \left( \left( \left( -a_2 y(t) + b_2 u(t) \right) + \rho^{-1} \left( -a_3 y(t) + b_3 u(t) \right) \right) \right) \\ x_{o3}(t) = \rho^{-1} \left( -a_3 y(t) + b_3 u(t) \right)$$

avec

$$y(t) = x_{o1}(t) + b_o u(t)$$

En substituant l'expression ci dessus de la sortie du système dans les équations de ses variables d'état, on obtient

$$\rho x_{o1}(t) = -a_1 x_{o1}(t) + x_{o2}(t) + (b_1 - b_o a_1) u(t) \\ \rho x_{o2}(t) = -a_2 x_{o1}(t) + x_{o3}(t) + (b_2 - b_o a_2) u(t) \\ \rho x_{o3}(t) = -a_3 x_{o1}(t) + (b_3 - b_o a_3) u(t)$$

avec

$$y(t) = x_{o1}(t) + b_o u(t)$$

Le système peut alors décrit par les équations d'état et de sortie

$$\begin{cases} \rho x_o(t) = F_o x_o(t) + G_o u(t) \\ y(t) = H_o x_o(t) + E_o u(t) \end{cases}$$

où  $(F_o, G_o, H_o, E_o)$  est une réalisation du système, dite forme canonique observable, donnée par

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_o = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ b_3 - b_o a_3 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0 \ 0] \text{ et } E = b_o$$

L'appellation forme canonique observable est justifiée par le fait que la paire  $(H_o, F_o)$  est observable : on peut toujours reconstruire l'état initial du système à partir de son comportement d'entrée-sortie sur un intervalle de temps fini.

En adoptant la même approche, on peut déduire que la forme canonique observable associée à un système d'ordre  $n$  est donnée par

$$FCCO \begin{cases} \rho x_o(t) = F_o x_o(t) + G_o u(t) \\ y(t) = H_o x_o(t) + E_o u(t) \end{cases} \quad (2.60)$$

avec

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & \\ -a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, G_o = \begin{bmatrix} b_1 - b_o a_1 \\ b_2 - b_o a_2 \\ \vdots \\ b_n - b_o a_n \end{bmatrix}, H_o^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } E = b_o \quad (2.61)$$

**La forme modale** est une représentation d'état que l'on peut déterminer à partir d'une décomposition en éléments simples de sa fonction de transfert. On traite le cas où tous les pôles de la fonction de transfert sont simples et réels, les autres cas pourraient être traités d'une manière autonome pour mieux apprécier leur complexité. Pour ce faire, considérons le cas de la fonction de transfert (2.56) avec

$$A(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } i \neq j \implies \lambda_i \neq \lambda_j$$

Comme tous les pôles de la fonction de transfert sont simples et réels, on peut la décomposer en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \gamma_o + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{s - \lambda_i} \text{ avec } \gamma_o \in \mathbb{R} \text{ et } \gamma_i \in \mathbb{R}^*$$

Et si l'on pose

$$\gamma_o = b_o, \quad \gamma_i = h_i g_i \text{ et } X_i(s) = \frac{h_i g_i}{s - \lambda_i} U(s) \text{ pour tout } i \in [1, n],$$

alors la sortie du système peut se récrire comme suit

$$Y(s) = b_o U(s) + \sum_{i=1}^n h_i X_i(s) g_i$$

Cette expression suggère de définir des variables d'état comme suit

$$\rho x_i(t) = \lambda_i x_i(t) + g_i u(t) \text{ pour tout } i \in [1, n]$$

Ceci nous amène naturellement à la réalisation d'état modale

$$\mathcal{FM} \begin{cases} \rho x_m(t) = F_m x_m(t) + G_m u(t) \\ y(t) = H_m x_m(t) + E_m u(t) \end{cases}$$

avec

$$F_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad G_m = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$H_m = [ h_1 \quad \dots \quad h_i \quad \dots \quad h_n ] \quad \text{et} \quad E_m = b_o$$

**Systèmes multivariables.** Deux approches ont été adoptées pour traiter le problème de réalisation dans le cas des systèmes multivariables. La première approche consiste tout simplement à réaliser chacun des éléments de la fonction de transfert et combiner convenablement toutes ces réalisations pour former une réalisation d'état du système. A titre illustratif, considérons la fonction de transfert donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(s) & \mathcal{G}_2(s) \\ \mathcal{G}_3(s) & \mathcal{G}_4(s) \end{pmatrix}$$

où chaque élément  $\mathcal{G}_i(s)$  est une fonction de transfert dont on peut déterminer une réalisation d'état en utilisant l'une des démarches adoptées dans le cas des systèmes monovariables, doit

$$\mathcal{G}_i(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_i & G_i \\ \hline H_i & E_i \end{array} \right)$$

On peut alors en déduire une réalisation d'état de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{cccc|cc} F_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & F_3 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_4 & 0 & G_4 \\ \hline H_1 & H_2 & 0 & 0 & E_1 & H_2 \\ 0 & 0 & H_3 & H_4 & E_3 & H_4 \end{array} \right)$$

L'ordre d'une telle réalisation n'est généralement pas minimal ; elle peut être réduite en éliminant les modes qui ne sont pas accessibles à l'entrée et/ou percevables en sortie.



La seconde approche permet de déterminer directement une réalisation d'état et sera illustrée au travers de deux exemples. **Le premier exemple** concerne le cas des fonctions de transfert données par

$$\mathcal{G}(s) = [G_{ij}(s)] = B(s) (A(s)I_m)^{-1}$$

où  $A(s)$  est le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions rationnelles  $G_{ij}(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$  respectivement donnés par

$$A(s) = s^r + a_1s^{r-1} + \dots + a_i s^{r-i} + \dots + a_{r-1}s + a_r \in \mathbb{R}[s]$$

$$B(s) = B_0s^r + B_1s^{r-1} + \dots + B_i s^{r-i} + \dots + B_{r-1}s + B_r \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$$

On peut vérifier aisément que

$$F = \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_m \\ 0_m & & & 0_m & I_m \\ -a_r I_m & \dots & \dots & \dots & -a_1 I_m \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0_m \\ \vdots \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$H = ( B_r - a_r B_0 \quad B_{r-1} - a_{r-1} B_0 \quad \dots \quad B_1 - a_1 B_0 ) \quad \text{et} \quad E = B_0$$

est une réalisation d'état de  $\mathcal{G}(s)$ . Pour ce faire, posons

$$\mathcal{X}(s) = (sI_{mr} - F)^{-1} G \triangleq \text{diag}(\mathcal{X}_i(s)) \quad \text{avec} \quad \mathcal{X}_i(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$$

On aura alors

$$(sI_{mr} - F) \mathcal{X}(s) = G$$

soit

$$\mathcal{X}_{i+1}(s) = s\mathcal{X}_i(s) \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (2.63)$$

et

$$s\mathcal{X}_r(s) + a_{r-1}\mathcal{X}_1(s) + \dots + a_0\mathcal{X}_r(s) = I_m \quad (2.64)$$

Et en utilisant (2.63) pour récrire (2.64) en fonction de  $\mathcal{X}_1(s)$ , on trouve

$$\mathcal{X}_1(s) = \frac{1}{A(s)} I_m \quad (2.65)$$

et donc

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{A(s)} \begin{pmatrix} I_m \\ zI_m \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{r-1}I_m \end{pmatrix} I_m \quad (2.66)$$

Ainsi, on aura bien

$$H\mathcal{X}(s) + B_o = H \frac{1}{A(s)} \begin{pmatrix} I_m \\ zI_m \\ \vdots \\ z_{r-1}I_m \end{pmatrix} I_m + \frac{A(s)}{A(s)} B_o = H (sI_{nm} - F)^{-1} G + E = \mathcal{G}(s)$$

Il apparaît clairement que la réalisation d'état obtenue n'est pas minimale mais elle est néanmoins commandable.

Quant au second exemple, il concerne le cas des fonction de transfert données par

$$\mathcal{G}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

où

$$N(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s) \text{ et } D(s) = \prod_{i=1}^r (s - \mu_i) \text{ avec } \mu_i \in \mathbb{R} \text{ et } \mu_i = \mu_j \implies i = j$$

On peut alors décomposer la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(s) = E + \sum_{i=1}^r \frac{\Gamma_i}{s - \mu_i}$$

Et cette décomposition suggère naturellement une réalisation d'état minimale de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{ccc|c} \mu_1 I_{n_1} & & & G_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mu_r I_{n_r} & G_r \\ \hline H_1 & \dots & H_r & E \end{array} \right)$$

où  $G_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$  et  $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$  sont telles que  $\Gamma_i = H_i G_i$  avec  $n_i = \text{rang}(\Gamma_i)$ .

Dans le cas où les racines du polynôme  $D(s)$  sont complexes et non nécessairement distinctes, on peut élaborer une réalisation minimale en utilisant une décomposition adéquate de la fonction de transfert. On suggère de traiter quelques exemples spécifiques pour se convaincre.

**Exemple 2.7** On se propose de déterminer la réalisation de Gilbert de la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{cc} \frac{2}{s(s+2)} & \frac{-3}{(s+2)(s+5)} \\ -2 & \frac{5}{s+5} \\ \hline (s+3)(s+5) & s+5 \end{array} \right)$$

Notons d'abord que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+5)} \begin{pmatrix} 2(s+3)(s+5) & -3s(s+3) \\ -2s(s+2) & 5s(s+2)(s+3) \end{pmatrix}$$

que l'on peut décomposer en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(s) = E + \frac{1}{s+2} \Gamma_2 + \Gamma_3 \frac{1}{s+3} + \Gamma_4 \frac{1}{s+5}$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1) = H_1 G_1$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \ 0) = H_2 G_2$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = H_3 G_2$$

La réalisation de Gilbert est alors donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{ccccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

puisque les ordres de multiplicité des modes de la matrices d'état sont respectivement donnés par  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  et  $n_3 = 2$ .

## 2.7 Modélisation d'une suspension

Les études des suspensions de véhicules sont essentiellement basées sur un système masse-ressort que l'on peut représenter comme l'indique la figure 2.12. Compte tenu du principe fondamental de la physique et des notations considérées, on a

$$SUSP \begin{cases} m_1 \rho^2 x_c(t) & = -\beta_1 \rho (x_c(t) - x_s(t)) - \kappa_1 (x_c(t) - x_s(t)) + f(t) \\ m_2 \rho^2 x_s(t) & = \beta_1 \rho (x_c(t) - x_s(t)) + \kappa_1 (x_c(t) - x_s(t)) \\ & -\beta_2 \rho (x_s(t) - w(t)) - \kappa_1 (x_s(t) - w(t)) - f(t) \end{cases} \quad (2.67)$$

où  $x_c(t)$  (resp.  $x_s(t)$ ) représente la position du châssis (resp. de l'axe de la roue) par rapport à la position de repos,  $m_1$  (resp.  $m_2$ ) n'est autre que la masse du châssis (resp. de la suspension),  $\beta_1$  et  $\beta_2$  (resp.  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ ) désignent les coefficients d'amortissement (resp. de raideur) de la suspension et du pneu de la roue,  $f(t)$  est une commande en force générée par un servo-vérin et  $w(t)$  représente les perturbations issues du profil de la route, notamment les trous, les bosses, le revêtement défectueux et le passage sur un trottoir que l'on peut approximer raisonnablement par un échelon.

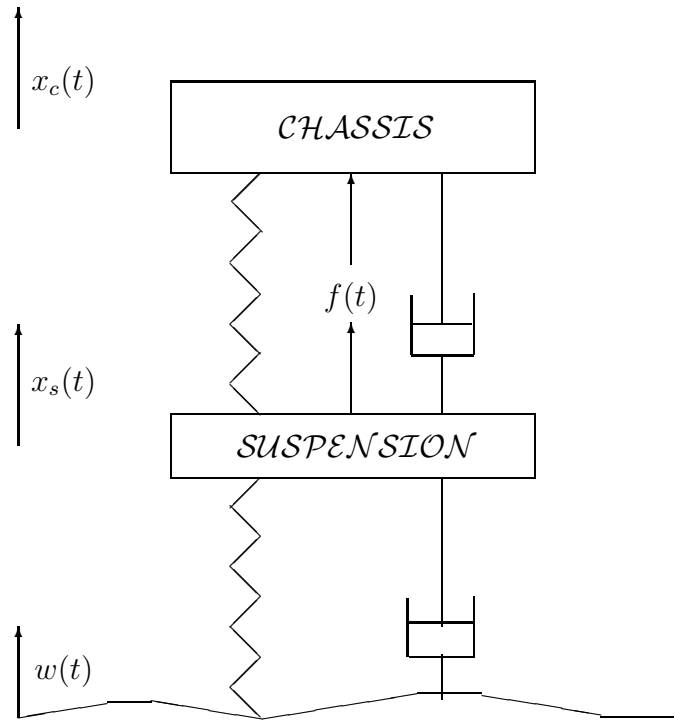


FIGURE 2.12 – Suspension

Une bonne suspension se distingue par une bonne tenue de route et un comportement relativement bien amorti du châssis du véhicule. Et comme la distance  $x_c(t) - w(t)$  n'est pas mesurable et que la déformation  $x_s(t) - w(t)$  est relativement faible, on peut considérer la différence  $x_c(t) - x_s(t)$  comme un bon quantificateur des performances de la suspension.

On peut élaborer aisément une représentation d'état de la suspension du véhicule en choisissant ses variables d'état et d'entrée-sortie comme suit

$$x(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c(t) \\ \rho x_c(t) \\ x_s(t) \\ \rho x_s(t) - \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} w(t) \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

$$u(t) \triangleq \begin{pmatrix} f(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) \triangleq x_c(t) - x_s(t) \quad (2.69)$$

En effet, compte tenu des équations (2.67) de la physique et des définitions des variables d'état et d'entrée-sortie de la suspension, on aura

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (2.70)$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa_1}{m_1} & -\frac{\beta_1}{m_1} & \frac{\kappa_1}{m_1} & \frac{\beta_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1}{m_2} & \frac{\kappa_1}{m_2} & -\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{m_2} & -\frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

$$G \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\kappa_1}{m_2} & \frac{\beta_1}{m_2} \\ 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{\kappa_2}{m_2} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$H \triangleq (1 \ 0 \ -1 \ 0) \quad (2.73)$$

La fonction de transfert de la suspension peut être aisément déterminée à partir d'une applications de la transformée de Laplace à ses équations différentielles (2.67) ou de sa réalisation d'état  $(F, G, H)$  (2.71)-(2.73). Elle est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s) &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_u(s) & \mathcal{G}_w(s) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{B(s)}{A(s)} & \frac{E(s)}{A(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_o s^2 + b_1 s + b_2}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_1 + a_4} & \frac{e_o s^3 + e_1 s^2}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_1 + a_4} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.74)$$

où les paramètres  $\{a_i\}_{i \in [0,4]}$ ,  $\{b_i\}_{i \in [0,2]}$  et  $\{e_i\}_{i \in [0,1]}$  sont respectivement donnés à partir des paramètres physiques  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $m_1$  et  $m_2$  comme suit

$$a_1 = \frac{\beta_1}{m_2} + \frac{\beta_1}{m_2} + \frac{\beta_1}{m_1}, \quad a_2 = \frac{\kappa_1}{m_2} + \frac{\kappa_1}{m_2} + \frac{\kappa_1}{m_1} + \frac{\beta_1 \beta_2}{m_1 m_2}, \quad a_3 = \frac{\beta_1 \kappa_2 + \beta_2 \kappa_1}{m_1 m_2} \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{m_1 m_2}$$

$$b_o = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \quad b_1 = \frac{\beta_2}{m_1 m_2} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{\kappa_2}{m_1 m_2}$$

$$e_o = -\frac{\beta_2}{m_2} \quad \text{et} \quad e_1 = -\frac{\kappa_2}{m_2}$$

**Remarque 2.15**  $\mathcal{G}_u(s)$  (resp.  $\mathcal{G}_w(s)$ ) est la fonction de transfert qui relie l'entrée de la suspension (resp. les perturbations qui agissent sur la suspension) à la sortie de la suspension. Les deux zéros en zéro de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_w(s)$  permettent de réaliser une compensation asymptotique parfaite des perturbations dy type échelon et du type rampe.

## 2.8 Linearisation des systèmes

La conception des systèmes de commande est essentiellement réalisée à partir d'une famille de modèles linéaires qui permet de reproduire convenablement le comportement dynamique du système à commander dans sa zone de fonctionnement. Ces modèles sont élaborés à partir d'une linéarisation admissible d'un modèle de connaissances du système ou d'une approche de modélisation expérimentale ingénieuse. Les modèles de connaissance sont issus des lois allant de la physique à la chimie en passant par l'économie si besoin est. Quant aux approches expérimentales, elles sont particulièrement développées conformément au potentiel culturel disponible en matière de traitement du signal, d'optimisation et d'identification des systèmes, en l'occurrence les boîtes à outils de Matlab ou Scilab.

On présente dans ce qui suit le concept de linéarisation des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.75)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  désignent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont des fonctions différentiables. Pour ce faire, posons

$$z(t) \triangleq \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad g(x(t), u(t)) \triangleq \begin{pmatrix} f(x(t), u(t)) \\ h(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{z} \triangleq \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

Compte tenu du fait que la fonction  $g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  est différentiable, on peut l'approximer au voisinage de  $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n+m}$  à partir d'un développement de Taylor au premier ordre, soit

$$g(z) \simeq g(\bar{z}) + \frac{\partial g}{\partial z}(\bar{z}) (z - \bar{z})$$

avec

$$\frac{\partial g}{\partial z}(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) & \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) & \frac{\partial h}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \end{pmatrix}$$

Le système 2.75 peut être alors raisonnablement approximé, autour de point  $\bar{z}$ , par le système linéaire donné par les équations d'état et de sortie

$$\text{SYST} \begin{cases} \rho x(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})x(t) + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})u(t) \\ y(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})x(t) + \frac{\partial h}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})u(t) \end{cases}$$

qui n'est autre que le **système tangent** sous-jacent au point  $\bar{z}$ .

Et comme la linéarisation d'un système est généralement faite autour d'un point de fonctionnement défini par  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ , qui n'est autre qu'un état d'équilibre pourvu que  $\bar{u} = 0$ , on peut postuler que le système non linéaire (2.75) peut être raisonnablement approximé par le

système tangent qui lui est associé en son point de fonctionnement.

$$\text{SYST} \begin{cases} \rho x_v(t) = Fx_v(t) + Gu_v(t) \\ y_v(t) = Hx_v(t) + Eu_v(t) \end{cases} \quad (2.76)$$

où  $x_v(t)$ ,  $u_v(t)$  et  $y_v(t)$  désignent respectivement les variations de l'état, de l'entrée et de la sortie du système autour de son point de fonctionnement, i.e.

$$x_v(t) = x(t) - \bar{x}, \quad u_v(t) = u(t) - \bar{u} \quad \text{et} \quad y_v(t) = y(t) - \bar{y} \quad (2.77)$$

et  $(F, G, H, E)$  est une réalisation d'état du modèle linéaire tangent au point de fonctionnement considéré, soit

$$\begin{pmatrix} F & G \\ H & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) & \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) & \frac{\partial h}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Dans ce qui suit, on étudiera la modélisation de trois systèmes qui permettent d'illustrer la plupart des problèmes de commande rencontrés dans l'ingénierie des systèmes.

### 2.8.1 Réseaux hydrauliques

Les réseaux hydrauliques sont constitués d'un ensemble de réservoirs, de canalisations, de vannes, de pompes et de capteurs. Les réservoirs sont alimentés par des sources d'eau et reliés entre eux par des canalisations. Les vannes sont fondamentalement utilisées pour une meilleure gestion des apports en milieu urbain. Quant aux capteurs, ils sont essentiellement utilisés pour la mesure des niveaux d'eau dans certains réservoirs ou des débits de certaines canalisations. La modélisation des réseaux hydrauliques est communément réalisée en adoptant une approche compartimentale dont le compartiment essentiel peut être représenté comme l'indique la figure 2.13.

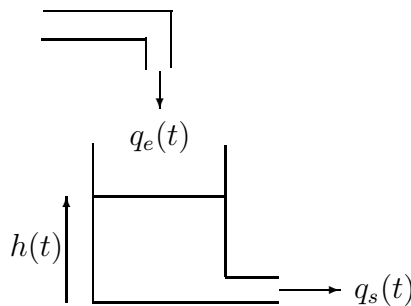


FIGURE 2.13 – Structure élémentaire

Il s'agit d'un réservoir cylindrique alimenté en eau, au travers d'une pompe et qui se déverse vers l'extérieur au travers d'un orifice. Ce système hydraulique élémentaire est décrit par l'équation différentielle de bilan volumique complétée par l'expression algébrique du débit de l'eau à la sortie du réservoir en vertu de la loi de Bernoulli, soit

$$\text{SHE} \begin{cases} \sigma \rho h(t) = q_e(t) - q_s(t) \\ q_s(t) = \kappa \sqrt{h(t)} \end{cases} \quad (2.79)$$

où  $\sigma$  désigne la section de base du réservoir,  $h(t)$  est le niveau d'eau dans le réservoir,  $q_e(t)$  et  $q_s(t)$  désignent respectivement le débit fourni par la pompe et le débit gravitaire à la sortie du réservoir et  $\kappa$  est le coefficient de restriction de la canalisation.

On distingue deux structures élémentaires des réseaux hydrauliques qui consistent en une cascade (resp. une série) de deux réservoirs identiques comme l'indique la figure 2.14 (resp. la figure 2.15).

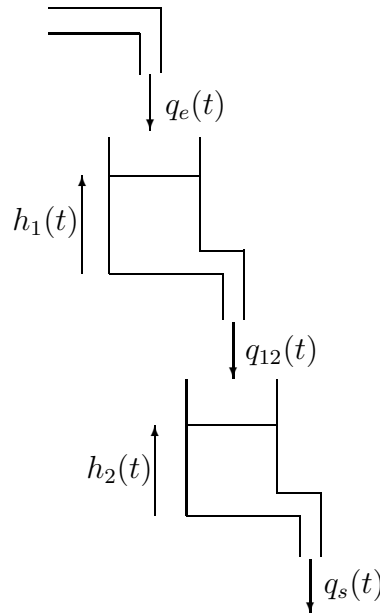


FIGURE 2.14 – Structure cascade

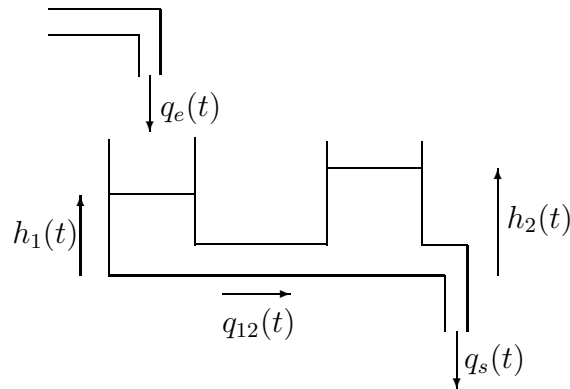


FIGURE 2.15 – Structure série

Les deux systèmes hydrauliques sont décrits par les mêmes équations modulo une expression différente du débit  $q_{12}$

$$\mathcal{CRH} \begin{cases} \sigma \rho h_1(t) = q_e - q_{12} \\ \sigma \rho h_2(t) = q_{12} - q_s \\ q_{12} = \kappa \sqrt{h_2(t)} \\ q_s = \kappa \sqrt{h_2(t)} \end{cases} \quad (2.80)$$



$$SRHR \begin{cases} \sigma \rho h_1(t) = q_e - q_{12} \\ \sigma \rho h_2(t) = q_{12} - q_s \\ q_{12} = \kappa \text{signe}(h_1(t) - h_2(t)) \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|} \\ q_s = \kappa \sqrt{h_2(t)} \end{cases} \quad (2.81)$$

où  $\kappa$  et  $\sigma$  désignent le coefficient de restriction et la surface de base de chacun des réservoirs.

Par ailleurs, le point de fonctionnement  $(\bar{q}_e, \bar{h}, \bar{q}_s)$  du compartiment élémentaire (2.79) est défini à partir de l'état d'équilibre défini par  $\rho h(t) = 0$  pour tout  $t$ , soit  $\bar{q}_s = \bar{q}_e = \kappa \sqrt{\bar{h}}$ . Et si l'on pose

$$q_{iv}(t) = q_e(t) - \bar{q}_e, \quad h_v(t) = h(t) - \bar{h} \quad \text{et} \quad q_{sv}(t) = q_s(t) - \bar{q}_s$$

Le comportement dynamique du système hydraulique (2.79) peut être alors approximé par le système linéaire

$$SHL \begin{cases} \sigma \rho h_v(t) = q_{ev}(t) - q_{sv}(t) \\ q_{sv}(t) = \kappa h_v(t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\kappa}{2\sqrt{\bar{h}}} \end{cases} \quad (2.82)$$

On retrouve ainsi l'hypothèse communément faite sur les systèmes hydrauliques pour obtenir directement un modèle linéaire, soit **le débit sortant d'un réservoir est proportionnel à son niveau d'eau**.

## 2.8.2 Pendule inversé

Le pendule inversé est un système mécanique constitué d'un pendule posé sur un chariot roulant, dans un état d'équilibre instable, au travers d'une articulation au centre de sa face supérieure comme l'indique la figure 2.16. Tous ceux qui ont tenté d'équilibrer une tige sur la pointe de leur doigt auront une meilleure perception de la complexité du problème de commande du pendule inversé qui constitue l'essence des problématiques de conduite des navires et des systèmes d'assistance pour la mobilité.

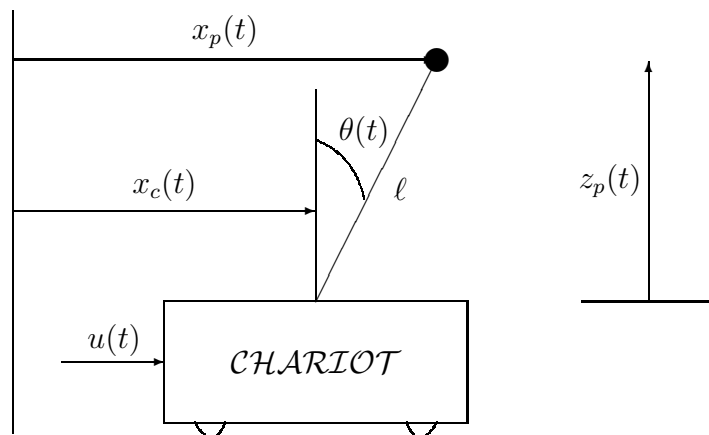


FIGURE 2.16 – Pendule inverse

Notons d'abord que les coordonnées du pendule sont reliées aux coordonnées du chariot comme

suit

$$x_p = x_c + l \sin(\theta) \quad \text{et} \quad z_p = l \cos(\theta) \quad (2.83)$$

et que le Lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L}(x_c, x_p, z_p) = \mathcal{E}_c(x_c, x_p) - \mathcal{E}_p(z_p) \quad (2.84)$$

avec

$$\mathcal{E}_c(x_c, x_p) = \frac{1}{2} m_c (\rho x_c)^2 + \frac{1}{2} m_p ((\rho x_p)^2 + (\rho z_p)^2) \quad (2.85)$$

$$\mathcal{E}_p(z_p) = m_p g z_p \quad (2.86)$$

où  $m_c$  et  $m_p$  désignent respectivement les masses du chariot et du pendule. Et compte tenu des relations (2.83) entre les coordonnées du pendule et du chariot, le Lagrangien du système peut se récrire comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_c, \theta) = & \frac{1}{2} (m_c + m_p) (\rho x_c)^2 \\ & + m_p l (\rho x_c) (\rho \theta) \cos(\theta) + \frac{1}{2} m_p l^2 (\rho \theta)^2 - m_p g l \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Les équations du pendule inversé peuvent être alors aisément obtenues à partir des équations d'Euler-Lagrange sous-jacentes, soit

$$\mathcal{EELPI} \left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\rho x_c)}(x_c, \theta) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(x_c)}(x_c, \theta) = u \\ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\rho \theta)}(x_c, \theta) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\theta)}(x_c, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (2.88)$$

Et compte tenu des expressions (2.84) et (2.87) du Lagrangien du système, on obtient

$$\mathcal{EELPI} \left\{ \begin{array}{l} (m_c + m_p) \rho^2 x_c + m_p l (\rho^2 \theta) \cos(\theta) - m_p l (\rho \theta)^2 \sin(\theta) = u \\ m_p l (\rho^2 x_c) \cos(\theta) + m_p l^2 (\rho^2 \theta) - m_p g l \sin(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (2.89)$$

où  $u$  désigne la force exercée sur le chariot.

Par ailleurs, on peut récrire ces deux équations différentielles de second ordre sous la forme d'une représentation d'état du système modulo une définition adéquate des variables d'état et de sortie, soit

$$x(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c(t) \\ \theta(t) \\ \rho x_c(t) \\ \rho \theta(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

En effet, les équations (2.92) d'Euler-Lagrange du pendule inversé peuvent bien se récrire sous

la forme d'une représentation d'état

$$\mathcal{EELPI} \begin{cases} \rho x(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.91)$$

avec

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m_p \ell \sin(x_2) - m_p g \sin(x_2) \cos(x_2) + \ell u}{\ell (m_c + m_p \sin^2(x_2))} \\ \frac{m_p \ell x_4^2 \sin(x_2) \cos(x_2) + (m_c + m_p) g \sin(x_2) - \cos(x_2) u}{\ell (m_c + m_p \sin^2(x_2))} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad (2.93)$$

La linéarisation du pendule inversé est effectuée autour de l'origine avec une force identiquement nulle, soit  $\bar{x} = 0$  et  $\bar{u} = 0$ , ce qui nous amène au modèle linéaire

$$\mathcal{PIL} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (2.94)$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p g}{m_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m_c + m_p) g}{m_c \ell} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ \frac{1}{m_c \ell} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

### 2.8.3 Satellite orbital

Le comportement dynamique des satellites terrestres peut être obtenu à partir des lois de la physique

$$\mathcal{ST} \begin{cases} \rho r(t) = r(t)\omega^2(t) - \kappa \frac{1}{r^2(t)} + \frac{1}{m} u_1(t) \\ \rho \omega(t) = -2 \frac{\rho r(t)}{r(t)} \omega(t) + \frac{1}{mr^2(t)} u_2(t) \\ y(t) = r(t) - \varrho \end{cases} \quad (2.96)$$

où  $\{r(t)\}$  et  $\{\omega(t)\}$  désignent respectivement la distance du satellite par rapport au centre de

la terre et son altitude,  $\{\omega(t)\}$  désigne la vitesse angulaire du satellite sur son orbite,  $\{u_1(t)\}$  et  $\{u_2(t)\}$  sont respectivement la poussée radiale et la poussée tangentielle et  $m$  et  $\kappa$ ,  $m$  et  $\varrho$  ne sont autres que la masse du satellite et la constante de gravitation et le rayon de la terre.

Et si l'on pose

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \rho r(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = r(t) - \varrho \quad (2.97)$$

on aura

$$\mathcal{SAT} \begin{cases} \rho x(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.98)$$

où  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions différentiables respectivement définies par

$$f(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t)x_3^2(t) - \frac{\kappa}{x_1^2(t)} + \frac{1}{m}u_1(t) \\ -2\frac{x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \frac{1}{mx_1^2(t)}u_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

$$h(x(t)) = x_1(t) - \varrho$$

Les états d'équilibre du satellite sont obtenus pour une poussée radiale constante, i.e.  $u_1(t) = \bar{u}_1$  et une poussée tangentielle nulle telles que

$$\bar{u}_1 = \frac{\kappa m}{\bar{r}^2} - \bar{r}\bar{\omega}^2 m$$

Cette relation correspond à une orbite d'altitude constante  $\bar{h} = \bar{r} - \varrho$  parcourue avec une période de révolution constante  $\bar{\omega}$ . La linéarisation des équations (2.97)-(2.99) du satellite autour de l'orbite  $(\bar{r}, \bar{\omega})$  est alors donnée par

$$\mathcal{LSAT} \begin{cases} \rho x_v(t) = Fx_v(t) + Gu_v(t) \\ y_v(t) = Hx_v(t) - \varrho \end{cases} \quad (2.100)$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{\omega}^2 + 2\frac{\kappa}{\bar{r}^2} & 0 & 2\bar{r}\bar{\omega} \\ 0 & -2\frac{\bar{\omega}}{\bar{r}} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\bar{r}^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (1 \ 0 \ 0)$$

## 2.9 Systèmes linéaires variants dans le temps

Les systèmes linéaires variants dans le temps peuvent être convenablement décrits par la représentation d'état

$$\mathcal{SLVT} \begin{cases} \rho x(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + E(t)u(t) \end{cases} \quad (2.101)$$

où  $\{u(t)\} \in \mathbb{R}^m$  et  $\{y(t)\} \in \mathbb{R}^p$  représentent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $\{x(t)\} \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système et  $(F(t), G(t), H(t), E(t))$  est une réalisation d'état du système. Dans la plupart des applications, les matrices d'état, d'entrée et de sortie sont généralement continues par morceaux et bornées, i.e. les fonctions sous-jacentes  $f_{ij} : t \rightarrow f_{ij}(t)$ ,  $g_{ij} : t \rightarrow g_{ij}(t)$ ,  $h_{ij} : t \rightarrow h_{ij}(t)$  et  $e_{ij} : t \rightarrow e_{ij}(t)$  sont continues par morceaux et il existe des scalaires positifs finis  $\beta_f, \beta_g, \beta_h$  et  $\beta_e$  tels que

$$\|F(t)\| \leq \beta_f, \quad \|G(t)\| \leq \beta_g, \quad \|H(t)\| \leq \beta_h \quad \text{et} \quad \|E(t)\| \leq \beta_e \quad (2.102)$$

La matrice de transition de cette classe de système, qui n'est autre que la matrice de passage de l'instant  $\tau \in \mathbb{R}$  à l'instant  $t \in \mathbb{R}$ , pour une entrée identiquement nulle et que l'on désignera par  $\phi(t, \tau)$ , est caractérisée par les propriétés suivantes.

P1.  $\rho\phi(t, \tau) = F(t)\phi(t, \tau)$  pour tout  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$

P2.  $\phi(\tau, \tau) = I_n$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

P3.  $\phi(t, t^*, \tau) = \phi(t, t^*)\phi(t^*, \tau)$  pour tout  $(t, t^*, \tau) \in \mathbb{R}^3$

P4.  $\phi^{-1}(t, \tau) = \phi(\tau, t)$  pour tout  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$

**Remarque 2.16** . On recouvre naturellement l'expression de la matrice de transition dans le cas des systèmes linéaires invariants, soit

$$\phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)} \quad \text{pour tout } (t, \tau) \in \mathbb{R}^2$$

Un tel résultat peut être facilement obtenu en utilisant un développement en série de Taylor de la matrice de transition. En effet, on a

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho^k \phi(t))_{t=0} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (F^k \phi(t))_{t=0} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} F^k = e^{Ft}$$

Le résultat suivant précise les expressions des trajectoires d'état et de sortie du système en fonction de son état initial, sa séquence d'entrée.

**Résultat 2.9** Considérons le système linéaire variant dans le temps (2.101) et supposons que sa réalisation d'état est continue par morceaux. Alors les trajectoires d'état et de sortie sous-jacentes sont respectivement données par

$$\mathcal{TRES} \begin{cases} x(t) = \phi(t, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^t \phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = H(t)\phi(t, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^t H(t)\phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau + E(t)u(t) \end{cases} \quad (2.103)$$

**Preuve.** Conformément au principe de superposition, la solution générale de l'équation d'état

$$\rho x(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \quad \text{avec} \quad x(t_o) = x_o$$

est égale à la somme de la solution générale du système homogène

$$\rho x(t) = F(t)x(t) \quad \text{avec} \quad x(t_o) = x_o$$

et d'une solution particulière de l'équation

$$\rho x(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \quad \text{avec} \quad x(t_o) = 0$$

Or la solution générale du système homogène est donnée par

$$x(t) = \phi(t, t_o)x(t_o)$$

alors que la solution particulière peut être obtenue avec la méthode de variation des constantes qui consiste à considérer une solution de la forme

$$x(t) = \phi(t, t_o)\gamma(t) \quad \text{avec} \quad \gamma(t_o) = x(t_o) = 0$$

On aura alors

$$\rho x(t) = \rho \phi(t, t_o)\gamma(t) + \phi(t, t_o)\rho z(t) = F(t)\phi(t, t_o)z(t) + \phi(t, t_o)\rho \gamma(t)$$

Et compte tenu de l'équation du système considéré, on obtient

$$\rho \gamma(t) = \phi(t_o, t)G(t)u(t)$$

et donc

$$\gamma(t) = \gamma(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_o, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

La solution particulière recherchée est alors donnée par

$$x(t) = \phi(t, t_o)\gamma(t) = \int_{t_o}^{t_f} \phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

On retrouve bien les expressions (2.103) des trajectoires d'état et de sortie.

*CQFD*

## 2.10 Conclusion

*Ce chapitre est un tour d'horizon guidé sur les représentations des systèmes multivariables linéaires invariants dans le temps après un rappel sur les représentations usuelles des systèmes monovariables, en l'occurrence les réponses impulsionnelle et harmonique, l'équation différentielle et la fonction de transfert. La représentation d'état a été convenablement présentée pour mettre en exergue ses atouts (resp. ses relations) par rapport aux (resp. avec les) autres représentations, notamment la matrice système et la fonction de transfert. La matrice système (resp. fonction de transfert) sera essentiellement utilisée pour déterminer les zéros invariants (resp. les représentations polynomiales) du système. Le passage d'une fonction de transfert à une réalisation d'état a été traité dans des cas particuliers pour des considérations pédagogiques après un exercice vitale sur la composition des systèmes. Un focus sur la modélisation des systèmes a été fait pour mieux apprécier le concept de linéarisation tout en illustrant la notion de variables d'état. Une attention particulière a été accordée à la représentation des systèmes linéaires variants dans le temps et sera confortée dans les prochains chapitres en guise d'une introduction progressive à l'observation et la commande des systèmes linéaires variants dans le temps. Cet investissement fut une opportunité pour mieux apprécier la notion de matrice de transition.*

## 2.11 Problèmes

*On propose un ensemble de problèmes allant d'une évaluation autonome des connaissances acquises à une modélisation vigoureuse d'une classe de systèmes échantillonnés en passant par le confort de quelques remarques pertinentes.*

**Problème 2.1** *Considérons le système linéaire invariant dans le temps décrit la fonction de transfert*

$$\mathcal{G}(s) = \frac{s(s^2 + \omega^2)}{(s - \mu)^2 (s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \text{ avec } \omega > 0, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq \zeta < 1$$

*On demande de traiter les aspects suivants.*

- 1) *Donner la configuration pôles-zéros du système et étudier sa stabilité en fonction des scalaires  $\mu$  et  $\zeta$ .*
- 2) *Préciser la classe des entrées bloquées par le système.*
- 3) *Montrer que l'on peut déterminer une réalisation d'état du système à partir des réalisations d'état des systèmes décrits par les fonctions de transfert*

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{s}{(s - \mu)^2} \text{ et } \mathcal{G}_2(s) = \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

**Problème 2.2** *Considérons un système décrit par une fonction de transfert strictement propre  $\mathcal{G}(s)$  dont  $(F, G, H)$  est une réalisation minimale. Montrer que la cascade du système avec un dérivateur pur peut être décrite par les réalisation d'état données par*

$$\mathcal{G}_d(s) = s\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & FG \\ \hline H & HG \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline HF & HG \end{array} \right)$$

**Problème 2.3** Considérons le système de la figure 2.17 où les sous systèmes  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  sont respectivement décrits par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(s) = \frac{\beta(s - \zeta_1)(s - \zeta_2)}{s(s - \mu)}$$

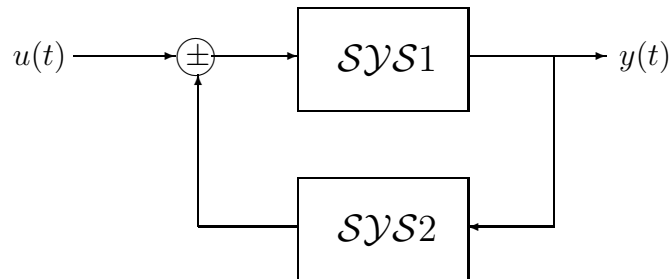


FIGURE 2.17 – Système

On demande de proposer un schéma de simulation analogique du système pour mieux appréhender ses variables pertinentes et donner ses diverses représentations tout en précisant la classe des entrées qui sont bloquées par le système.

**Problème 2.4** Montrer que la fonction de transfert des systèmes carrés systèmes, i.e.  $m = p$ , décrits par une réalisation  $(F, G, H)$  d'ordre  $n$  peut se récrire en fonction de leur matrice système  $\mathcal{M}_\sigma(s)$  comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\det(\mathcal{M}_\sigma(s))}{\det(sI_n - F)}$$

Et en déduire que le nombre de zéros du système est inférieur ou égal à  $n - m$  en précisant que l'égalité est vraie dans le cas d'un retard uniforme unitaire.

**Problème 2.5** Considérons les fonctions de transfert respectivement données par

$$\mathcal{G}_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2s+1}{(s+1)^2} & \frac{2}{(s+4)(s+2)} \\ \frac{s}{(s+1)} & \frac{s}{(s+1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)} & \frac{s}{(s+1)} \\ \frac{s}{(s+1)} & \frac{s}{s+2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_3(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{(s+3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{(s+4)^2} \\ \frac{s+2}{(s+5)^2} & \frac{s+1}{(s+5)^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_4(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{pmatrix}$$

On demande de déterminer les pôles et les zéros de ces fonctions de transfert ainsi que leurs directions et de proposer une factorisation polynomiale première à gauche (resp. première à droite) de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_3(s)$  (resp.  $\mathcal{G}_4(s)$ )



**Problème 2.6** Considérons un système décrit par une factorisation polynomiale première à droite

$$\mathcal{G}(s) = B_d(s)A_d^{-1}(s)$$

et supposons que la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  est de rang plein presque pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $z \in \mathbb{C}$  est un zéro du système si  $\text{rang}(B_d(z)) < \text{rangrang}(\mathcal{G}(s))$

**Problème 2.7** Considérons un système décrit par une factorisation polynomiale première à gauche

$$\mathcal{G}(s) = A_g^{-1}(s)B_g(s)$$

et supposons que la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  est de rang plein presque pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $z \in \mathbb{C}$  est un zéro du système si  $\text{rang}(B_g(z)) < \text{rangrang}(\mathcal{G}(s))$

**Problème 2.8** Déterminer une réalisation d'état du système inverse dans la cas où la fonction de transfert du système est inversible en utilisant directement le lemme d'inversion donné par le résultat A.6. On préciser la condition requise pour la faisabilité de l'inversion.

**Problème 2.9** Considérons la classe des systèmes caractérisée par

$$\mathcal{G} = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) / \exists E^g \in \mathbb{R}^{p \times m} / E^g E = I_m$$

Vérifier que le système inverse est caractérisé par

$$\mathcal{G}_g = \left( \begin{array}{c|c} F - GE^g H & GE^g \\ \hline -E^g H & E^g \end{array} \right)$$

**Problème 2.10** Montrer que le système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{FTS} \left\{ \mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \right.$$

avec

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \in \mathbb{R}[s]$$

$$B(s) = B_0 s^n + B_1 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s + B_n \in \mathbb{R}^{p \times 1}[s]$$

admet une réalisation d'état donnée par

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_c = [ B_1 - a_1 B_0 \quad B_2 - a_2 B_0 \quad \dots \quad B_n - a_n B_0 ] \quad \text{et} \quad E_c = B_0$$

**Problème 2.11** Montrer que le système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{FTS} \left\{ \mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \right.$$

avec

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \in \mathcal{R}[s]$$

$$B(s) = B_o s^n + B_1 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s + B_n \in \mathcal{R}^{1 \times m}[s]$$

admet une réalisation d'état donnée par

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ & I_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ -a_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_o = \begin{bmatrix} B_1 - a_1 B_o \\ B_2 - a_2 B_o \\ \dots \\ B_n - a_n B_o \end{bmatrix}$$

$$H_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \text{et} \quad E_o = B_o$$

**Problème 2.12** Montrer que la dimension de toute réalisation d'une fonction de transfert strictement propre  $G(s)$  est supérieure ou égale à son degré de Smith-Mc Millan.

**Problème 2.13** Le moteur à courant continu qui entraîne une charge constituée d'une inertie et d'un frottement visqueux est un exemple relativement populaire en automatique. La commande des moteurs à courant continu est généralement effectuée par la tension d'induit comme le montre la figure 2.18.

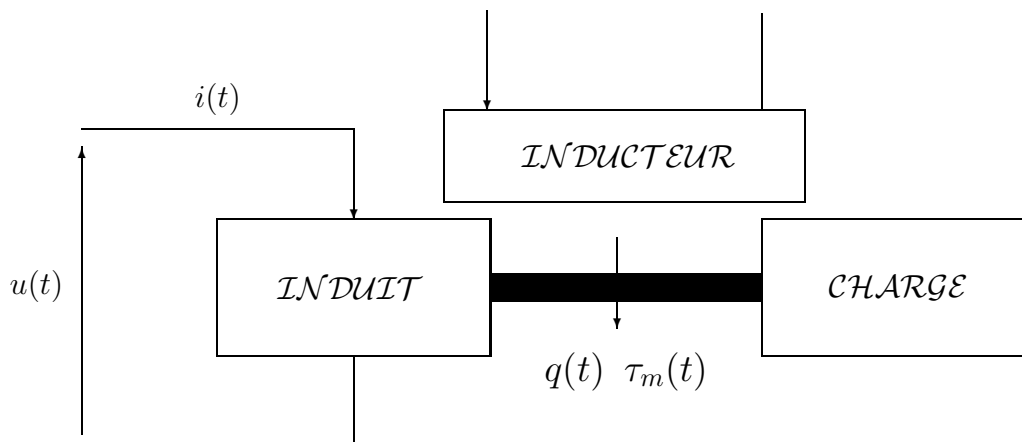


FIGURE 2.18 – Moteur à courant continu commandé par la tension d'induit

Le modèle du moteur peut être élaboré à partir de ses équations électrique et mécanique respectivement données par

$$u(t) = L\rho i(t) + Ri(t) + e(t) \text{ avec } e(t) = \alpha\phi\rho q(t)$$

et

$$J\rho^2 q(t) = \tau_m(t) - \tau_f(t) - \tau_r(t) \text{ avec } \tau_m(t) = \beta\phi i(t) \text{ et } \tau_f(t) = f\rho q(t)$$

où  $\{i(t)\}$ ,  $\{u(t)\}$ ,  $\{e(t)\}$  et  $\{q(t)\}$  désignent respectivement le courant d'induit, la tension aux bornes de l'induit, la force contre-électromotrice du moteur et la position angulaire du moteur,  $\{\tau_m(t)\}$ ,  $\{\tau_f(t)\}$  et  $\{\tau_r(t)\}$  désignent respectivement le couple produit par le moteur, le couple des frottements visqueux et le couple résistant,  $L$  et  $R$  sont l'induction et la résistance de l'induit,  $\phi$  est le flux magnétique du stator,  $J$  représente l'inertie propre du moteur ramenée à l'arbre du moteur et augmentée par l'inertie des organes de transmission,  $\alpha\phi$ ,  $\beta\phi$  et  $f$  représentent les coefficients de la force contre-électromotrice, du couple produit par le moteur et des frottements visqueux.

On se propose d'étudier la modélisation de ce système électro-mécanique à partir de la relation entre sa sortie, i.e. la position angulaire du moteur, et ses entrées, i.e. la tension d'induit et le couple résistant, en procédant progressivement comme suit.

1) Montrer que la fonction de transfert du système électro-mécanique est donnée par

$$Q(s) = \mathcal{G}(s) \begin{bmatrix} U(s) \\ T_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(s) & \mathcal{G}_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ T_r(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\beta\phi}{s((Ls + R)(Js + f) + \alpha\beta\phi^2)}$$

et

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{-(Ls + R)}{s((Ls + R)(Js + f) + \alpha\beta\phi^2)}$$

On donnera un schéma de simulation analogique du modèle du système électro-mécanique pour mettre en exergue ses variables pertinentes.

2) En supposant que la constante de temps électrique est négligeable par rapport à la constante de temps mécanique, montrer que le modèle du système électro-mécanique peut être réduit comme suit

$$Q(s) = \mathcal{G}_r(s) \begin{bmatrix} U(s) \\ T_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{r1}(s) & \mathcal{G}_{r2}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ T_r(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{G}_{r1}(s) = \frac{\beta\phi}{s(JRs + fR + \alpha\beta\phi^2)} \text{ et } \mathcal{G}_{r2}(s) = \frac{-R}{s(JRs + fR + \alpha\beta\phi^2)}$$

Comme précédemment, on donnera un schéma de simulation analogique du modèle réduit pour mettre en exergue ses variables pertinentes.

**Problème 2.14** On se propose d'étudier la modélisation du système hydraulique constitué de trois bacs contenant de l'eau et reliés par deux canaux comme l'indique la figure 2.19.

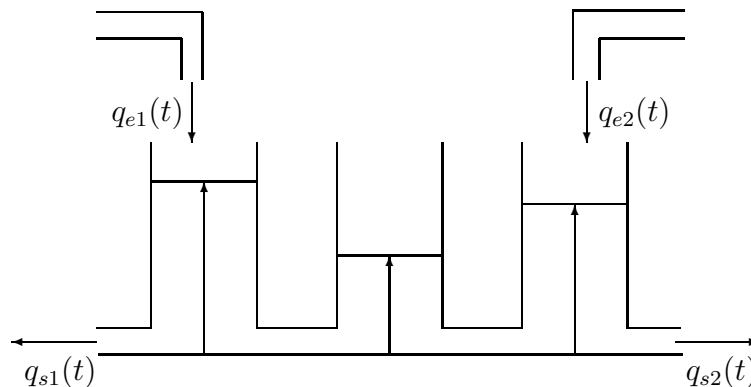


FIGURE 2.19 – Système hydraulique

Pour ce faire, on suggère de procéder d'une manière progressive comme suit.

- 1) Donner les expressions des débits à la sortie des bacs, i.e.  $q_{s1}(t)$  et  $q_{s2}(t)$  et celles des débits du bac 1 vers le bac 2 et du Bac 2 vers le bac 1.
- 2) Donner les équations d'état du système hydraulique et en déduire une réalisation d'état du modèle linéarisé.

**Problème 2.15** Les oscillateurs électromagnétiques sont communément utilisés pour l'étude des déformations des membranes souples soumises à des tensions importantes dans plusieurs domaines des sciences de l'ingénieur, en l'occurrence en biologie et en acoustique. Un oscillateur électromagnétique est composé d'un électroaimant et d'un solide soumis à un mouvement horizontal et attaché à un support fixe par un système de transmission composé d'un ressort et un amortisseur (RES/AMOR) comme l'indique la figure 2.21.

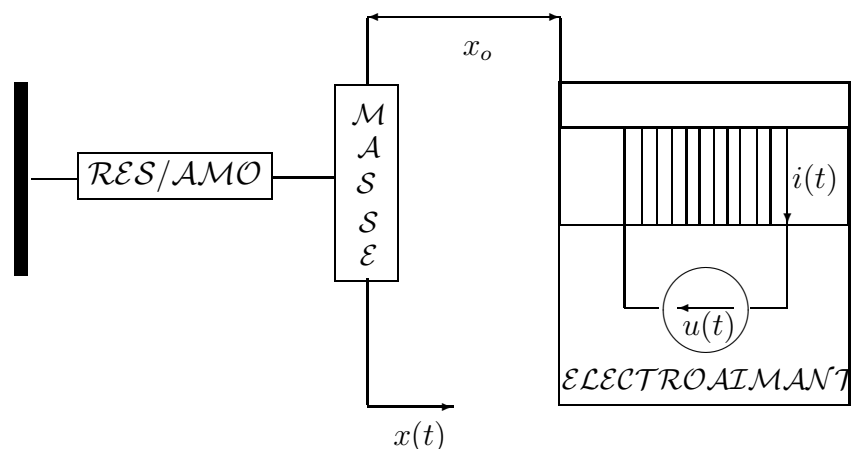


FIGURE 2.20 – Oscillateur électromagnétique

On notera que  $\{v(t)\}$  et  $\{i(t)\}$ , désignent respectivement la tension bornes de la bobine inductrice et le courant inducteur,  $\{x(t)\}$  désigne la position du solide dans l'entrefer avec  $x(0) = 0$ ,

*i.e.* l'origine coïncide avec la position du solide lorsque le courant inducteur est nul et que le ressort est relâché, et  $x_o$  désigne l'abscisse de l'électroaimant par rapport à l'origine choisie, *i.e.* la position  $x(t) = x_o$  correspond naturellement au contact entre le solide et l'électroaimant.

Le principe d'un oscillateur électromagnétique est simple : une variation de tension aux bornes de la bobine inductrice de l'électroaimant produit une variation du courant inducteur, et donc une force électromagnétique, qui induit une variation de la position du solide. On se propose d'étudier la modélisation d'un oscillateur comme suit.

- 1) Préciser les hypothèses qui permettent une description de l'oscillateur électromagnétique par les équations

$$\text{OSEM} \left\{ (m\rho^2 + \mu\rho + \kappa) x(t) = \mu \left( \frac{i(t)}{x_o - x(t)} \right)^2 \right. \quad (2.104)$$

où  $m$ ,  $\kappa$  et  $\mu$  désignent respectivement la masse du solide et les coefficients de raideur et d'amortissement du système de transmission et  $\mu$  est un scalaire qui dépend essentiellement de la structure de l'électroaimant considéré.

- 2) Déterminer une approximation linéaire du modèle de l'oscillateur électromagnétique autour d'un point de fonctionnement que l'on précisera.

**Problème 2.16** Considérons un mélangeur de deux produits dont le principe de fonctionnement est décrit comme l'indique la figure 2.21. On distingue une cuve cylindrique, de volume appropriée par rapport à la nature du mélange considéré, est alimentée par deux produits de concentrations constantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  avec des débits  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  délivrés par des vannes commandées par convenablement asservies pour être raisonnablement décrites par des gains statiques unitaires. L'agitateur est essentiellement utilisé pour réaliser un mélange relativement parfait pour que la concentration du produit dans la cuve soit égale à la concentration du produit sortant par l'orifice d'écoulement de la cuve.

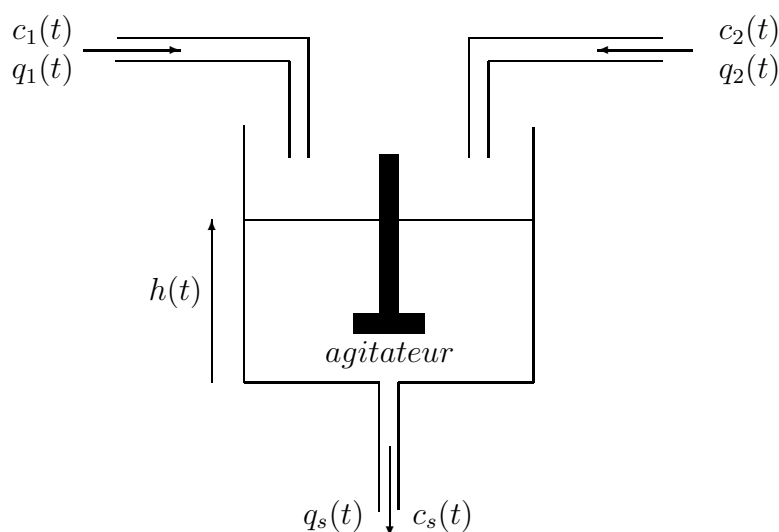


FIGURE 2.21 – Mélangeur

On se propose d'étudier la modélisation du mélangeur en procédant progressivement comme suit.

- 1) Montrer que le mélangeur est décrit par les équations

$$\mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{L} \begin{cases} \rho v(t) = q_1(t) + q_2(t) - \kappa \sqrt{h(t)} \\ \rho (\gamma(t)v(t)) = \gamma_1 q_1(t) + \gamma_2 q_2(t) - \kappa \gamma(t) \sqrt{h(t)} \end{cases}$$

où  $v(t)$  désigne le volume du produit contenu dans la cuve et  $\kappa$  n'est autre que le coefficient de restriction de l'orifice d'écoulement de sortie de la cuve.

- 2) Donner les équations d'état du système composé des vannes asservies d'alimentation, du mélangeur et des capteurs de débits et de concentration du produit final en supposant que les actionneurs et les capteurs peuvent être raisonnablement décrits par des gains statiques unitaires.
- 3) Déterminer une approximation linéaire du système obtenu autour de son régime permanent et préciser sa fonction de transfert.

**Problème 2.17** On se propose d'étudier la modélisation d'un pont roulant que l'on peut représenter comme le montre la figure 2.22 où le chariot roule sur le pont pour assurer le transport d'une charge au travers d'un câble rigide fixée au centre de la face supérieure du chariot. Le mouvement du chariot est généré par une force horizontale générée par un moteur à courant continu proprement asservi en position.

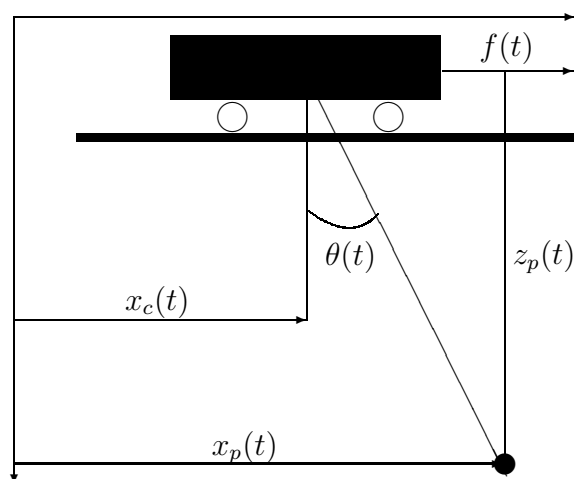


FIGURE 2.22 – Pont roulant

Pour ce faire, on supposera que le mouvement de rotation du câble est effectué sans frottement et que sa masse est négligeable par rapport à celle de la charge pour la considérer comme nulle ; et on suggère d'utiliser les notations de la figure pour les positions du chariot et de la charge.

1) Montrer que le pont roulant considéré est décrit par les deux équations couplées

$$\mathcal{PR} \begin{cases} (m_c + m_p) \rho^2 x_c(t) + m_p \ell \cos(\theta(t)) \rho^2 \theta(t) - m_p \ell \sin(\theta(t)) (\rho \theta(t))^2 = f(t) \\ \cos(\theta(t)) \rho^2 x_c(t) + \ell \rho^2 \theta(t) + g \sin(\theta(t)) = 0 \end{cases}$$

où  $m_c$ ,  $m_p$  et  $\ell$  désignent respectivement les masses du chariot et de la charge et la longueur du câble,  $x_c(t)$  est la position de chariot et  $\theta(t)$  est l'angle de rotation qui permet de déterminer la position de la charge transportée, soit

$$x_p(t) = x_c(t) + \ell \sin(\theta(t)) \quad \text{et} \quad z_p(t) = \ell \cos(\theta(t))$$

2) Donner l'équation d'un système pont roulant en considérant la force comme entrée et la position de la charge comme sortie et en déduire une approximation linéaire pour

$$\sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1 \quad \text{et} \quad \rho \theta(t) = 0.$$

**Problème 2.18** Considérons le système hydraulique constituée de quatre bacs, soit  $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in [1,4]}$ , et deux vannes, soit  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in [1,2]}$ , comme l'indique la figure 2.23.  $\{q_{e1}(t)\}$  et (resp.  $\{q_{e2}(t)\}$ ) désigne le débit fourni par  $\mathcal{V}_1$  (resp.  $\mathcal{V}_2$ ),  $\{q_3(t)\}$  (resp.  $\{q_4(t)\}$ ) désigne le débit gravitaire de  $\mathcal{B}_3$  (resp.  $\mathcal{B}_4$ ) et  $\{h_i(t)\}$  désigne le niveaux d'eau dans  $\mathcal{B}_i$ .

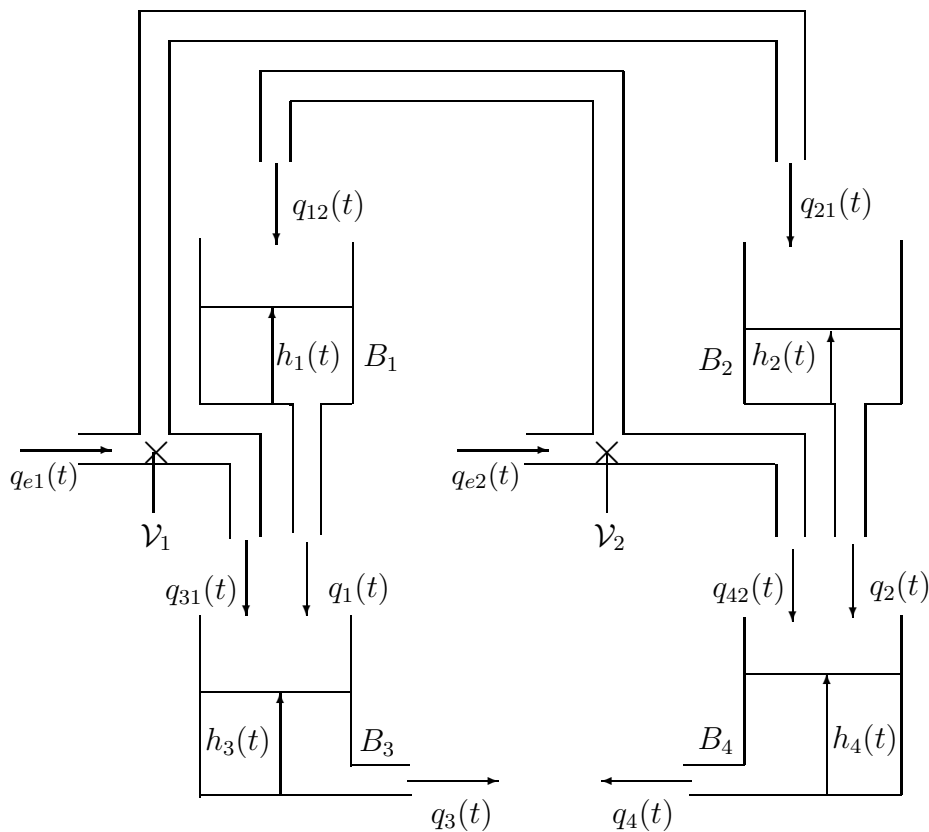


FIGURE 2.23 – Réseau hydraulique à quatre bacs

- 1) Montrer que le réseau hydraulique considéré est décrit par le système d'équations différentielles

$$\mathcal{SH} \begin{cases} \sigma_1 \rho h_1(t) = (1 - \gamma_2) q_{e2}(t) - \kappa_1 \sqrt{h_1(t)} \\ \sigma_2 \rho h_2(t) = (1 - \gamma_1(t)) q_{e1}(t) - \kappa_2 \sqrt{h_2(t)} \\ \sigma_3 \rho h_3(t) = \gamma_1(t) q_{e1}(t) + \kappa_1 \sqrt{h_1(t)} - \kappa_3 \sqrt{h_3(t)} \\ \sigma_4 \rho h_4(t) = \gamma_2(t) q_{e2}(t) + \kappa_2 \sqrt{h_2(t)} - \kappa_4 \sqrt{h_4(t)} \end{cases}$$

où  $\{\gamma_1(t)\}$  (resp.  $\{\gamma_2(t)\}$ ) désigne le taux d'ouverture de la vanne  $\mathcal{V}_1$  (resp.  $\mathcal{V}_2$ ), i.e.  $\gamma_1(t) = 1$  (resp.  $\gamma_2(t) = 1$ ) lorsque  $\mathcal{V}_1$  (resp.  $\mathcal{V}_2$ ) est complètement ouverte et donc  $\mathcal{B}_3$  (resp.  $\mathcal{B}_4$ ) n'est alimenté que par le débit  $q_{e1}(t)$  (resp. le débit  $q_{e2}(t)$ ) et  $\sigma_i$  (resp.  $\kappa_i$ ) désigne la surface (resp. le coefficient de restriction) de  $\mathcal{B}_i$ .

- 2) Donner une représentation d'état du système hydraulique obtenu en considérant les taux d'ouverture des vannes comme entrées et les débits gravitaires des bacs  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_4$  comme sorties et en déduire une approximation linéaire du système autour d'un point de fonctionnement donné.



# Chapitre 3

## Structure

*Les interactions des variables d'état d'un système avec son comportement d'entrée-sortie sont essentiellement caractérisées par deux propriétés structurelles intrinsèques aux deux questions fondamentales suivantes.*

*Q1. Peut-on effectuer une transition arbitraire de l'état d'un système par une loi de commande admissible, e.g. une fonction intégrable et uniformément bornée, en temps fini ?*

*Q2. Peut-on reconstruire l'état d'un système sur un intervalle de temps arbitraire et fini à partir de son comportement d'entrée-sortie sur cet intervalle ?*

*Ce chapitre est une étude rigoureuse et motivée sur la caractérisation des systèmes linéaires commandables (resp. observables) conformément à la question Q1 (resp. Q2) avec un focus sur les notions de modes, de pôles et de zéros. C'est une étude structurelle qui est principalement réalisée dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps modulo un focus concis sur les systèmes linéaires variants dans le temps pour pouvoir étudier les problématiques de commande et d'estimation optimales et d'adaptation paramétrique. On distingue cinq parties qui constituent une synthèse compréhensible des résultats disponibles en la matière. La première partie est consacrée au concept de commandabilité allant des définitions des systèmes commandables aux résultats fondamentaux correspondants, en l'occurrence la caractérisation des systèmes selon la commandabilité qui permet d'introduire naturellement la propriété de stabilisabilité qui constitue une exigence minimale pour la synthèse d'un système de commande. La deuxième partie est réservée au concept d'observabilité allant des définitions des systèmes observables aux résultats fondamentaux qui y sont associés, notamment la caractérisation des systèmes selon l'observabilité qui conduit naturellement à la propriété de détectabilité qui constitue une condition impérative pour la synthèse d'un observateur. La troisième partie est dédiée à la décomposition canonique selon la commandabilité et l'observabilité qui conduit naturellement au concept de réalisation minimale. C'est une belle opportunité de découvrir une autre dimension de la pluralité d'une représentation d'état modulo une adjonction de modes non commandables et/ou non observables. La quatrième partie est une présentation des notions de pôles et des zéros des systèmes multivariés confortée par des interprétations pertinentes issues d'une exploitation judicieuse de leurs propriétés structurelles. La cinquième partie est le focus sur la structure des systèmes linéaires variants dans le temps qui offre une belle opportunité pour mieux apprécier les grammians de commandabilité et d'observabilité qui sont au coeur des études de commandabilité et d'observabilité des systèmes dynamiques.*

## 3.1 Commandabilité.

Le concept de commandabilité est présenté d'une manière concise et rigoureuse pour les systèmes linéaires invariants dans le temps à partir d'un prologue sur l'essence du problème qui lui est associé.

### 3.1.1 Définitions

La définition suivante précise le concept de commandabilité pour la classe des systèmes considérée.

**Définition 3.1** Un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est commandable si pour toute condition initiale  $x_o$  et toute condition finale  $x_f$ , il existe un instant fini  $t_f$  et une séquence de commande admissible  $\{u(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  défini sur l'intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  telle que la solution de l'équation d'état  $\rho x(t) = Fx(t) + Gu(t)$  avec  $x(t_o) = x_o$  vérifie la condition finale  $x(t_f) = x_f$ .

La commandabilité est communément définie par rapport à l'origine de l'espace d'état comme l'indiquent les définitions suivantes.

**Définition 3.2** Un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est atteignable si pour toute condition finale  $x_f$ , il existe un instant fini  $t_f$  et une séquence de commande admissible  $\{u(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  définie sur l'intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  telle que la solution de l'équation d'état  $\rho x(t) = Fx(t) + Gu(t)$  avec  $x(t_o) = 0$  vérifie  $x(t_f) = x_f$ .

**Définition 3.3** Un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est contraignable si pour toute condition initiale  $x_o$ , il existe un instant fini  $t_f$  et une séquence de commande admissible  $\{u(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  définie sur un intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  telle que la solution de l'équation d'état  $\rho x(t) = Fx(t) + Gu(t)$  avec  $x(t_o) = x_o$  vérifie  $x(t_f) = 0$ .

**Remarque 3.1** La commandabilité d'un système est manifestement une propriété vitale pour le problème de poursuite d'une trajectoire dans l'espace d'état. L'ensemble des lois de commande admissibles réalisant une transition d'état arbitraire  $x_o \rightarrow x_f$  sur l'intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  est caractérisée par l'équation

$$x(t_f) = e^{F(t_f - t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t_f - \tau)}Gu(\tau)d\tau$$

La séquence de commande  $\{u(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  qui réalise la transition d'état  $x(t_o) \rightarrow x(t_f)$  du système est identiquement la même que celle qui permet de transférer l'état du système de l'origine à un état final  $x(t_f) - e^{F(t_f - t_o)}x(t_o)$  ou d'un état initial  $x(t_o) - e^{-F(t_f - t_o)}x(t_f)$  à l'origine puisque l'exponentielle d'une matrice est régulière. Les propriétés d'atteignabilité et de contraignabilité ne sont pas aussi restrictives qu'elles peuvent paraître au premier abord puisqu'elles impliquent que l'on peut, à partir de tout état initial  $x(t_o)$  à l'instant  $t_o$ , transférer le système en tout état  $x_f$  à l'instant  $t_f$  dans l'intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$ . On peut alors étudier, sans aucune perte de généralité, la commandabilité des systèmes dans un contexte d'atteignabilité, i.e.  $x(t_o) = 0$ , ou de contraignabilité, i.e.  $x(t_f) = 0$ . Par ailleurs, la commandabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps est indépendante du choix de l'instant initial. Ce dernier peut être alors choisi égal à zéro, i.e.  $t_o = 0$ , sans une quelconque incidence sur les résultats qui seront progressivement développés.

### 3.1.2 L'essence du problème

On précisera dans ce qui suit les éléments essentiels pour une meilleure perception du concept de commandabilité.

**L'équation essentielle.** La commandabilité d'un système est étroitement liée à l'existence d'une séquence de commande admissible réalisant la transition d'état  $x_o \rightarrow x_f$  sur un intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  donnée par l'équation

$$x(t_f) - e^{F(t_f-t_o)}x(t_o) = \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t_f-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

que l'on peut récrire, en vertu du résultat selon lequel qu'il existe une base de fonctions réelles spécifiques  $\{\varphi_k\}_{k \in [0, n-1]}$  telle que  $e^{Ft} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t)F^k$  (voir problème 3.1), comme suit

$$x(t_f) - e^{-F(t_f-t_o)}x(t_o) = \int_{t_o}^{t_f} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t_f - \tau)F^kGu(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} F^kG \int_{t_o}^{t_f} \varphi_k(t_f - \tau)u(\tau)d\tau$$

ou d'une manière équivalente

$$x(t_f) - e^{-F(t_f-t_o)}x(t_o) = \mathcal{M}_c(F, G) u_\varphi(t_o, t_f)$$

avec

$$\mathcal{M}_c(F, G) = \begin{pmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{pmatrix}$$

$$u_\varphi(t_o, t_f) = \begin{pmatrix} \int_{t_o}^{t_f} \varphi_0(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ \int_{t_o}^{t_f} \varphi_1(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_o}^{t_f} \varphi_{n-1}(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

Ce système de  $n$  équations à  $n \times m$  inconnues, qui admet une infinité de solutions en  $u_\varphi(t_o, t_f)$ , constitue l'équation essentielle de la commandabilité.

**Solutions usuelles.** On distingue deux solutions caractérisées par une structure particulière motivée par des considérations de simplicité des calculs. La première solution est donnée par

$$u_\varphi(t_o, t_f) = \mathcal{M}_c^T(F, G) u_a(t_o, t_f)$$

Elle permet ainsi de se ramener à un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues donné par

$$\mathcal{M}_c(F, G) \mathcal{M}_c^T(F, G) u_a(t_o, t_f) = x(t_f) - e^{-F(t-t_o)}x(t_o)$$

On peut alors déterminer d'une manière unique la solution  $u_a(t_o, t_f)$  pourvu que la matrice  $\mathcal{M}_c(F, G)$  soit de rang plein, i.e.

$$u_a(t_o, t_f) = \mathcal{M}_c^T(F, G) (\mathcal{M}_c(F, G) \mathcal{M}_c^T(F, G))^{-1} \left( x(t_f) - e^{-F(t-t_o)}x(t_o) \right)$$

La seconde solution est une loi de commande admissible définie par

$$u(\tau) = G^T e^{F^T(t_f - \tau)} \eta(t_f)$$

où le vecteur  $\eta(t_f) \in \mathbb{R}^n$  est la solution du système de  $n$  équations à  $n$  inconnues donné par

$$\left( \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t_f - \tau)} G G^T e^{F^T(t_f - \tau)} d\tau \right) \eta(t_f) = \left( x(t_f) - e^{-F(t - t_o)} x(t_o) \right)$$

On peut donc déterminer d'une manière unique le vecteur  $\eta(t_f)$  pourvu que la matrice

$$\mathcal{W}_c(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t_f - \tau)} G G^T e^{F^T(t_f - \tau)} d\tau = \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t - t_o)} G G^T e^{F^T(t - t_o)} dt$$

soit régulière.

Ce préambule a permis de mettre en évidence l'importance des matrices  $\mathcal{M}_c(F, G)$  et  $\mathcal{W}_c(t_o, t_f)$  pour la caractérisation des systèmes commandables. Le résultat suivant précise la relation essentielle entre ces matrices respectivement appelées **matrice de commandabilité** et **grammien de commandabilité du système**.

**Résultat 3.1** La matrice de commandabilité et le grammien de commandabilité d'un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  sont reliés comme suit.

$$\mathcal{W}_c(t_o, t_f) = \mathcal{M}_c(F, G) \left( \int_{t_o}^{t_f} \phi^T(t) \phi(t) dt \right) \mathcal{M}_c^T(F, G)$$

avec

$$\phi(t) = \left( \varphi_0(t) I_m \quad \varphi_1(t) I_m \quad \dots \quad \varphi_{n-1}(t) I_m \right)$$

et ont le même rang

$$\text{rang} \left( \mathcal{W}_c(t_o, t_f) \right) = \text{rang} \left( \mathcal{M}_c(F, G) \right)$$

Par ailleurs, la détermination du grammien de commandabilité peut être effectuée à partir de l'équation différentielle de Lyapunov

$$\rho \mathcal{W}_c(t_o, t) = F \mathcal{W}_c(t_o, t) + \mathcal{W}_c(t_o, t) F^T + G G^T \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_c(t_o, t_o) = 0$$

**La preuve de ce résultat** peut être effectuée en guise d'un bon exercice comme le suggère le problème 3.14.

**Sous-espace atteignable** L'équivalence entre la comandabilité et l'atteignabilité permet de postuler qu'un système est commandable si et seulement si l'ensemble des états atteignables par toutes les lois de commande admissible est l'espace d'état tout entier. La commandabilité peut être alors étudiée dans un contexte d'atteignabilité à partir de la relation entre l'entrée et l'état du système. Cette dernière peut être interprétée comme un opérateur linéaire  $\mathcal{D}_{ee}$  entre

l'ensemble des lois de commande admissibles  $\mathcal{U}_a$  et l'ensemble des états atteignables  $\mathcal{E}_a$ , soit

$$\mathcal{D}_{ee} : \mathcal{U}_a \longrightarrow \mathcal{E}_a$$

avec

$$x(t) = \mathcal{D}_{ee}(u) = \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$$

Compte tenu du postulat donné ci-dessus, un système est commandable si et seulement si la relation entrée  $\mapsto$  état est surjective, soit

$$I_m(\mathcal{D}_{ee}) = \mathcal{E}_a = \mathbb{R}^n$$

Avec des arguments et des notations analogues à ceux utilisés dans le préambule, on peut récrire l'équation des états atteignables comme suit

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau = \mathcal{M}_c(F, G) u_\varphi(t_0, t)$$

Cette forme de l'équation des états atteignables est beaucoup plus appropriée à la caractérisation du sous espace atteignable comme le montre le résultat fondamental suivant.

**Résultat 3.2** L'ensemble des états atteignables associé à un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$  est égal à l'ensemble engendré par les colonnes de la matrice de commandabilité  $\mathcal{M}_c(F, G)$  qui lui est associée, soit

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$$

C'est un sous espace vectoriel de l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$  qui admet en outre les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1.$   $\mathcal{E}_a$  est invariant sous la transformation linéaire associée à la matrice  $F$ , i.e.

$$x \in \mathcal{E}_a \implies Fx \in \mathcal{E}_a$$

$\mathcal{P}2.$   $\mathcal{E}_a$  est un invariant du système, i.e.

$$x_0 \in \mathcal{E}_a \implies x(t) \in \mathcal{E}_a \text{ pour tout } t$$

$\mathcal{P}3.$  Le système est complètement commandable sur  $\mathcal{E}_a$

**Preuve.** L'inclusion  $\mathcal{E}_a \subset \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$  résulte naturellement de l'équation des états atteignables, i.e.  $x(t) = \mathcal{M}_c(F, G) u_\alpha(t_0, t)$ . Quant à l'inclusion  $\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G)) \subset \mathcal{E}_a$ , elle découle du fait que tout vecteur  $x \in \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$  peut s'écrire comme suit

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i F^i G \text{ avec } (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

et qu'il existe une infinité de lois de commande admissibles qui permettent d'atteindre cet état, notamment celles qui vérifient les équations

$$\int_{t_0}^t \varphi_k(t-\tau) u(\tau) d\tau = x_k \text{ pour tout } k \in [0, n-1]$$

Le sous espace d'atteignabilité  $\mathcal{E}_a = \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$  est bien un sous-espace vectoriel de l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$  satisfaisant les propriétés  $\mathcal{P}1$  à  $\mathcal{P}3$ .  $\mathcal{P}1$  et  $\mathcal{P}2$  découlent naturellement du théorème de Cayley-Hamilton en tenant compte des faits suivants

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} x_0 + \mathcal{M}_c(F, G) u_\alpha(t)$$

et

$$x_0 \in \mathcal{E}_a \implies e^{F(t-t_0)} x_0 \in \mathcal{E}_a \text{ pour tout } t$$

Quant à  $\mathcal{P}3$ , c'est une simple conséquence de l'inclusion  $\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c^T(F, G)) \subset \mathcal{E}_a$ .

CQFD

**Remarque 3.2** Le sous-espace de commandabilité  $\mathcal{E}_c$ , i.e. l'ensemble des états atteignables à partir d'un état initial non nul  $x(t_0)$ , se déduit du sous espace d'atteignable  $\mathcal{E}_a$  par une simple translation définie par  $e^{F(t-t_0)} x(t_0)$  sous la bénédiction des propriétés  $\mathcal{P}1$  à  $\mathcal{P}3$ .

**Le postulat de la commandabilité.** Compte tenu du paragraphe précédent, on peut postuler qu'un système est commandable si et seulement si son sous espace atteignable est l'espace d'état tout entier. Et comme le seul vecteur qui est orthogonal à l'espace d'état tout entier n'est autre que le vecteur nul, on en déduit naturellement que l'atteignabilité, et donc la commandabilité, est caractérisée par la propriété suivante

$$\left( v^T \left( \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau \right) = 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}_a \right) \implies (v = 0)$$

Le résultat suivant conforte le postulat de la commandabilité par une propriété vitale pour l'étude de la commandabilité d'un système linéaire invariant dans le temps.

**Résultat 3.3** Un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$  est commandable si et seulement si les lignes de la matrice  $e^{Ft} G$  sont linéairement indépendantes, soit l'identité  $v^T e^{Ft} G = 0$  pour tout  $t$  n'est possible que si le vecteur est nul.

**Preuve.** Montrons d'abord que la propriété suivante est vraie pour tout vecteur arbitraire  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\left( \int_{t_0}^t v^T e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau = 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}_a \right) \iff (v^T e^{F\tau} G = 0 \text{ pour tout } \tau)$$

Et comme

$$\int_{t_0}^t v^T e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} v^T e^{F\tau} G u(t-\tau) d\tau$$

il suffit de montrer que

$$\left( \int_0^{t-t_0} v^T e^{F\tau} G u(t-\tau) d\tau = 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}_a \right) \iff (v^T e^{F\tau} G = 0 \text{ pour tout } \tau)$$

La suffisance est triviale puisque

$$\left( v^T e^{F\tau} G = 0 \text{ pour tout } \tau \right) \implies \left( \int_0^{t-t_0} v^T e^{F\tau} G u(t-\tau) d\tau = 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}_a \right)$$

Pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de montrer que

$$\left( \exists \tau \in \mathbb{R}^n / v^T e^{F\tau} G \neq 0 \right) \implies \left( \exists u \in \mathcal{U}_a / \int_0^{t-t_0} v^T e^{F\tau} G u(t-\tau) d\tau \neq 0 \right)$$

Et pour ce faire, il suffit de remarquer que la loi de commande définie par  $u(\tau) = G^T e^{F^T \tau} v$  vérifie

$$\int_{t_0}^{t-t_0} v^T e^{F\tau} G u(t-\tau) d\tau = \int_{t_0}^t u(t-\tau)^T u(t-\tau) d\tau > 0$$

Ainsi, on peut conclure que le système est bien commandable en vertu du postulat de la commandabilité donné ci-dessus.

CQFD

**Indices de commandabilité.** Comment extraire les colonnes linéairement indépendantes de la matrice de commandabilité ? C'est une question vitale pour une meilleure perception du concept de commandabilité ; elle sera particulièrement étudiée pour les systèmes linéaires multivariés décrits par une réalisation d'état dont la matrice d'entrée est donnée par

$$G = ( G_1 \dots G_r \ G_{r+1} \dots G_m ) \quad \text{avec} \quad \text{rang}(G) = r = \text{rang}( G_1 \dots G_r ) \quad (3.1)$$

Cette propriété peut être aisément satisfaite par une indexation appropriée des entrées du système qui permet d'ordonner les colonnes de la matrice de commandabilité comme suit

$$\mathcal{M}_{cp}(F, G) = ( \mathcal{M}_{c1} \dots \mathcal{M}_{ck} \dots \mathcal{M}_{cm} ) \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{ck} = ( G_k \ FG_k \dots F^{n-1} G_k ) \quad (3.2)$$

Le résultat suivant conforte le postulat de la commandabilité par une propriété vitale pour l'étude de la commandabilité d'un système linéaire invariant dans le temps.

**Résultat 3.4** Considérons un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état satisfaisant la propriété 3.1. Alors les colonnes linéairement indépendantes de sa matrice de commandabilité peuvent être regroupées comme suit

$$\mathcal{M}_{cr}(F, G) = ( G_1 \dots F^{\nu_1-1} G_1 \dots G_k \dots F^{\nu_k-1} G_k \dots G_r \dots F^{\nu_r-1} G_r ) \quad (3.3)$$

où  $\nu_k$  est le plus petit entier tel que la colonne  $F^{\nu_k} G_k$  dépend linéairement des colonnes qui la précèdent dans la matrice  $\mathcal{M}_{cr}(F, G)$ , i.e.  $G_1, FG_1, \dots, F^{\nu_1-1} G_1, \dots, G_k, FG_k, \dots, F^{\nu_k-1} G_k$ . Et on en déduit naturellement que

$$\nu_i \geq 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, r \text{ et } \sum_{i=1}^r \nu_i = \text{rang}(\mathcal{M}_c(F, G)) \quad (3.4)$$

La **preuve** de ce résultat est triviale . Le premier fait découle naturellement de la propriété 3.1 de la matrice d'entrée, e.g. les colonnes  $G_{r+1}$  à  $G_m$  sont des combinaisons linéaires des colonnes  $G_1$  à  $G_r$ , qui permet d'en déduire naturellement que toutes les colonnes  $\mathcal{M}_{ck}(F, G_k)$  pour  $k \in [r + 1, m]$  sont linéairement dépendantes des colonnes qui les précèdent dans la matrice  $\mathcal{M}_{cp}(F, G)$ . Quant au second fait, il stipule que si  $F^{\nu_k}G_k$  dépend linéairement des colonnes qui la précèdent dans la matrice  $\mathcal{M}_{cr}(F, G)$ , alors il en sera de même pour les colonnes  $F^{\nu_k+i}G_k$  pour  $k \in [1, r]$ .

Ceci nous amène naturellement à la définition des indices de commandabilité (resp. indices de commandabilité cumulés) d'un système

**Définition 3.4** Pour  $i = 1, \dots, r \triangleq \text{rang}(G) \leq m$ , le  $i$ ème indice de commandabilité  $\nu_i$  (resp. indice de commandabilité cumulé  $\sigma_i$ ) du système est le plus petit entier tel que la colonne  $F^{\nu_i}G_i$  est une combinaison linéaire des colonnes qui la précèdent au sein de la matrice de commandabilité ordonnée selon les indices des entrées du système (resp. la somme des indices de commandabilité  $\nu_k$  pour  $k = 1, \dots, \nu_i$ , soit  $\sigma_i = \nu_1 + \dots + \nu_i$ )

**Remarque 3.3** Dans le cas des systèmes commandables dont la matrice d'entrée est de rang plein, le nombre de colonnes indépendantes de la matrice de commandabilité est égal à la dimension du système et on a

$$\nu_i \geq 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, m \text{ et } \sum_{i=1}^m \nu_i = n$$

Ces éléments essentiels ont permis de mettre en exergue l'essence du concept de commandabilité du point de vue fondamental pour pouvoir établir aisément les résultats fondamentaux qui lui sont associés.

### 3.1.3 Critère usuel de commandabilité

Le résultat fondamental suivant donne un critère usuel de test de commandabilité des systèmes linéaires invariants.

**Résultat 3.5** Un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$  est commandable si et seulement si sa matrice de commandabilité est de rang plein, i.e.  $\text{rang}(\mathcal{M}_c(F, G)) = n$ , ou d'une manière équivalente son grammien de commandabilité est une matrice définie positive, i.e.  $\mathcal{W}_c(t_o, t_f) > 0$ .

**Preuve.** En vertu du résultat 3.3, il suffit de montrer que les propositions suivantes sont vraies.

$$(v^T e^{Ft} G = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \iff (v^T \mathcal{M}_c(F, G) = 0)$$

et

$$\text{rang}(\mathcal{W}_c(t_o, t_f)) = \text{rang}(\mathcal{M}_c(F, G))$$

En évaluant les dérivées successives de la fonction définie par  $v^T e^{Ft} G$  pour l'instant  $t = 0$ , on obtient



$$v^T F^k G = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

et donc

$$v^T \mathcal{M}_c(F, G) = 0$$

La condition est donc nécessaire. Et en vertu du théorème de Cayley-Hamilton, on obtient

$$\left( v^T F^k G = 0 \text{ pour tout } k \in [0, n-1] \right) \implies \left( v^T F^k G = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right)$$

et donc la condition est bien suffisante

$$v^T e^{Ft} G = \sum_{k=0}^{\infty} v^T F^k G \frac{t^k}{k!} = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+$$

Montrons enfin que

$$\left( v^T e^{F\tau} G = 0 \text{ pour tout } \tau \right) \iff \left( v^T \mathcal{W}_c(t_o, t_f) v \geq 0 \text{ pour tout } 0 \neq v \in \mathbb{R}^n \right)$$

Notons d'abord que le grammien de commandabilité d'un système est une matrice symétrique et définie non négative, i.e.

$$v^T \mathcal{W}_c(t_o, t_f) v \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^n$$

Il suffit donc de montrer que le grammien de commandabilité est une matrice régulière, i.e.

$$v^T \mathcal{W}_c(t_o, t_f) v = 0 \iff v = 0$$

Or

$$v^T \mathcal{W}_c(t_o, t_f) v = \int_0^{t_f-t_o} v^T e^{Ft} G G^T e^{F^T t} v dt = \int_0^{t_f-t_o} \|G^T e^{F^T t} v\|^2 dt$$

On aura alors

$$v^T \mathcal{W}_c(t_o, t_f) v = 0 \iff G^T e^{F^T t} v = 0 \text{ pour tout } t$$

Le grammien de commandabilité du système est donc une matrice régulière si et seulement si la propriété suivante est vérifiée

$$G^T e^{F^T \tau} v = 0 \text{ pour tout } \tau \iff v = 0$$

*CQFD*

**Remarque 3.4** La commandabilité ne concerne que la paire  $(F, G)$  de la réalisation d'état du système : c'est pourquoi, on dit indifféremment système commandable ou paire  $(F, G)$  est commandable.

Le résultat suivant révèle la nature générique de la propriété de commandabilité d'un système qui est judicieusement exploitée pour des considérations de simplicité d'analyse et parfois de synthèse.

**Résultat 3.6** *La commandabilité d'un système est une propriété invariante par un changement de base.*

**La preuve** de ce résultat est trivial. En effet, si l'on effectue un changement de base  $x(t) = T\bar{x}(t)$ , alors on passera de la réalisation  $(F, G, H, E)$  à la réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  définie par

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = TH \quad \text{et} \quad \bar{E} = E$$

La matrice de commandabilité associée à la nouvelle réalisation est alors donnée par

$$\bar{\mathcal{M}}_c(\bar{F}, \bar{G}) = T^{-1} \mathcal{M}_c(F, G)$$

### 3.1.4 Forme canonique commandable

Parmi l'infinité de réalisations d'état d'un système linéaire invariant commandable, on distingue une réalisation d'état dite forme canonique commandable. Le résultat fondamental suivant précise la structure de cette forme canonique dans le cas des systèmes monvariables pour des considérations purement pédagogiques.

**Résultat 3.7** *Considérons une réalisation d'état commandable  $(F, G, H, E)$ , alors il existe un changement de base dans l'espace d'état,  $x(t) = Tx_c(t)$ , qui conduit à une réalisation dite forme canonique commandable  $(F_c, G_c, H_c, E_c)$  caractérisée par*

$$F_c = \begin{pmatrix} -a_1 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\det(sI_n - F) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

La matrice de passage est donnée par le produit de la matrice de commandabilité du système par une matrice de Toeplitz qui ne dépend que des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice d'état, soit

$$T = \mathcal{M}_c(F, G) \mathcal{T}_\sigma \quad \text{avec} \quad \mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Preuve.** *Ecrivons la matrice de passage  $T$  sous la forme  $T = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n)$ , on obtient*

$$G = TG_c = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n) G_c \quad \text{et} \quad TF_c = FT = (FT_1 \ FT_2 \ \dots \ FT_n)$$

soit

$$T_1 = G \quad \text{et} \quad (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n) F_c = (-a_1T_1 + T_2 \quad -a_2T_1 + T_3 \quad \dots \quad -a_nT_1)$$

On aura donc

$$FT_i = -a_i T_i + T_{i+1} \text{ pour tout } i \in [1, n-1] \text{ et } FT_n = -a_n T_n$$

ou d'une manière équivalente

$$T_i = \sum_{k=1}^i a_{i-k} F^{k-1} G \text{ pour } i \in [1, n]$$

La matrice de changement de base est bien donnée par  $T = \mathcal{M}_c(F, G) \mathcal{T}_\sigma$ .

*CQFD.*

La motivation de l'appellation forme canonique commandable est principalement due au fait qu'elle soit commandable. On peut vérifier aisément que la matrice de commandabilité sous-jacente est bien régulière puisque

$$\mathcal{M}_c(F_c, G_c) = T^{-1} \mathcal{M}_c(F, G) = T^{-1} T \mathcal{T}_\sigma^{-1} = \mathcal{T}_\sigma^{-1}$$

**Remarque 3.5** On montrera ultérieurement que cette réalisation permet de déterminer d'une manière triviale le gain d'une loi de commande avec retour d'état : ceci motive d'avantage son appellation. Néanmoins, la forme canonique commandable n'est pas appropriée à la synthèse des systèmes de commande avec retour d'état pour des considérations de robustesse numérique ([7]).

**Remarque 3.6** Dans le cas des systèmes à plusieurs entrées, le passage d'une réalisation d'état donnée à la forme canonique commandable est réalisé d'une manière constructive qui requiert une perception adéquate de la structure des systèmes multivariables que l'on peut découvrir d'une manière agréable dans [71]. L'essence de ce processus est un changement de base conçu à partir de la matrice de commandabilité réduite aux colonnes linéairement indépendantes, en l'occurrence

$$x(t) = P x_c(t) \text{ avec } P = \mathcal{M}_{cp}(F, G)$$

### 3.1.5 Caractérisation des modes non commandables

Lorsqu'un système n'est pas complètement commandable, on peut le décomposer en une partie commandable et une partie non commandable comme l'indique la figure 3.1. On notera plus particulièrement que la partie non commandable n'est pas affectée par la commande : l'intuition physique est préservée. D'un point de vue mathématique, cette décomposition du système selon la commandabilité est réalisée conformément au résultat fondamental suivant.

**Résultat 3.8** Pour toute réalisation  $(F, G, H, E)$  d'ordre  $n$  telle que  $\text{rang}(\mathcal{M}_c) = r < n$ , on peut toujours effectuer un changement de base  $x(t) = T \bar{x}(t)$  avec  $T = \begin{pmatrix} T_c & T_{\bar{c}} \end{pmatrix}$  qui permet

de récrire le système sous la forme

$$\mathcal{DSC} \begin{cases} \rho \bar{x}(t) = \bar{F} \bar{x}(t) + \bar{G} u(t) & \text{avec } \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \\ y(t) = H \bar{x}(t) + E u(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

avec

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_c & F_{c\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{pmatrix}, \bar{G} = \begin{pmatrix} G_c \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{H} = (H_c \ H_{\bar{c}}) \text{ et } \bar{E} = E = E_c \quad (3.6)$$

telle que la paire  $(F_c, G_c) \in \mathcal{R}^{r \times r} \times \mathcal{R}^{r \times m}$  est une forme canonique commandable et la fonction de transfert du système est donnée par

$$\bar{G}(z) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} + \bar{E} = H_c (sI_r - F_c)^{-1} G_c + E_c$$

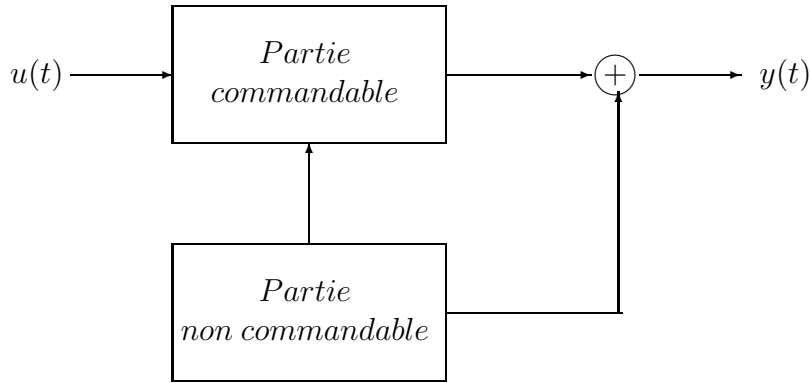


FIGURE 3.1 – Décomposition d'un système selon la commandabilité

**Preuve.** C'est une belle application du théorème de la base incomplète. On partira du fait que l'espace d'état peut être décomposé en le sous-espace de commandabilité et son complément par une projection adéquate, soit

$$\mathcal{R}^n = (\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))) \oplus (\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G)))^\perp$$

avec

$$\dim(\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))) = r \text{ et } \dim((\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G)))^\perp) = \bar{r}$$

où  $r$  est le rang de la matrice de commandabilité  $\mathcal{M}_c(F, G)$  et  $\bar{r} = n - r$ . On notera que

$$(\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G)))^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{M}_c^T(F, G))$$

Soient  $\mathcal{B}_c = \{v_1, \dots, v_r\}$  et  $\mathcal{B}_{\bar{c}} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  deux bases des sous espaces vectoriels  $\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$  et  $(\mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G)))^\perp$ ;  $\mathcal{B}_c$  peut être particulièrement constituée des premières colonnes indépendantes de la matrice de commandabilité  $\mathcal{M}_c(F, G)$ .  $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_{\bar{c}}\}$  constitue donc une base de l'espace d'état  $\mathcal{R}^n$  qui permet d'effectuer le changement de base suivant

$$x(t) = T\bar{x}(t) \text{ avec } T = \begin{pmatrix} T_c & T_{\bar{c}} \end{pmatrix}$$

où les matrices  $T_c \in \mathcal{R}^{n \times r}$  et  $T_{\bar{c}} \in \mathcal{R}^{n \times \bar{r}}$  sont respectivement constituées à partir des bases  $\mathcal{B}_c$  et  $\mathcal{B}_{\bar{c}}$  comme suit

$$T_c = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_r \end{pmatrix} \text{ et } T_{\bar{c}} = \begin{pmatrix} v_{r+1} & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Si on partitionne la matrice  $T^{-1}$  comme suit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} W_c \\ W_{\bar{c}} \end{pmatrix} \text{ avec } W_c \in \mathcal{R}^{r \times n} \text{ et } W_{\bar{c}} \in \mathcal{R}^{\bar{r} \times n}$$

on aura

$$T^{-1}T = I_n = \begin{pmatrix} W_c \\ W_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_c & T_{\bar{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_c T_c & W_c T_{\bar{c}} \\ W_{\bar{c}} T_c & W_{\bar{c}} T_{\bar{c}} \end{pmatrix}$$

ou d'une manière équivalente

$$W_c T_c = I_r, \quad W_{\bar{c}} T_{\bar{c}} = I_{\bar{r}} \text{ et } W_{\bar{c}} T_c = W_c T_{\bar{c}} = 0$$

Et comme la matrice  $T_c \in \mathcal{R}^{n \times r}$  est constituée à partir de la base du sous-espace de commandabilité, il découle de la propriété  $W_{\bar{c}} T_c = 0$  que  $W_{\bar{c}} v = 0$  pour tout  $v \in \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$ .

Par ailleurs, les partitions des matrices de changement de base et son inverse permettent de récrire la paire  $(\bar{F}, \bar{G})$  comme suit

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{pmatrix} W_c \\ W_{\bar{c}} \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} T_c & T_{\bar{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_c FT_c & W_c FT_{\bar{c}} \\ W_{\bar{c}} FT_c & W_{\bar{c}} FT_{\bar{c}} \end{pmatrix}$$

et

$$\bar{G} = T^{-1}G = \begin{pmatrix} W_c \\ W_{\bar{c}} \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} W_c G \\ W_{\bar{c}} G \end{pmatrix}$$

Et comme toutes les colonnes de la matrice  $T_c \in \mathcal{R}^{n \times r}$ , dont on distingue la matrice d'entrée  $G$ , appartiennent au sous-espace de commandabilité, il en est de même pour les colonnes de la matrice  $FT_c \in \mathcal{R}^{n \times r}$  puisque le sous-espace de commandabilité est invariant par  $F$ . Et en vertu de la propriété  $W_{\bar{c}} v = 0$  pour tout  $v \in \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F, G))$ , il en résulte que  $W_{\bar{c}} FT_c = 0$  et  $W_{\bar{c}} G = 0$ .

Considérons à présent la matrice de commandabilité associée à la paire  $(\bar{F}, \bar{G})$  donnée par

$$\mathcal{M}_c(\bar{F}, \bar{G}) = \begin{pmatrix} G_c & F_c G_c & \dots & (F_c)^{n-1} G_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$\text{rang}(\mathcal{M}_c(\bar{F}, \bar{G})) = \text{rang}(\mathcal{M}_c(F, G)) = r$$

puisque le rang de la matrice de commandabilité est un invariant par changement de base. Et compte tenu du théorème de Cayley-Hamilton, on peut conclure aisément que

$$\text{rang}(\mathcal{M}_c(\bar{F}, \bar{G})) = \text{rang}(\mathcal{M}_c(F_c, G_c)) = r$$

Ceci prouve que la paire  $(F_c, G_c)$  est bien commandable.

Quant au résultat relatif à la fonction de transfert du système, il peut être déduit par de simples manipulations algébriques. En effet, on a

$$\mathcal{G}(s) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} + \bar{E}$$

avec

$$(sI_n - \bar{F})^{-1} = \begin{pmatrix} sI_r - F_c & -F_{c\bar{c}} \\ 0 & sI_{\bar{r}} - F_{\bar{c}} \end{pmatrix}^{-1}$$

Et comme

$$\begin{pmatrix} sI_r - F_c & -F_{c\bar{c}} \\ 0 & sI_{\bar{r}} - F_{\bar{c}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (sI_r - F_c)^{-1} & -(sI_r - F_c)^{-1} F_{c\bar{c}} (sI_{\bar{r}} - F_{\bar{c}})^{-1} \\ 0 & (sI_{\bar{r}} - F_{\bar{c}})^{-1} \end{pmatrix}$$

La fonction de transfert du système est donc réduite à la partie commandable donnée par

$$\mathcal{G}(s) = H_c (sI_r - F_c)^{-1} G_c + E_c$$

*CQFD*

**Remarque 3.7** Dans la nouvelle base, les équations du système peuvent se récrire comme suit

$$\text{SYSDC} \begin{cases} \rho \bar{x}_c(t) = F_c \bar{x}_c(t) + G_c u(t) \\ \rho \bar{x}_{\bar{c}}(t) = F_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}}(t) \\ y(t) = H_c \bar{x}_c(t) + H_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{cases}$$

Cette forme fait apparaître explicitement que le système n'est pas complètement commandable et que sa fonction de transfert est réduite à la partie commandable. En effet, l'évolution des  $\bar{r}$  variables d'état  $\bar{x}_{\bar{c}}(t)$  n'est affectée ni par la commande, ni par les  $r$  variables d'état commandables de  $\bar{x}_c(t)$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_c \bar{X}_c(s) + H_{\bar{c}} \bar{X}_{\bar{c}}(s) \\ &= H_c (sI_r - F_c)^{-1} G_c U(s) + H_c (sI_r - F_c)^{-1} \bar{X}_c(0) + H_{\bar{c}} (sI_{\bar{r}} - F_{\bar{c}})^{-1} \bar{X}_{\bar{c}}(0) \end{aligned}$$

La fonction de transfert du système est alors donnée par

$$Y(s) = H_c \bar{X}_c(s) = H_c (sI_r - F_c)^{-1} G_c U(s)$$

Le résultat suivant permet de mieux caractériser les modes non commandables d'un système linéaire invariant à partir du résultat fondamental suivant, communément connu sous l'appellation de test de Popov-Belevitch-Hautus par référence à ses auteurs.

**Résultat 3.9** Une paire  $(F, G)$  est commandable si et seulement si il n'existe pas de vecteur propre à gauche  $v$  de la matrice d'état  $F$  tel que  $v^T G = 0$ , i.e.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI_n - F & G \end{pmatrix} = n \text{ pour tout } p \in \mathcal{C}$$

Dans le cas contraire, tout couple  $(\lambda, v) \in \mathcal{C} \times \mathbb{C}^n - \{0\}$  tel que

$$v^T F = \lambda v^T \text{ et } v^T G = 0$$

est appelé mode non commandable du système.

**Preuve.** Supposons que la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda I_n - F & G \end{pmatrix}$  n'est pas de rang plein, il existe un vecteur  $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$  tel que

$$v^T \begin{pmatrix} \lambda I_n - F & G \end{pmatrix} = 0 \iff v^T F = \lambda v^T \text{ et } v^T G = 0$$

$\lambda$  est donc une valeur propre de  $F$  et  $v$  est le vecteur propre à gauche qui lui est associé. On aura donc

$$v^T \mathcal{C}(F, G) = \begin{pmatrix} v^T G & \lambda v^T G & \dots & \lambda^{n-1} v^T G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix} v^T G = 0$$

La matrice de commandabilité  $\mathcal{C}(F, G)$  n'est pas de rang plein. Ce dernier critère montre que le système est non commandable si l'un des vecteurs propres à gauche de  $F$  est orthogonal à  $G$ .

Réciproquement, si le système n'est pas commandable, alors on peut le décomposer selon la commandabilité par un changement de base adéquat. La réalisation correspondante est caractérisée par

$$\bar{F} = T^{-1} F T = \begin{pmatrix} F_c & F_{c\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{G} = T^{-1} G = \begin{pmatrix} G_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $(\lambda, v)$  un mode tel que  $v^T F_{\bar{c}} = \lambda v^T$  avec  $v^T v = 1$ , on constate que le vecteur

$$w = T^{-T} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

vérifie

$$w^T F = \begin{pmatrix} 0 & v^T \end{pmatrix} T^{-1} F = \begin{pmatrix} 0 & v^T \end{pmatrix} \bar{F} T^{-1} = \lambda w^T$$

et

$$w^T G = \begin{pmatrix} 0 & v^T \end{pmatrix} T^{-1} G = \begin{pmatrix} 0 & v^T \end{pmatrix}$$

*CQFD*

**Remarque 3.8** Le vecteur  $v$  définit une direction le long de laquelle le système n'est pas commandable : c'est un vecteur orthogonal au sous espace de commandabilité du système.

### 3.1.6 Stabilisabilité

La décomposition selon la commandabilité a permis de mettre en évidence les modes commandables et les modes non commandables. Pour mieux apprécier cet aspect des choses, il suffit de remémorer le fait que le polynôme caractéristique est un invariant par un changement de base dans l'espace d'état, i.e.

$$\det(sI_n - F) = \det(sI_r - F_c) \det(sI_{\bar{r}} - F_{\bar{c}})$$

Les modes commandables sont naturellement associés aux valeurs propres de la matrice  $F_c$ , alors que les modes non commandables sont associés aux valeurs propres de la matrice  $F_{\bar{c}}$ . Et comme les modes non commandables ne peuvent pas être affectés par la commande d'une part, et peuvent apparaître dans la sortie du système d'autre part, on ne peut pas stabiliser un système dont les modes non commandables ne seraient pas asymptotiquement stables. On est amené naturellement au concept de stabilisabilité défini comme suit.

**Définition 3.5** Un système linéaire invariant est dit stabilisable si ses modes non commandables sont asymptotiquement stables.

Compte tenu des résultats fondamentaux sur la caractérisation des modes non commandables, on peut déduire aisément le résultat fondamental suivant sur la caractérisation du concept de stabilisabilité.

**Résultat 3.10** Le système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est stabilisable si et seulement si ses modes non commandables sont asymptotiquement stables, i.e.

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} sI_n - F & G \end{pmatrix} \text{ est de rang plein pour tout } s \notin \mathcal{D}_{sa}$$

### 3.1.7 Récapitulatif

Le concept de commandabilité a permis d'étudier la relation entrée→état du système à partir de sa matrice de commandabilité et de son grammien de commandabilité dont le résultat fondamental suivant constitue la pierre d'achoppement.

**Résultat 3.11** Considérons un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$ , de dimension  $n$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes

$\mathcal{P}1$ . La paire  $(F, G)$  est commandable.

$\mathcal{P}2$ . La matrice de commandabilité du système est de rang plein, i.e.  $\text{rang}(\mathcal{M}_c(F, G)) = n$ .

$\mathcal{P}3$ . Le grammien de commandabilité est une matrice définie positive, i.e.  $\mathcal{G}_c > 0$ .

$\mathcal{P}4$ . Il n'existe aucune matrice régulière  $T$  telle que

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{pmatrix} F_c & F_{c\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{G} = T^{-1}G = \begin{pmatrix} G_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $F_c \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $F_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  et  $G_c \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  avec  $r < n$ .



$\mathcal{P}5$ . Il n'existe aucun vecteur propre à gauche de la matrice d'état qui est orthogonal à la matrice d'entrée, i.e. la matrice  $\begin{pmatrix} sI_n - F & G \end{pmatrix}$  est de rang plein pour tout  $s \in \mathcal{C}$ .

$\mathcal{P}6$ . L'identité  $H(sI_n - F)^{-1}G = 0$  pour tout  $s \in \mathcal{C}$  n'est possible que si la matrice  $H$  est nulle.

Les propriétés  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}3$  sont les critères usuels de test de commandabilité. Les propriétés  $\mathcal{P}4$  et  $\mathcal{P}5$  permettent fondamentalement de mieux caractériser les modes non commandables du système et d'introduire le concept de stabilisabilité d'une manière naturelle. La propriété  $\mathcal{P}4$  est issue d'une décomposition adéquate du système selon la commandabilité qui met en évidence les modes non commandables par rapport aux modes commandables, i.e. les valeurs propres de la matrice  $F_c$  par rapport aux valeurs propres de la matrice  $F_c$ . La propriété  $\mathcal{P}5$  est communément connue sous l'appellation de test de Popov-Belevitch- $\mathcal{H}$ .autus par référence à ses auteurs. La propriété  $\mathcal{P}6$  est une émanation naturelle de la propriété  $\mathcal{P}5$ .

## 3.2 Observabilité

Dans ce qui suit, on présente d'une manière concise et rigoureuse le concept d'observabilité pour les systèmes linéaires invariants dans le temps à partir d'un prologue motivé sur l'essence du problème sous-jacent.

### 3.2.1 Définitions

La définition suivante précise le concept d'observabilité pour la classe des systèmes considérée.

**Définition 3.6** Un système est observable si pour tout instant initial  $t_o$  et pour tout instant final  $t_f > t_o$ , il est possible de déterminer l'état initial  $x(t_o)$  du système à partir de la connaissance de son comportement d'entrée-sortie sur l'intervalle  $[t_o, t_f]$ , soit les séquences  $\{u(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  et  $\{y(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$ .

**Remarque 3.9** La connaissance de l'état initial permet de reconstruire l'état du système sur l'intervalle  $[t_o, t_f]$  à partir de sa réalisation d'état et sa séquence d'entrée

$$x(t, t_o, x(t_o), u(t)) = e^{F(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Eu(t)$$

La notation  $x(t, t_o, x(t_o), u(t))$  permet de mettre en évidence toutes les variables mises en jeu dans l'état du système, notamment les instants courant et initial, l'état initial et l'entrée du système. On notera que cette reconstitution de l'état du système est vitale dans le cas où les variables d'état ne sont pas mesurables ou n'ont aucun sens physique pour qu'une telle mesure soit possible. Le mot vitale est utilisé à juste titre puisque la représentation d'état est plurielle.

Pour mieux appréhender le concept d'observabilité, considérons deux trajectoires de sortie  $\{y_1(t, t_o, x(t_o), u(t))\}$  et  $\{y_2(t, t_o, x(t_o), u(t))\}$  issues d'une même entrée et de conditions initiales différentes  $x_1(t_o) \neq x_2(t_o)$ , on a

$$y_1(t, t_o, x_1(t_o), u(t)) = He^{F(t-t_o)}x_1(t_o) + \int_{t_o}^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Eu(t)$$

et

$$y_2(t, t_o, x_2(t_o), u(t)) = He^{F(t-t_o)}x_2(t_o) + \int_{t_o}^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Eu(t)$$

Il est clair que si ces deux trajectoires de sortie sont identiquement égales, alors on ne peut pas reconstituer l'état initial à partir du comportement d'entrée-sortie du système : le système est donc inobservable. Ceci nous amène naturellement à une définition beaucoup plus élégante du concept d'observabilité.

**Définition 3.7** Un système est observable si on peut distinguer ses conditions initiales à partir de ses trajectoires de sortie obtenues avec la même entrée, i.e.

$$y_1(t, t_o, x_1(t_o), u(t)) = y_2(t, t_o, x_2(t_o), u(t)) \implies x_1(t_o) = x_2(t_o)$$

Par ailleurs, comme la différence entre les trajectoires de sortie est reliée à la différence entre les trajectoires d'état correspondantes comme suit

$$\tilde{y}_{12}(t, t_o, x_1(t_o)) = He^{F(t-t_o)} \tilde{x}_{12}(t_o)$$

avec

$$\tilde{x}_{12}(t, t_o, x_1(t_o)) = x_1(t, t_o, x_1(t_o), u(t)) - x_2(t, t_o, x_1(t_o), u(t))$$

et

$$\tilde{y}_{12}(t, t_o, x_1(t_o)) = y_1(t, t_o, x_1(t_o), u(t)) - y_2(t, t_o, x_1(t_o), u(t))$$

on peut interpréter les séquences  $\{\tilde{x}_{12}(t, t_o, x_1(t_o))\}$  et  $\{\tilde{y}_{12}(t, t_o, x_1(t_o))\}$  comme l'état et la sortie du système autonome associé au système avec une initialisation adéquate, soit

$$SA \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) \text{ avec } x(t_o) = \tilde{x}_{12}(t_o) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Cette interprétation nous amène naturellement à la définition essentielle du concept d'observabilité des systèmes linéaires

**Définition 3.8** Un système linéaire est observable si et seulement si une sortie identiquement nulle du système autonome sous-jacent ne peut provenir que d'un état initial nul.

Et cette définition conduit au **postulat essentiel de l'observabilité des systèmes linéaires**.

**Résultat 3.12** Un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$  est observable si et seulement si les colonnes de la matrice  $He^{Ft}$  sont linéairement indépendantes, soit l'identité  $He^{Ft}v = 0$  pour tout  $t$  n'est possible que si le vecteur  $v$  est nul.

**Remarque 3.10** La propriété d'observabilité des systèmes linéaires peut être étudiée en supposant que la séquence d'entrée est identiquement nulle. Elle ne concerne alors que la paire  $(H, F)$  de la réalisation d'état du système : c'est pourquoi on dit indifféremment système observable ou paire  $(H, F)$  observable. Par ailleurs, l'observabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps est indépendante du choix de l'instant initial. Ce dernier peut être alors choisi égal à zéro, i.e.  $t_o = 0$ , sans une quelconque incidence sur les résultats qui seront développés pas à pas.

### 3.2.2 L'essence du problème

Avant de présenter les résultats fondamentaux associés au concept d'observabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps, on précise les éléments essentiels pour une meilleure perception de ce concept.

**Equation essentielle.** . L'étude de l'observabilité d'un système peut se faire à partir de l'équation de la trajectoire de sortie du système homogène qui lui est associé, soit

$$y(t) = H e^{F(t-t_o)} x(t_o)$$

Et comme il existe une base de fonctions réelles  $\{\varphi_k\}_{k \in [0, n-1]}$  telle que  $e^{Ft} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t) F^k$  (voir le problème 3.1), on aura

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t - t_o) H F^k x(t_o)$$

ou d'une manière équivalente

$$y(t) = \phi(t - t_o) \mathcal{M}_o(H, F) x(t_o)$$

avec

$$\phi(t - t_o) = ( \varphi_0(t - t_o) I_p \quad \varphi_1(t - t_o) I_p \quad \dots \quad \varphi_{n-1}(t - t_o) I_p )$$

et

$$\mathcal{M}_o(H, F) = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ce système de  $n \times p$  équations à  $n$  inconnus constitue **l'équation essentielle de l'observabilité**. Et si on multiplie les deux membres de cette équation essentielle par le terme  $e^{F^T(t-t_o)} H^T$  puis on les intègre de  $t_o$  à  $t_f$ , on obtient un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues

$$\mathcal{W}_o(t_o, t_f) x(t_o) = \int_{t_o}^{t_f} e^{F^T(t-t_o)} H^T y(t) dt \quad (3.7)$$

avec

$$\mathcal{W}_o(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} e^{F^T(t-t_o)} H^T H e^{F(t-t_o)} dt \quad (3.8)$$

Ce préambule a permis de mettre en évidence l'importance des matrices  $\mathcal{M}_o(H, F)$  et  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f)$  pour la caractérisation des systèmes observables. Elles sont respectivement appelées **matrice d'observabilité et grammien d'observabilité du système** et sont étroitement liées comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat 3.13** La matrice d'observabilité et le grammien d'observabilité d'un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  sont reliés comme suit.

$$\mathcal{W}_o(t_o, t_f) = \mathcal{M}_o^T(H, F) \left( \int_{t_o}^{t_f} \phi^T(t - t_o) \phi(t - t_o) dt \right) \mathcal{M}_o(H, F)$$

avec

$$\phi(t - t_o) = \left( \varphi_o(t - t_o)I_p \quad \dots \quad \varphi_{n-1}(t - t_o)I_p \right)$$

et ont le même rang, soit

$$\text{rang} \left( \mathcal{W}_o(t_o, t_f) \right) = \text{rang} \left( \mathcal{M}_o(H, F) \right)$$

Par ailleurs, le grammien d'observabilité peut être déterminé à partir de l'équation différentielle de Lyapunov

$$\rho \mathcal{W}_o(t_o, t) = F^T \mathcal{W}_o(t_o, t) + \mathcal{W}_c(t_o, t) F + H^T H \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_o(t_o, t_o) = 0$$

**La preuve de ce résultat est triviale ; on recommande de la faire à titre d'exercice en se remémorant la formule de Leibniz (voir problème 3.14)**

**Sous-espace inobservable.** Le concept d'observabilité peut être étudié à partir de la relation entre la sortie du système homogène et l'état initial, que l'on peut interpréter comme un opérateur linéaire  $\mathcal{D}_{es}$  entre l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$  et l'espace de sortie  $\mathbb{R}^p$  définie par

$$\mathcal{D}_{es} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

avec

$$y(t) = \mathcal{D}_{se}(x_o(t)) = H e^{F(t-t_o)} x(t_o)$$

Cette interprétation nous amène naturellement à introduire l'ensemble des états initiaux qui ne sont pas perceptibles à partir de son comportement d'entrée-sortie, soit

$$\mathcal{E}_{\bar{o}} = \{v \in \mathbb{R}^n / H e^{F(t-t_o)} v = 0 \text{ pour tout } t \geq t_o\}$$

qui constitue le **sous-espace inobservable** associé au système considéré. Et compte tenu de la définition 3.8, on peut postuler naturellement qu'un système est observable si la relation état  $\mapsto$  sortie du système autonome sous-jacent est injective, soit  $\mathcal{N}(\mathcal{D}_{ye}) = \{0\}$ .

Le résultat suivant permet de caractériser complètement le sous espace inobservable en fonction des matrices d'état et de sortie du système.

**Résultat 3.14** Le sous espace inobservable de la paire  $(H, F)$  est le noyau de la matrice d'observabilité  $\mathcal{M}_o(H, F)$ , soit

$$\mathcal{E}_{\bar{o}} = \mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F))$$

C'est un sous espace vectoriel qui admet en outre les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1.$   $\mathcal{E}_{\bar{o}}$  est invariant sous la transformation linéaire associée à la matrice d'état  $F$ , soit

$$x \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F)) \implies Fx \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F))$$

$\mathcal{P}2.$  La détermination de l'état initial d'un système à partir de son comportement d'entrée-sortie est réalisée modulo  $\mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F))$ .

$\mathcal{P}3$ . La projection orthogonale de l'état initial d'un système linéaire sur le sous espace inobservable est non observable.

**Preuve.** Montrons d'abord que  $\mathcal{E}_{\bar{o}} = \mathbb{N}(\mathcal{M}_o(H, F))$ . En dérivant successivement par rapport au temps la fonction définie par  $He^{F(t-t_o)}x(t_o)$  jusqu'à l'ordre  $k$  tout en tenant compte de la définition du sous espace inobservable, on obtient

$$HF^k e^{F(t-t_o)}x(t_o) = 0 \text{ pour tout } t \geq t_o$$

Et si l'on prend  $t = t_o$  et  $k \in [0, n - 1]$ , on obtient le système d'équations linéaires

$$\mathcal{M}_o(H, F) x(t_o) = 0$$

Ceci montre clairement que le sous espace inobservable est inclus dans le noyau de la matrice d'observabilité, i.e.  $\mathcal{E}_{\bar{o}} \subset \mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F))$ . Par ailleurs, l'équation de la trajectoire de sortie (3.7) permet de conclure aisément que si  $x_o \in \mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F))$ , alors la sortie est identiquement nulle et donc  $\mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F)) \subset \mathcal{E}_{\bar{o}}$ .

La relation entre la sortie et l'état du système homogène est alors complètement décrite par la matrice d'observabilité  $\mathcal{M}_o$  : l'ensemble  $\mathcal{E}_{\bar{o}}$  est donc un sous espace vectoriel de l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ . La propriété  $\mathcal{P}1$  est une application triviale du théorème de Calyey-Hamilton. Elle stipule plus particulièrement que si un système est abandonné à lui même à un instant où son état se trouve dans le sous espace non observable, alors la trajectoire d'état du système demeure dans le sous espace inobservable et donc sa sortie est identiquement nulle. La propriété  $\mathcal{P}2$  est aussi triviale que la propriété  $\mathcal{P}1$ . Elle stipule tout simplement que le comportement d'entrée-sortie d'un système sur un intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  qui résulte d'un état initial  $x(t_o)$  est identiquement le même que celui qui en résulterait d'un état initial  $x(t_o) + \delta$  pour tout  $\delta \in \mathcal{E}_{\bar{o}}$ . On peut ainsi caractériser l'incertitude sur l'état initial. Quant à la propriété  $\mathcal{P}3$ , elle résulte du fait que tout état initial  $x_o \in \mathbb{R}^n$  du système peut être décomposé en fonction de ses projections respectives sur les sous espaces inobservable et observable, soit

$$x_o = x_{o\bar{o}} + x_{oo} \text{ avec } (x_{o\bar{o}}, x_{oo}) \in \mathcal{E}_{\bar{o}} \times \mathcal{E}_o$$

La sortie du système est alors donnée par

$$y(t) = He^{F(t-t_o)} x_o = He^{F(t-t_o)} (x_{o\bar{o}} + x_{oo}) = He^{F(t-t_o)} x_{oo}$$

*CQFD*

**Remarque 3.11** Le sous espace observable est le complément orthogonal du noyau de la matrice d'observabilité, soit

$$\mathcal{E}_o = \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_o^T(H, F)) = \mathcal{I}_m(\mathcal{M}_c(F^T, H^T))$$

Une telle propriété est la pierre d'achoppement de la dualité entre les propriétés de commandabilité et d'observabilité : le sous espace d'observabilité d'un système linéaire est égal au sous espace de commandabilité de son dual.

**Indices d'observabilité.** *Comment extraire les lignes linéairement indépendantes de la matrice d'observabilité ? C'est une question vitale pour une meilleure perception du concept d'observabilité qui sera particulièrement étudiée pour les systèmes linéaires multivariables décrits par une réalisation d'état dont la matrice de sortie est donnée par*

$$G = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_r \\ H_{r+1} \\ \vdots \\ H_p \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \text{rang}(H) = r = \text{rang} \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_r \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

*Cette propriété peut être aisément satisfaite par une indexation appropriée des sorties du système qui permet d'ordonner les lignes de la matrice d'observabilité comme suit*

$$\mathcal{M}_{op}(H, F) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{o1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{ok} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{op} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{ok} = \begin{pmatrix} H_k \\ H_k F \\ \vdots \\ H_k F^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

*Le résultat suivant conforte le postulat d'observabilité par une propriété vitale pour l'étude de l'observabilité d'un système linéaire invariant dans le temps.*

**Résultat 3.15** *Considérons un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état satisfaisant la propriété 3.9. Alors les lignes linéairement indépendantes de sa matrice d'observabilité peuvent être regroupées comme suit*

$$\mathcal{M}_{or}(H, F) = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_1 F^{\nu_1-1} \\ \vdots \\ H_k \\ \vdots \\ H_k F^{\nu_k-1} \\ \vdots \\ H_r \\ \vdots \\ H_r F^{\nu_r-1} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

*où  $\nu_k$  est le plus petit entier tel que la ligne  $H_k F^{\nu_k}$  dépend linéairement des lignes qui la précèdent au sein de la matrice  $\mathcal{M}_{or}(H, F)$ , i.e.  $H_1, H_1 F, \dots, H_1 F^{\nu_1-1}, \dots, H_k, H_k F, \dots, H_k F^{\nu_k-1}$ . Et on en déduit naturellement que*

$$\nu_i \geq 1 \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, r \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \nu_i = \text{rang}(\mathcal{M}_c(F, G)) \quad (3.12)$$

La **preuve** de ce résultat est triviale. Le premier fait découle naturellement de la propriété 3.9 de la matrice de sortie, e.g. les lignes  $H_{r+1}$  à  $H_p$  sont des combinaisons linéaires des lignes  $H_1$  à  $H_r$ , qui permet d'en déduire naturellement que toutes les lignes  $\{\mathcal{M}_{ok}(H, F_k)\}_{k \in [r+1, m]}$  sont linéairement dépendantes des lignes qui les précèdent au sein de la matrice  $\mathcal{M}_{op}(H, F)$ . Quant au second fait, il stipule que si  $H_k F^{\nu_k}$  dépend linéairement des lignes qui la précèdent au sein de la matrice  $\mathcal{M}_{or}(H, F)$ , alors il en sera de même pour les lignes  $\{H_k F^{\nu_k+i}\}_{k \in [1, r]}$ .

Ceci nous amène naturellement à la définition des indices d'observabilité (resp. indices d'observabilité cumulés) d'un système

**Définition 3.9** Pour  $i = 1, \dots, r \triangleq \text{rang}(H) \leq p$ , le  $i$ ème indice d'observabilité  $\nu_i$  (resp. indice d'observabilité cumulé  $\sigma_i$ ) du système est le plus petit entier tel que la ligne  $H_k F^{\nu_k}$  est une combinaison linéaire des lignes qui la précèdent au sein de la matrice d'observabilité ordonnée selon les indices des sorties du système (resp. la somme des indices d'observabilité  $\nu_k$  pour  $k = 1, \dots, \nu_i$ , soit  $\sigma_i = \nu_1 + \dots + \nu_i$ )

**Remarque 3.12** Dans le cas des systèmes observables dont la matrice de sortie est de rang plein, le nombre de lignes linéairement indépendantes de la matrice d'observabilité est égal à la dimension du système et on a

$$\nu_i \geq 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, m \text{ et } \sum_{i=1}^m \nu_i = n$$

Ces éléments essentiels ont permis de mieux appréhender le concept de commandabilité du point de vue fondamental pour pouvoir établir aisément les résultats fondamentaux qui lui sont associés.

### 3.2.3 Le critère usuel d'observabilité

Le résultat fondamental suivant donne un critère usuel de test d'observabilité des systèmes linéaires invariants.

**Résultat 3.16** Un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$  est observable si et seulement si sa matrice d'observabilité est de rang plein, i.e.  $\text{rang}(\mathcal{M}_o(H, F)) = n$ , ou d'une manière équivalente son grammien d'observabilité est une matrice définie positive, i.e.  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f) > 0$ .

**Preuve.** Ce résultat est une conséquence directe des résultats 3.14 et 3.13. En effet le résultat 3.14 stipule qu'un système est observable si et seulement si son sous espace inobservable est réduit à l'origine ; on aura alors

$$\mathcal{E}_o = \mathcal{N}(\mathcal{M}_o(H, F)) = \{0\} \iff \text{rang}(\mathcal{M}_o(H, F)) = n$$

Et le résultat 3.13 stipule que le rang de la matrice d'observabilité est égal au rang du grammien d'observabilité ; on aura alors

$$\text{rang}(\mathcal{M}_o(H, F)) = n \iff \text{rang}(\mathcal{W}_o(t_o, t_f)) = n$$

CQFD

Le résultat suivant révèle la nature générique de la propriété d'observabilité d'un système qui est judicieusement exploitée pour des considérations de simplicité d'analyse et parfois de synthèse.

**Résultat 3.17** *L'observabilité d'un système est une propriété invariante par un changement de base.*

**La preuve** de ce résultat est trivial. En effet, si l'on effectue un changement de base  $x(t) = T\bar{x}(t)$ , alors on passera de la réalisation  $(F, G, H, E)$  à la réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  définie par

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = TH \quad \text{et} \quad \bar{E} = E$$

La matrice d'observabilité associée à la nouvelle réalisation est donnée par

$$\mathcal{M}_o(\bar{H}, \bar{F}) = \mathcal{M}_o(H, F) T \quad (3.13)$$

### 3.2.4 Forme canonique observable

Parmi l'infinité de réalisations d'état d'un système linéaire invariant observable, on distingue une réalisation d'état dite forme canonique observable. Le résultat fondamental suivant précise la structure de cette forme canonique dans le cas des systèmes monvariables pour des considérations purement pédagogiques.

**Résultat 3.18** *Considérons une réalisation observable  $(F, G, H, E)$ , il existe un changement de base dans l'espace d'état,  $x(t) = Tx_o(t)$ , qui conduit à une réalisation  $(F_o, G_o, H_o, E_o)$  dite forme canonique observable caractérisée par*

$$F_o = \begin{pmatrix} -a_1 & & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & & \\ -a_{n-1} & & & & \\ -a_n & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_o = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

avec

$$\det(sI_n - F) = \det(sI_n - F_o) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

La matrice de passage est donnée par le produit d'une matrice de Toeplitz, qui ne dépend que des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice d'état, par la matrice d'observabilité du système, soit

$$T = \mathcal{M}_o^{-1} \mathcal{T}_\sigma^{-T} \quad \text{avec} \quad \mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La **preuve** de ce résultat peut être faite en exploitant la dualité entre les formes canoniques observable et commandable. On notera que l'appellation forme canonique observable est principalement motivée par le fait qu'elle soit observable. On peut vérifier aisément que la matrice d'observabilité sous-jacente est bien régulière puisque

$$\mathcal{M}_{oo} = \mathcal{M}_o(H, F) T = \mathcal{T}_\sigma^{-T}$$

**Remarque 3.13** On montrera ultérieurement que cette réalisation permet de déterminer d'une manière triviale le gain d'observation : une autre justification de son appellation. Notons toutefois que la forme canonique observable n'est pas utilisée pour la synthèse des observateurs pour des considérations de robustesse numérique ([7]).

**Remarque 3.14** Dans le cas des systèmes multivariables observables, la détermination d'une forme canonique d'observabilité peut être faite en effectuant un changement de base approprié à partir de la matrice d'observabilité réduite aux lignes linéairement indépendantes, en l'occurrence

$$x(t) = Px_o(t) \text{ avec } P = \mathcal{M}_{or}(F, G)$$

Les problèmes ?? et ?? permettent de mieux apprécier l'essence des formes canoniques observables.

### 3.2.5 Caractérisation des modes non observables

Lorsqu'un système n'est pas complètement observable, on peut le décomposer en une partie observable et une partie non observable comme l'indique la figure 3.2. On notera plus particulièrement que la partie non observable n'affecte pas la partie observable et n'est pas reliée à la sortie du système : l'intuition physique est préservée. D'un point de vue mathématique, cette décomposition du système selon l'observabilité est réalisée conformément au résultat fondamental suivant.

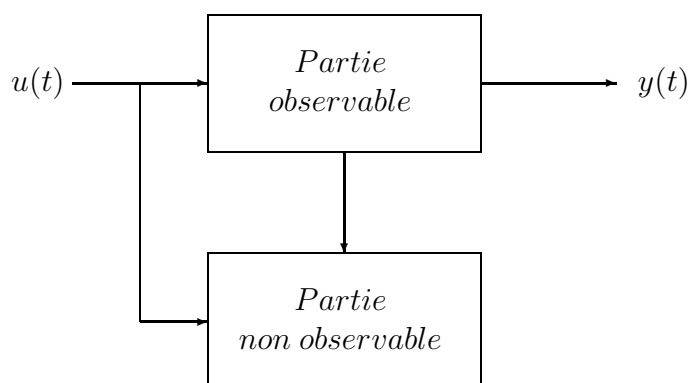


FIGURE 3.2 – Décomposition d'un système selon l'observabilité

**Résultat 3.19** Pour toute réalisation  $(F, G, H, E)$  d'ordre  $n$  telle que  $\text{rang}(\mathcal{M}_o) = r < n$ , on peut toujours effectuer un changement de base  $x(t) = T\bar{x}(t)$  avec  $T = \begin{pmatrix} T_o \\ T_{\bar{o}} \end{pmatrix}$  qui permet de

récrire le système sous la forme

$$\text{DSO} \begin{cases} \rho \bar{x}(t) = \bar{F} \bar{x}(t) + \bar{G} u(t) \\ y(t) = \bar{H} \bar{x}(t) + \bar{E} u(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

avec

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{pmatrix}, \bar{G} = \begin{pmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{pmatrix}, \bar{H} = (H_o \ 0) \text{ et } \bar{E} = E_o \quad (3.15)$$

telle que la paire  $(H_o, F_o) \in \mathcal{R}^{p \times r} \times \mathcal{R}^{r \times r}$  est une forme canonique observable et la fonction de transfert du système est donnée par

$$\bar{G}(s) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} + \bar{E} = H_o (sI_r - F_o)^{-1} G_o + E_o$$

**La preuve de ce résultat est une application du théorème de la base incomplète comme celle du résultat démonstration du résultat de décomposition selon la commandabilité modulo la dualité des propriétés d'observabilité et de commandabilité. On notera plus particulièrement que cette nouvelle base permet de récrire les équations du système comme suit**

$$\text{DSO} \begin{cases} \rho \bar{x}_o(t) = F_o \bar{x}_o(t) + G_o u(t) \\ \rho \bar{x}_{\bar{o}}(t) = F_{o\bar{o}} \bar{x}_o(t) + F_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}}(t) + G_{\bar{o}} u(t) \\ y(t) = H_o \bar{x}_o(t) + E_o u(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

La fonction de transfert peut être obtenue directement à partir de l'équation d'état de la partie observable et l'équation de sortie. Elle ne dépend pas de la partie non observable du système : les modes non observables sont alors systématiquement simplifiés. En effet, on a

$$Y(s) = H_o \bar{X}_o(s) + E_o U(s) = \left( H_o (sI_r - F_o)^{-1} G_o + E_o \right) U(s)$$

**Remarque 3.15** La décomposition selon l'observabilité permet de mieux caractériser les modes non observables par rapport aux modes observables. En effet, comme le polynôme caractéristique du système est invariant par changement de base, on aura

$$\det(sI_n - F) = \det(sI_r - F_o) \det(sI_{\bar{r}} - F_{\bar{o}})$$

Il apparaît clairement que les modes observables (resp. non observables) ne sont autres que les valeurs propres de la matrice  $F_o$  (resp. la matrice  $F_{\bar{o}}$ ). Par ailleurs, tous les modes non observables sont automatiquement simplifiés par des zéros du système. Néanmoins, il est possible que certains modes observables soient simplifiés par d'autres zéros du système.

Le résultat fondamental suivant permet de mieux caractériser les modes non observables d'un système linéaire invariant. Il est communément connu sous l'appellation de test de Popov-Belevitch-Hautus par référence à ses auteurs.

**Résultat 3.20** Une paire  $(H, F)$  est observable si et seulement si il n'existe pas de vecteur propre à droite  $v$  de la matrice d'état  $F$  tel que  $Hv = 0$ , i.e.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} H \\ sI_n - F \end{pmatrix} = n \text{ pour tout } s \in \mathcal{C}$$

Dans le cas contraire, tout couple  $(\lambda, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}^n - \{0\}$  tel que

$$Fv = \lambda v \text{ et } Hv = 0$$

est appelé mode non observable du système.

**Démonstration.** Montrons d'abord que la condition est nécessaire via la contraposée. Pour ce faire, il suffit de montrer que le système est non observable si l'un des vecteurs propres à droite de la matrice d'état est orthogonal à la matrice de sortie, i.e. il existe alors un vecteur  $v \in \mathcal{C}^n - \{0\}$  tel que

$$\begin{pmatrix} H \\ \lambda I_n - F \end{pmatrix} v = 0 \iff Fv = \lambda v \text{ et } Hv = 0$$

$\lambda$  est bien une valeur propre de  $F$  et  $v$  est le vecteur propre à droite qui lui est associé. On aura donc

$$\mathcal{M}_o(H, F)v = \begin{pmatrix} Hv \\ \lambda Hv \\ \vdots \\ \lambda^{n-1}Hv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que la matrice d'observabilité  $\mathcal{M}_o$  n'est pas de rang plein et donc le système n'est pas observable.

Montrons maintenant que la condition est suffisante via la contraposée. Pour ce faire, supposons que le système n'est pas observable, alors on peut le décomposer selon l'observabilité par un changement de base adéquat. La réalisation correspondante est caractérisée par

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{pmatrix} F_o & O \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{H} = HT = (H_o \ 0)$$

Soit  $(\lambda, v)$  un mode tel que  $F_{\bar{o}}v = \lambda v$  avec  $v^T v = 1$ , on constate que le vecteur

$$w = T \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

vérifie

$$Fw = FT \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = T\bar{F} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \lambda w$$

et

$$Hw = \bar{H}T^{-1}w = HT \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \bar{H} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = (H_o \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$$

*CQFD*

### 3.2.6 Détectabilité

La décomposition selon l'observabilité a permis de mettre en évidence les modes observables, i.e.  $\mathcal{V}(F_o)$ , et les modes non observables, i.e.  $\mathcal{V}(F_{\bar{o}})$ . Et comme les modes non observables ne sont pas perceptibles dans le comportement de sortie du système, on ne peut pas concevoir un système stable de traitement des données à partir des mesures de la sortie si les modes non observables du système ne sont pas stables. Ceci conduit naturellement au concept de détectabilité défini comme suit.

**Définition 3.10** Un système linéaire invariant est dit détectable si ses modes non observables sont asymptotiquement stables.

Compte tenu des résultats fondamentaux sur la caractérisation des modes non observables, on peut déduire aisément le résultat fondamental suivant sur la caractérisation du concept de détectabilité.

**Résultat 3.21** Le système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est détectable si et seulement si ses modes non observables sont asymptotiquement stables, i.e.

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} H \\ sI_n - F \end{pmatrix} \text{ est de rang plein pour tout } s \notin \mathcal{D}_{sa}$$

### 3.2.7 Récapitulatif

Le concept d'observabilité a permis d'étudier la relation état  $\rightarrow$  sortie du système à partir de sa matrice d'observabilité ou son grammien d'observabilité dont le résultat fondamental suivant constitue la pierre d'achoppement.

**Résultat 3.22** . Considérons un système linéaire invariant décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$ , les propriétés suivantes sont équivalentes.

$\mathcal{P}1$ . La paire  $(H, F)$  est observable.

$\mathcal{P}2$ . La paire  $(F^T, H^T)$  est commandable.

$\mathcal{P}3$ . La matrice d'observabilité du système est de rang plein, i.e.  $\text{rang}(\mathcal{M}_o(H, F)) = n$ .

$\mathcal{P}4$ . Le grammien d'observabilité est une matrice définie positive, i.e.  $\mathcal{G}_o > 0$ .

$\mathcal{P}5$ . Il n'existe aucune matrice régulière  $T$  telle que

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{pmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{H} = HT \begin{pmatrix} H_o & 0 \end{pmatrix}$$

où  $F_o \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $F_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times \bar{r}}$  et  $H_o \in \mathbb{R}^{p \times r}$  avec  $r < n$ .

$\mathcal{P}6$ . Il n'existe aucun vecteur propre à droite de la matrice d'état qui soit orthogonal à la matrice de sortie, i.e. La matrice  $\begin{pmatrix} H \\ sI_n - F \end{pmatrix}$  est de rang plein pour tout  $s \in \mathcal{C}$ .

$\mathcal{P}7$  L'identité  $H(sI_n - F)^{-1}G = 0$  pour tout  $s \in \mathcal{C}$  n'est possible que si la matrice  $G$  soit nulle.

La propriété  $\mathcal{P}2$  exprime tout simplement la dualité entre le concept de commandabilité et d'observabilité. Les propriétés  $\mathcal{P}3$  et  $\mathcal{P}4$  sont les critères usuels de test d'observabilité. Les propriétés  $\mathcal{P}5$  et  $\mathcal{P}6$  permettent de caractériser les modes non observables du système et d'introduire le concept fondamental de détectabilité d'une manière naturelle. La propriété  $\mathcal{P}5$  est issue d'une décomposition appropriée du système selon l'observabilité qui permet d'exhiber ses modes observables et ses modes non observables, i.e. les valeurs propres des matrices  $F_o$  et  $F_{\bar{o}}$ , respectivement. La propriété  $\mathcal{P}6$  est communément connue sous l'appellation de test de Popov-Belevitch- $\mathcal{H}P$ autu par référence à ses auteurs. La propriété  $\mathcal{P}7$  est une émanation naturelle de la propriété  $\mathcal{P}6$ .

### 3.3 Réalisations minimales

On présente dans ce qui suit deux ensembles de résultats fondamentaux. Le premier ensemble concerne la décomposition d'un système selon la commandabilité et l'observabilité, alors que le second ensemble est consacré à la caractérisation des réalisations minimales d'un système.

#### 3.3.1 Décomposition canonique

Les théorèmes de décomposition selon la commandabilité et l'observabilité ont respectivement permis de mettre en évidence les modes non commandables et les modes non observables d'un système. Le résultat suivant montre que l'on peut faire apparaître toutes les configurations possibles des modes d'un système comme l'indique la figure 3.3. On distingue les modes commandables et observables, les modes commandables mais non observables, les modes observables mais non commandables et les modes non observables et non commandables.

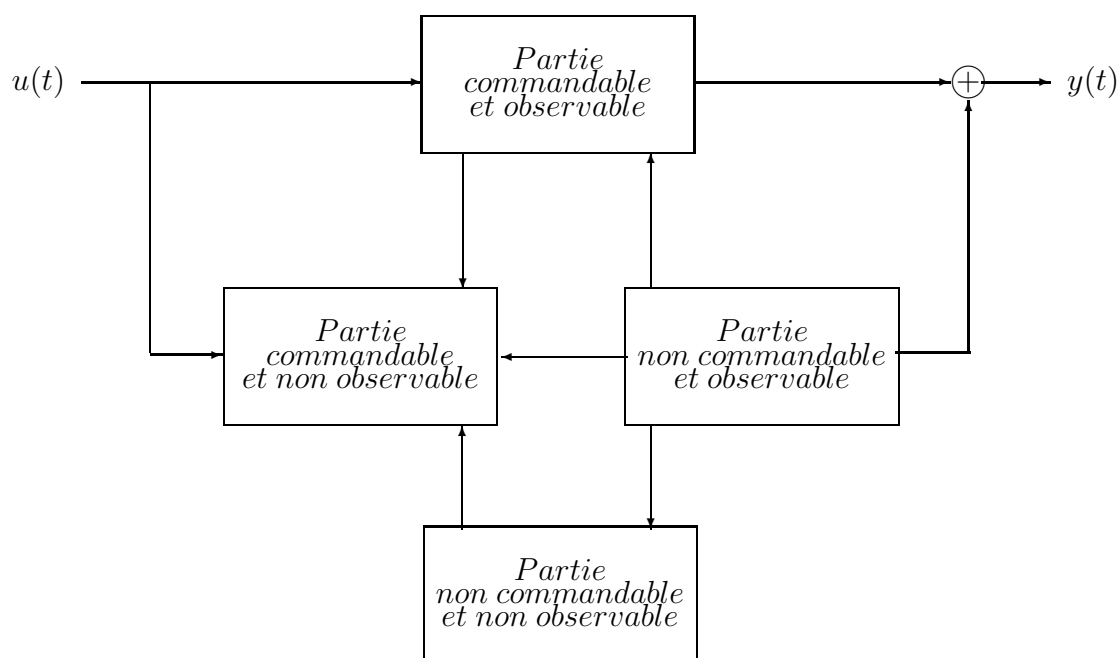


FIGURE 3.3 – Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité

**Résultat 3.23** Soit une réalisation  $(F, G, H, E)$  d'un système linéaire invariant, on peut toujours trouver un changement de base  $x(t) = T\bar{x}(t)$  qui permet de décomposer le système comme suit

$$\mathcal{DSCO} \begin{cases} \rho\bar{x}(t) = \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{G}u(t) \text{ avec } x(t_o) = T\bar{x}(t_o) \\ y(t) = \bar{H}\bar{x}(t) + \bar{E}u(t) \end{cases} \quad (3.17)$$

avec

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & F_{13} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & 0 \\ 0 & 0 & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}, \bar{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{H}^T = \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \\ H_3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{E} = E \quad (3.18)$$

où les diverses matrices  $F_{ij}$ ,  $G_k$  et  $H_\ell$  sont telles que

- 1) Le sous-système  $(F_{11}, G_1, H_1, E)$  est commandable et observable et la fonction de transfert du système est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = H_1 (sI_{nco} - F_{11})^{-1} G_1 + E$$

- 2) Le sous-système

$$\left( \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, (H_1 \ 0), E \right)$$

est commandable et non observable.

- 3) Le sous-système

$$\left( \begin{pmatrix} F_{11} & F_{13} \\ 0 & F_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \end{pmatrix}, (H_1 \ H_3), E \right)$$

est non commandable et observable.

- 4) Le sous-système  $(F_{44}, 0, 0, E)$  est non commandable et non observable.

La **preuve** de ce théorème peut être directement faite à partir de celles des décompositions selon la commandabilité et l'observabilité. On notera plus particulièrement que les seules conditions

$$(G_3, G_4) = 0 \text{ et } (H_2, H_4) = 0$$

ne sont pas suffisantes pour définir les modes non commandables et non observables. Il faut s'assurer que les variables correspondantes ne soient pas reliées par la matrice d'état à d'autres variables d'état qui seraient, elles, commandables ou observables.

La décomposition canonique permet donc de mettre en évidence les propriétés de commandabilité et d'observabilité du système que l'on peut décrire comme suit

$$\text{DSCO} \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & F_{13} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & 0 \\ 0 & 0 & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{pmatrix} + Eu(t) \end{array} \right.$$

**Remarque 3.16** D'un point de vue entrée-sortie, le système est complètement caractérisé par la réalisation commandable et observable  $(F_{11}, G_1, H_1, E)$ . La fonction du transfert du système est alors donnée par

$$\mathcal{G}(s) = H_1 (sI_{n_{co}} - F_{11})^{-1} G_1 + E$$

### 3.3.2 Réalisations minimales

Le résultat ci-dessus montre que la fonction de transfert ne représente que la partie commandable et observable du système : tous les modes non commandables et non observables sont naturellement simplifiés. On notera toutefois que le fait que tous les modes non commandables (resp. non observables) soient automatiquement simplifiés n'empêche pas que des modes commandables (resp. observables) soient également simplifiés. Cette simplification concernerait les modes commandables mais non observables (resp. observables mais non commandables). Outre la pluralité de la représentation d'état via un changement de base, on distingue une autre pluralité via une adjonction de modes non commandables et/ou non observables. L'ordre de ces réalisations peut être aussi grand que désiré. Ceci nous amène naturellement au concept de réalisation minimale d'une fonction de transfert : une représentation d'état dont l'ordre est égal à l'ordre de la fonction de transfert et est donc le plus petit possible. Le fait qu'une réalisation soit minimale ou pas est donc étroitement liée à ses propriétés de commandabilité et d'observabilité comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat 3.24** Une réalisation d'une fonction de transfert donnée est minimale si et seulement si elle est commandable et observable.

**Preuve.** Soit  $(F, G, H, E)$  une réalisation d'ordre  $n$  d'une fonction de transfert  $\mathcal{G}(z)$ , alors on a

$$\mathcal{G}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G + E$$

Supposons que la paire  $(F, G)$  est non commandable (resp. la paire  $(H, F)$  est non observable), alors on peut la décomposer selon la commandabilité (resp. selon l'observabilité) pour mettre en évidence sa partie commandable  $(F_c, G_c, H_c, E_c)$  dont l'ordre  $n_c$  est inférieur à  $n$  (resp. sa partie observable  $(F_o, G_o, H_o, E_o)$  dont l'ordre  $n_o$  est inférieur à  $n$ ). En vertu des résultats de décomposition selon la commandabilité (resp. l'observabilité), les réalisations  $(F_c, G_c, H_c, E_c)$

et  $(F, G, H, E)$  (resp.  $(F_o, G_o, H_o, E_o)$  et  $(F, G, H, E)$ ) conduisent à la même fonction de transfert. Il en résulte qu'une réalisation minimale est commandable et observable.

Montrons maintenant que si une réalisation  $(F, G, H, E)$  d'ordre  $n$  est commandable et observable, alors elle est minimale. Pour ce faire, supposons que cette réalisation n'est pas minimale, alors il existe une réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  d'ordre  $\bar{n} < n$ . Ces deux réalisations conduisent à la même fonction de transfert que la réalisation  $(F, G, H, E)$ , soit

$$\mathcal{G}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G + E = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} + \bar{E}$$

Par ailleurs, les produits de la matrice d'observabilité par la matrice de commandabilité correspondants sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_o(F, G) \mathcal{M}_c(F, G) &= \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} (G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G) \\ &= \begin{pmatrix} HG & HFG & \dots & HF^{n-1}G \\ HFG & HF^2G & \dots & HF^nG \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ HF^{n-1}G & HF^nG & \dots & HF^{2(n-1)}G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F}) \bar{\mathcal{M}}_c(\bar{H}, \bar{F}) &= \begin{pmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{pmatrix} (\bar{G} \quad \bar{F}\bar{G} \quad \dots \quad \bar{F}^{n-1}\bar{G}) \\ &= \begin{pmatrix} \bar{H}\bar{G} & \bar{H}\bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{H}\bar{F}^{n-1}\bar{G} \\ \bar{H}\bar{F}\bar{G} & \bar{H}\bar{F}^2\bar{G} & \dots & \bar{H}\bar{F}^n\bar{G} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1}\bar{G} & \bar{H}\bar{F}^n\bar{G} & \dots & \bar{H}\bar{F}^{2(n-1)}\bar{G} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme les paramètres de Markov sont invariants par changement de base, i.e.  $HF^kG = \bar{H}\bar{F}^k\bar{G}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathcal{M}_o(F, G) \mathcal{M}_c(F, G) = \bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F}) \bar{\mathcal{M}}_c(\bar{H}, \bar{F})$$

Et puisque la réalisation  $(F, G, H, E)$  est commandable et observable et que la réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  est d'ordre  $\bar{n}$ , on aura

$$\text{rang}(\mathcal{M}_o(F, G) \mathcal{M}_c(F, G)) = n$$

et

$$\begin{aligned} \text{rang}(\bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F}) \bar{\mathcal{M}}_c(\bar{H}, \bar{F})) &= \min(\text{rang}(\bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F})), \text{rang}(\bar{\mathcal{M}}_c(\bar{H}, \bar{F}))) \\ &\leq \max(\text{rang}(\bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F})), \text{rang}(\bar{\mathcal{M}}_c(\bar{H}, \bar{F}))) \\ &\leq \bar{n} \end{aligned}$$



Ce résultat est en contradiction avec le fait que le produit de la matrice d'observabilité par la matrice de commandabilité est un invariant par changement de base. Il n'est donc pas possible de trouver une réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  commandable et observable dont l'ordre est inférieur à  $n$ .

CQFD.

Le résultat suivant permet de caractériser la classe des réalisations minimales d'un système.

**Résultat 3.25** Soit  $(F, G, H, E)$  une réalisation minimale d'une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ . Toute réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  est minimale si et seulement si elle est équivalente à la réalisation  $(F, G, H, E)$ , i.e. il existe une matrice régulière  $T \in \mathbb{R}^n$  telle que

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT \quad \text{et} \quad \bar{E} = E$$

**Preuve.** Comme les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont préservées par un changement de base, il est clair que si la réalisation  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  est équivalente à la réalisation  $(F, G, H, E)$ , alors elle est minimale. Autrement, elle n'admet pas de modes non commandable et/ou non observables.

Montrons maintenant d'une manière constructive que si  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  est une autre réalisation minimale de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ , alors elle est équivalente à la réalisation  $(F, G, H, E)$ . Notons d'abord que comme les deux réalisations  $(F, G, H, E)$  et  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  sont minimales, elles sont du même ordre, les matrices de commandabilité et d'observabilité correspondantes sont régulières et de rang plein et on a

$$\mathcal{M}_o(H, F) \mathcal{M}_c(F, G) = \bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F}) \bar{\mathcal{M}}_c(\bar{F}, \bar{G})$$

et

$$\mathcal{M}_o(H, F) F \mathcal{M}_c(F, G) = \bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F}) \bar{F} \bar{\mathcal{M}}_c(\bar{F}, \bar{G})$$

Il existe donc une matrice régulière  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que

$$\bar{\mathcal{M}}_c(\bar{F}, \bar{G}) = T^{-1} \mathcal{M}_c(F, G) \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{M}}_o(\bar{H}, \bar{F}) = \mathcal{M}_o(H, F) T$$

Les deux réalisations  $(F, G, H, E)$  et  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$  sont alors bien équivalentes puisque

$$\bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT \quad \text{et} \quad \bar{F} = T^{-1}FT$$

CQFD

**Remarque 3.17** l'étude de la décomposition canonique et des réalisations minimales a particulièrement permis de mettre en évidence la puissance de la représentation d'état par rapport à la représentation par fonction de transfert et d'illustrer le rôle des paramètres de Markov pour le problème de réalisation.

## 3.4 Pôles et zéros d'un système

Les notions de pôles et zéros des systèmes multivariables ont été présentés, à partir de leur fonction de transfert, d'une manière concise au paragraphe 2.3.6. Cette présentation sera développée et confortée dans ce qui suit par une synthèse motivée et soutenue par des interprétations pertinentes des pôles et des zéros d'un système à partir de la forme de Smith-McMillan de sa fonction de transfert et sa matrice système. Une attention particulière est accordée à la vraisemblance entre les zéros de transmission et les zéros invariants.

### 3.4.1 Pôles et zéros d'une fonction de transfert

Les pôles et les zéros se sont imposés tout au long des développements de la théorie des systèmes linéaires et ont été particulièrement définis à partir de la factorization de Smith-McMillan de leur fonction de transfert comme suit

**Définition 3.11** Les zéros (resp. les pôles) de transmission de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  sont les racines des polynômes  $\Psi_i(s)$  pour  $i \in [1, r]$  (resp. des polynômes non nuls  $\Phi_i(s)$  pour  $i \in [1, r]$ ).

Par ailleurs, le résultat suivant permet de généraliser la forme de Smith d'une matrice polynomiale rationnelle propre au cas d'une matrice fractionnaire qui n'est pas nécessairement propre.

**Résultat 3.26** Toute matrice rationnelle  $\mathcal{F}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  peut être factorisée comme suit

$$\mathcal{F}(s) = B(s)\mathcal{S}_\infty(s)\bar{B}(s)$$

où  $B(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  et  $\bar{B}(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  sont deux matrices bicausales ou bipropres et  $\mathcal{S}_\infty(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle unique appelée forme de Smith-McMillan à l'infini de la matrice rationnelle  $\mathcal{F}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  qui se distingue par une structure particulière donnée par

$$\mathcal{S}_\infty(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{r\infty}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathcal{S}_{r\infty}(s) = \text{diag}(s^{-n_i})$$

où les  $n_i$  sont des entiers relatifs satisfaisant la propriété  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_i \leq \dots \leq n_r$ .

Cette forme de Smith-McMillan permet de définir les pôles et zéros à l'infini d'une fraction rationnelle.

**Définition 3.12** On dira que la matrice rationnelle  $\mathcal{F}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  admet un zéro (resp. un pôle) à l'infini d'ordre  $n_i$  si  $n_i \geq 0$  (resp.  $n_i < 0$ ).

**Remarque 3.18** Les pôles et zéros d'un système peuvent être déterminés directement à partir de ses factorisations polynomiales première à droite et à gauche à la lumière de la remarque 2.9. En effet, on peut postuler que les pôles du système ne sont autres que les racines du déterminant de la matrice polynomiale  $A_d(s)$  (resp.  $A_g(s)$ ) et que, dans le cas d'une

fonction de transfert de rang plein,  $z$  est un zéro de transmission du système si et seulement si  $\text{rang}(B_d(z)) < \min(m, p)$  (resp.  $(B_g(z)) < \min(m, p)$ ). L'hypothèse d'une fonction de transfert de rang plein n'est pas une perte de généralité dans la mesure où elle vraie dans la plupart des problèmes et peut être relâchée en s'inspirant du résultat 2.7.

### 3.4.2 Pôles et zéros d'une réalisation d'état

Les pôles d'une réalisation d'état d'un système ne sont autres que ses modes commandables et observables comme le précise le résultat suivant.

**Résultat 3.27** *Considérons un système multivariable décrit par une réalisation d'état, alors les propriétés suivantes sont vraies.*

- Les modes non commandables et/ou non observables de la réalisation d'état adoptée ne sont pas des pôles du système sous-jacent.
- Le polynôme des pôles est égal au polynôme caractéristique de la matrice d'état, i.e.  $\Phi(s) = \det(sI_n - F)$ , si et seulement si la réalisation d'état adoptée est minimale.

**La preuve** de ce résultat peut être aisément déduite des résultats qui ont été établis sur la commandabilité, l'observabilité et les réalisations minimales aux paragraphes précédents.

Ce résultat suggère de déterminer les pôles d'un système à partir des modes de ses réalisations d'état minimales en utilisant la remarque 2.4. Quant à la configuration des zéros du système, elle peut être déterminée à partir de la matrice système à la lumière du résultat 2.4. En effet, la propriété  $\mathcal{P}1$  permet de postuler que la fonction de transfert d'un système est de rang normal plein en colonnes (resp. en lignes) si et seulement sa matrice système est de rang normal plein en colonnes (resp. en lignes). Ceci suggère une caractérisation naturelle des zéros d'un système à partir de sa matrice système comme l'indique la définition suivante.

**Définition 3.13**  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro invariant de la réalisation d'état du système si la propriété de rang suivante est vérifiée

$$\text{rang}(\mathcal{M}_\sigma(\zeta)) < \text{rang normal}(\mathcal{M}_\sigma(s))$$

Cette définition concerne les zéros invariants du système qui ne sont pas nécessairement ses zéros de transmission. L'appellation zéros invariants du système est particulièrement motivée par l'invariance du rang de la matrice système par un changement de base conformément à la propriété  $\mathcal{P}2$  du résultat 2.4.

**Remarque 3.19** Dans le cas des systèmes carrés, i.e.  $p = m$ , les zéros invariants peuvent être déterminés à partir du problème des valeurs propres généralisé donné par

$$(sI_g - S_g)v_z = 0$$

avec

$$I_g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_g = \begin{pmatrix} F & G \\ H & E \end{pmatrix} \text{ et } v_z = \begin{pmatrix} x_o \\ u_z \end{pmatrix}$$

Le qualificatif généralisé adopté pour le problème de valeurs propres est justifié par le fait que  $I_g$  n'est pas une matrice identité de dimension  $g$ . Et conformément à la propriété  $\mathcal{P}3$  de la matrice système (résultat 2.4), on peut postuler que les zéros de transmission d'un système carré peuvent être déterminés à partir des zéros du déterminant de la matrice système si ces derniers ne sont pas des pôles du système.

Le résultat suivant permet de mieux apprécier la caractérisation des zéros invariants d'un système à partir de sa matrice système.

**Résultat 3.28** *Considérons un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  et supposons que la matrice système sous-jacente  $\mathcal{M}_\sigma(s)$  est de rang normal plein en colonnes (resp. en lignes). Alors  $\zeta$  est un zéro invariant du système si et seulement si il existe  $x_o \in \mathbb{C}^n - \{0\}$  et  $u_z \in \mathbb{C}^m$  (resp.  $w_z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$  et  $v_z \in \mathbb{C}^p$ ) tels que*

$$\mathcal{M}_\sigma(\zeta) \begin{pmatrix} x_o \\ u_z \end{pmatrix} = 0 \quad \left( \text{resp. } \begin{pmatrix} w_z^* & v_z^* \end{pmatrix} \mathcal{M}_\sigma(\zeta) = 0 \right)$$

Et si  $u_z = 0$  (resp.  $v_z = 0$ ), alors  $\zeta$  est un mode non observable (resp. non commandable).

**Preuve.** *Compte tenu du fait que la matrice système  $\mathcal{M}_\sigma(\zeta)$  est de rang normal plein en colonnes,  $\zeta$  est un zéro invariant du système si la propriété suivante est vraie*

$$\exists \begin{pmatrix} x_o \\ u_z \end{pmatrix} \neq 0 / \mathcal{M}_\sigma(\zeta) \begin{pmatrix} x_o \\ u_z \end{pmatrix} = 0$$

Montrons que le vecteur  $x_o$  n'est pas nul. Pour ce faire, supposons que le vecteur  $x_o$  est nul, alors on aura  $\begin{pmatrix} -G \\ E \end{pmatrix} u_z = 0$  et donc  $u_z = 0$  puisque  $\begin{pmatrix} -G \\ E \end{pmatrix}$  est une matrice de rang plein en colonnes comme la matrice système. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de rang plein en colonnes de la matrice système et donc  $x_o$  n'est pas un vecteur nul.

On notera finalement que si  $u_z = 0$ , alors on a  $\begin{pmatrix} \zeta I_n - F \\ H \end{pmatrix} x_o = 0$  et donc  $\zeta$  est un mode non observable du système en vertu de la propriété  $\mathcal{P}6$  du résultat 3.22. Le cas d'une matrice système de rang normal plein en lignes peut être aisément traité d'une manière semblable.

CQFD

Le résultat suivant précise la relation entre les zéros invariants d'un système décrit par une réalisation d'état minimale et les zéros de transmission de sa fonction de transfert.

**Résultat 3.29** *Considérons un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  et soit  $(F, G, H, E)$  une réalisation d'état minimale de cette fonction de transfert. Alors  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro de transmission de  $\mathcal{G}(s)$  si et seulement si  $\zeta \in \mathbb{C}$  est un zéro invariant de la réalisation minimale  $(F, G, H, E)$ .*

**La preuve** sera particulièrement faite dans le cas où le zéro de transmission n'est pas un pôle de la fonction de transfert, et donc un mode de la réalisation d'état puisqu'elle est minimale,

en utilisant l'identité suivante

$$\begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ H(sI_n - F)^{-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ 0 & \mathcal{G}(s) \end{pmatrix}$$

Compte tenu du fait que le zéro de transmission  $\zeta$  n'est pas un pôle de  $\mathcal{G}(s)$ , on a

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \zeta I_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} = n + \text{rang}(\mathcal{G}(s))$$

Et donc

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \zeta I_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} < \text{rang normal} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\text{rang}(\mathcal{G}(\zeta)) < \text{rang normal}(\mathcal{G}(s))$$

*CQFD*

Le résultat suivant précise la configuration des zéros des systèmes carrés, i.e.  $m = p$ , exhibant un retard uniforme  $d \geq 1$ .

**Résultat 3.30** Considérons un système carré décrit par une réalisation  $(F, G, H)$ , alors on a

$$\det(\mathcal{G}(s)) = \frac{\det(H \text{Adj}(sI_n - F) G)}{\det(sI_n - F)}$$

où  $\det(H \text{Adj}(sI_n - F) G)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - m$ ; l'égalité est vraie dans le cas d'un retard uniforme unitaire, i.e.  $\det(HG) \neq 0$ .

Ce résultat montre que les systèmes carrés admettent au plus  $n - m$  zéros (resp.  $n$  pôles) et que ces zéros (resp. pôles) sont des racines du polynôme  $\det(H \text{Adj}(sI_n - F) G)$  (resp.  $\det(sI_n - F)$ ).

### 3.4.3 Interprétation physique des pôles et zéros.

Les résultats fondamentaux sur les pôles et les zéros des systèmes multivariables ont été obtenus en exploitant judicieusement leurs propriétés structurelles pour mieux apprécier leur nature. Le premier résultat permet de montrer que les pôles d'un système sont perceptibles dans ses réponses non identiquement nulles à une entrée identiquement nulle modulo des conditions initiales appropriées.

**Résultat 3.31** Considérons un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times n}(s)$  ou une réalisation minimale  $(F, G, H, E)$  qui lui est associée.  $\lambda$  est un pôle du système si et seulement si il existe un état initial  $x_o \in \mathbb{R}^n$  et un vecteur  $y_o \in \mathbb{R}^{*p}$  tels que la réponse du système correspondant à une entrée identiquement nulle est donnée par

$$y(t) = y_o e^{\lambda t}$$

**Preuve.** Montrons d'abord que la condition est suffisante, soit

$$\left( \exists (x_o, y_o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{*p} / y(t) = y_o e^{\lambda t} \right) \implies \left( \det(\lambda I_n - F) = 0 \right)$$

Comme la réponse du système à une entrée identiquement nulle est donnée par

$$y(t) = Hx(t) = He^{Ft}x_o$$

on a

$$y(t) = He^{Ft}x_o = y_o e^{\lambda t}$$

$\iff$

$$Y(s) = H(sI_n - F)^{-1}x_o = y_o(s - \lambda)^{-1}$$

$\iff$

$$(s - \lambda) H \text{Adj}(sI_n - F) x_o = y_o \det(sI_n - F)$$

$\implies$

$$\lambda \in \mathcal{V}(F)$$

Cette dernière relation montre clairement que  $\lambda$  est bien une valeur propre de la matrice d'état  $F$  et est donc un pôle du système puisque la réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est minimale.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire, soit

$$\left( (\lambda, v) \text{ est un mode de } F \right) \implies \left( \exists (x_o, y_o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{*p} / y(t) = y_o e^{\lambda t} \right)$$

Si on prend comme état initial un vecteur propre  $v$  à droite de la matrice  $F$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a

$$y(t) = He^{Ft}x_o = He^{Ft}v = He^{\lambda t}v = Hv e^{\lambda t}$$

L'avant dernière égalité est due au fait que si  $(\lambda, v)$  est un mode de la matrice  $F$ , alors  $(e^{\lambda t}, v)$  est un mode de la matrice  $e^{Ft}$ . Et comme la paire  $(H, F)$  est observable, le mode  $(\lambda, v)$  est observable et donc le produit scalaire  $Hv$  n'est pas nul. On a bien le résultat escompté avec  $x_o = v$  et  $y_o = Hv$ .

*CQFD*

Le second résultat précise la classe des entrées bloquées par le système en fonction de sa configuration des zéros, modulo des conditions initiales appropriées.

**Résultat 3.32** Considérons un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  ou une réalisation minimale  $(F, G, H, E)$  qui lui est associée et un nombre complexe  $\zeta$  qui n'est pas une valeur propre de  $F$ , i.e.  $\zeta \notin \mathcal{V}(F)$ . La réponse du système correspondante à l'état initial  $x_z = -(F - \zeta I_n)^{-1} G u_z$  et l'entrée  $u(t) = u_z e^{\zeta t}$  est donnée par

$$y(t) = \mathcal{G}(\zeta) u_z e^{\zeta t} \text{ pour tout } t \geq 0$$

**Preuve.** On notera d'abord que si  $\zeta$  n'est pas une valeur propre de  $F$ , alors on a

$$(sI_n - F)^{-1} (s - \zeta)^{-1} = (\zeta I_n - F)^{-1} (s - \zeta)^{-1} + (sI_n - F)^{-1} (F - \zeta I_n)^{-1}$$

Ce résultat peut être vérifié tout simplement en prémultipliant par  $(F - \zeta I_n)$  et postmultipliant par  $(sI_n - F)$  puisque les matrices  $(sI_n - F)$  et  $(F - \zeta I_n)$  commutent.

La sortie d'un système décrit par une réalisation  $(F, G, H, E)$  peut se mettre sous la forme

$$Y(s) = H (sI_n - F)^{-1} x_z + H (sI_n - F)^{-1} G U(s)$$

soit

$$Y(s) = H (sI_n - F)^{-1} x_z + H (sI_n - F)^{-1} G u_z (s - \zeta)^{-1} + E u_z (s - \zeta)^{-1}$$

puisque  $u(t) = u_z e^{\zeta t}$  pour tout  $t \geq 0$  dans le cas considéré. Et compte tenu de la relation donnée ci dessus, on obtient

$$\begin{aligned} Y(s) &= H (sI_n - F)^{-1} x_z + H (\zeta I_n - F)^{-1} G u_z (s - \zeta)^{-1} \\ &\quad + H (sI_n - F)^{-1} (F - \zeta I_n)^{-1} G u_z (s - \zeta)^{-1} + E u_z (s - \zeta)^{-1} \\ &= H (sI_n - F)^{-1} (x_z + (F - \zeta I_n)^{-1} G u_z) + \mathcal{G}(\zeta) u_z (s - \zeta)^{-1} \end{aligned}$$

On aura donc le résultat escompté, notamment

$$(u(t) = u_z e^{\zeta t} \text{ pour tout } t \geq 0) \text{ et } (x_z = -(F - \zeta I_n)^{-1} G)$$

$\Leftrightarrow$

$$(y(t) = \mathcal{G}(\zeta) u_z e^{\zeta t} \text{ pour tout } t \geq 0)$$

Ce résultat donne une interprétation physique des zéros d'un système : si  $\zeta$  est un zéro du système, alors la réponse du système à une entrée  $u(t) = u_z e^{\zeta t}$ , pour tout  $u_z \in \mathbb{R}^m$  et un état initial  $x_z = -(F - \zeta I_n)^{-1} G u_z$ , est identiquement nulle. On dit qu'une telle entrée est bloquée par le système, ce qui justifie l'appellation zéro de blocage.

*CQFD*

### 3.4.4 Directions des pôles et des zéros

Les pôles (resp. les zéros) d'un système multivariable ont des directions aussi bien en entrée qu'en sortie du système, que l'on désignera par  $u_p$  et  $y_p$  (resp.  $u_z$  et  $y_z$ ). Ces directions peuvent être déterminées directement à partir de l'évaluation de la fonction de transfert du système en  $p$  (resp. en  $z$ ) en vertu de la relation brute

$$\mathcal{G}(p_i) u_p = \infty y_p \quad (\text{resp. } \mathcal{G}(z) u_z = 0 y_z)$$

puisque  $\mathcal{G}(p)$  (resp.  $\mathcal{G}(z)$ ) est une matrice complexe infinie dans la direction du pôle  $p$  (resp. nulle dans la direction du zéro  $z$ ). On montre aisément que les directions du pôle  $p$  (resp. du zéro  $z$ ) peuvent être naturellement obtenues à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice complexe  $\mathcal{G}(p)$  de rang  $rp$  (resp.  $\mathcal{G}(z)$  de rang  $rz$ ); soit  $\mathcal{G}(p) = V_p \Sigma_p W_p^*$  (resp.  $\mathcal{G}(z) = V_z \Sigma_z W_z^*$ ) où  $\Sigma_p$  (resp.  $\Sigma_z$ ) est une matrice constituée des valeurs singulières de  $\mathcal{G}(p)$  (resp.  $\mathcal{G}(z)$ ) et  $V_p$  et  $W_p$  (resp.  $V_z$  et  $W_z$ ) sont des matrices unitaires respectivement constituées par les vecteurs singuliers en sortie et en entrée de la matrice  $\mathcal{G}(p)$  (resp.  $\mathcal{G}(z)$ ) associés aux valeurs singulières  $\sigma_{p_i}$  (resp.  $\sigma_{z_i}$ ) pour  $i = 1, \dots, rp$  (resp.  $i = 1, \dots, rz$ ).

**Remarque 3.20** Dans le cas d'un système décrit par une réalisation d'état minimale ayant des modes distincts, alors les pôles du système ne sont autres que les modes du système et la direction d'un pôle  $p_i$  en entrée (resp. en sortie) est donnée par

$$u_{p_i} = G^* w_i \quad (\text{resp. } y_{p_i} = H w_i)$$

où  $v_i$  (resp.  $w_i$ ) est le vecteur propre à droite (resp. à gauche) de la matrice d'état associé au mode  $p_i$ . Et compte tenu du résultat 3.9 (resp. résultat 3.20), on en déduit naturellement que la direction en entrée (resp. en sortie) est nulle si le mode n'est pas commandable (resp. n'est pas observable).

Par ailleurs, les zéros de transmission du système déterminés à partir de la matrice système conformément au résultat 3.28 et la direction en entrée (resp. en sortie) du zéro  $z$  n'est autre que le vecteur complexe  $v_z$  (resp.  $w_z$ ) qui y figure.

Le problème 3.12 illustre l'importance des directions des pôles et zéros d'un système multivariable, notamment des pôles et zéros communs avec des directions différentes, il concerne le cas de l'exemple 2.5.

### 3.5 Systèmes interconnectés

Les systèmes sont généralement conçus à partir d'un ensemble d'interconnexions appropriées de sous-systèmes décrits par des réalisations d'état minimales qui ont éventuellement des pôles et des zéros communs qui ne sont pas nécessairement des modes commandables (resp. des modes observables) du système. Pour une meilleure perception de cette problématique, on se focalise d'abord sur les trois interconnexions élémentaires de la composition des systèmes, en l'occurrence les interconnexions cascade, parallèle et contre réaction respectivement données par les figures 2.7, 2.8 et 2.9, dans le cas où les sous-systèmes  $\mathcal{S}YS1$  et  $\mathcal{S}YS2$  sont monovariables. Les éléments suivants favorisent la compréhension de la problématique.

$\mathcal{E}1$ . La fonction de transfert de l'interconnection en cascade est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_2(s) \mathcal{G}_1(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)} \frac{B_1(s)}{A_1(s)} = \frac{B_\sigma(s)}{A_\sigma(s)}$$

Les simplifications éventuelles de la fonction de transfert concernent les pôles  $\mathcal{S}YS1$



(resp.  $\mathcal{SYS}2$ ) avec les zéros de  $\mathcal{SYS}2$  (resp.  $\mathcal{SYS}1$ ), soit  $\text{pgcd}(A_1(s), B_2(s))$  (resp.  $\text{pgcd}(A_2(s), B_1(s))$ ). Il est évident que

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) = \mathcal{CM}(\mathcal{G}(s)) \iff \text{pgcd}(A_1(s), B_2(s)) = \text{pgcd}(A_2(s), B_1(s)) = 1$$

$\mathcal{E}2$ . La fonction de transfert de l'interconnection en parallèle est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_1(s) + \mathcal{G}_2(s) = \frac{B_1(s)A_2(s) + B_2(s)A_1(s)}{A_1(s)A_2(s)} = \frac{B_\sigma(s)}{A_\sigma(s)}$$

Les simplifications éventuelles de la fonction de transfert concernent les pôles de  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$ , soit  $\text{pgcd}(A_1(s), A_2(s))$ . La propriété suivante est triviale

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) = \mathcal{CM}(\mathcal{G}(s)) \iff \text{pgcd}(A_1(s), A_2(s)) = 1$$

$\mathcal{E}3$ . La fonction de transfert de l'interconnection en contre réaction, comme l'indique la figure 2.9, est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mathcal{G}_1(s)}{1 + \mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) + B_1(s)B_2(s)} = \frac{B_\sigma(s)}{A_\sigma(s)}$$

Les simplifications éventuelles de la fonction de transfert concernent les pôles de  $\mathcal{SYS}1$  (resp.  $\mathcal{SYS}2$ ) avec les zéros de  $\mathcal{SYS}2$  (resp.  $\mathcal{SYS}1$ ). La propriété suivante est évidente

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) = \mathcal{CM}(\mathcal{G}(s)) \iff \text{pgcd}(A_1(s), B_2(s)) = \text{pgcd}(A_2(s), B_1(s)) = 1$$

Cette information sur les éventuelles simplifications des pôles et des zéros des sous-systèmes interconnectés permet d'étudier aisément leur commandabilité et leur observabilité dont les résultats sont données ci-dessous.

**Résultat 3.33** La cascade constituée des systèmes  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  est commandable (resp. observable) si et seulement si  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  sont complètement caractérisés par des réalisations minimales et il n'y a aucune simplification entre les pôles de  $\mathcal{SYS}2$  et les zéros de  $\mathcal{SYS}1$  (resp. les pôles de  $\mathcal{SYS}1$  et les zéros de  $\mathcal{SYS}2$ )

**Résultat 3.34** Le système constitué du système  $\mathcal{SYS}1$  en parallèle avec  $\mathcal{SYS}2$  est commandable et observable si et seulement si  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  sont commandables et observables et qu'il n'y a aucune simplification entre les pôles de  $\mathcal{SYS}2$  et  $\mathcal{SYS}1$ .

**Résultat 3.35** Le système constitué du système  $\mathcal{SYS}1$  en rétroaction avec  $\mathcal{SYS}2$  est commandable et observable si et seulement si  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  sont commandables et observables et qu'il n'y a aucune simplification entre les pôles de  $\mathcal{SYS}2$  et les zéros de  $\mathcal{SYS}1$ .

On donnera plus particulièrement la preuve du résultat sur l'interconnexion du type cascade que l'on peut utiliser pour élaborer les preuves des autres des autres interconnexions. Pour ce faire, on notera d'abord que la cascade peut être décrite par la représentation d'état suivante

en vertu des résultats du paragraphe 2.5 du chapitre 2.

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \rho x_a(t) = F_a x_a(t) + G_a u(t) \\ y(t) = H_a x_a(t) + E_a u(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

avec

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$F_a = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ G_2 H_1 & F_2 \end{pmatrix}, G_a = \begin{pmatrix} G_1 E_2 \\ G_2 \end{pmatrix}, H_a = (H_1 \quad E_2 H_2) \text{ et } E_a = E_2 E_1 \quad (3.21)$$

Les aspects suivants permettent de mieux appréhender les propriétés de commandabilité et d'observabilité de la cascade et motiver pourquoi les réalisations d'état des systèmes qui la composent sont supposées être minimales.

- Comme les réalisations d'état des systèmes sont minimales, ils sont commandables et observables et donc ne conduisent pas à des simplifications pôles-zéros, i.e.

$$\text{pgcd}(B_1(s), A_1(s)) = \text{pgcd}(B_2(s), A_2(s)) = 1$$

- Les propriétés de commandabilité des systèmes sont nécessaires, autrement les modes non commandables seraient aussi des modes non commandables de la cascade. Par ailleurs, si la cascade n'est pas commandable, alors ses modes non commandables sont nécessairement des modes du système  $\mathcal{SYS}2$ . Autrement le système  $\mathcal{SYS}1$  ne serait pas commandable.
- Les propriétés d'observabilité des systèmes sont nécessaires, autrement les modes non observables seraient aussi des modes non observables de la cascade. Par ailleurs, si la cascade n'est pas observable, alors ses modes non observables sont nécessairement des modes du système  $\mathcal{SYS}1$ . Autrement le système  $\mathcal{SYS}2$  ne serait pas observable.
- Les propriétés de commandabilité (resp. d'observabilité) de la cascade dépendent essentiellement des simplifications entre les pôles du système  $\mathcal{SYS}2$  et les zéros du système  $\mathcal{SYS}1$  (resp. les pôles du système  $\mathcal{SYS}1$  et les zéros du système  $\mathcal{SYS}2$ )
- Le système augmenté n'est pas observable à partir de la sortie du système  $\mathcal{SYS}1$  puisque la représentation d'état associée est naturellement sous la forme d'une décomposition selon l'observabilité.
- Comme les propriétés de commandabilité et d'observabilité d'un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  ne concernent pas la matrice d'entrée  $E$ , on peut l'occulter sans aucune perte de généralité.

Ces aspects sont judicieusement utilisés pour établir agréablement les preuves associées au résultat 3.33.

**La première preuve concerne la commandabilité de la cascade.** *En utilisant les notations considérées, ce résultat stipule que*

$$(F_a, G_a) \text{ est commandable} \iff \text{pgcd}(B_1(s), A_2(s)) = 1$$

*ou d'une manière équivalente*

$$\text{pgcd}(B_1(s), A_2(s)) \neq 1 \iff (F_a, G_a) \text{ n'est pas commandable}$$

*On notera d'abord que si la cascade n'est pas commandable, alors ses modes non commandables sont nécessairement des modes du système  $\mathcal{SYS}2$ . Autrement le système  $\mathcal{SYS}1$  ne serait pas commandable. Et comme les réalisations des deux systèmes sont minimales, la simplification des modes non commandables ne peut se faire qu'avec les zéros du système  $\mathcal{SYS}1$ . La condition est donc bien nécessaire.*

*Montrons maintenant que la condition est suffisante en appliquant le test Popov-Belevitch-Hautus. En effet, supposons que les polynômes  $B_1(p)$  et  $A_2(p)$  ont une racine commune que l'on notera  $\lambda_{\bar{c}}$  et montrons qu'elle correspond à un mode non commandable de la cascade. Il suffit de montrer la valeur propre  $\lambda_{\bar{c}}$  de la cascade admet un vecteur propre à gauche  $V_{cg} \in \mathbb{R}^{n_a}$  qui est orthogonal à la matrice d'entrée  $G_a$ . En effet, posons*

$$V_{cg}^T = ( V_{c1}^T \quad V_{c2}^T )$$

*on a*

$$( V_{c1}^T \quad V_{c2}^T ) \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ G_2 H_1 & F_2 \end{pmatrix} = \lambda_{\bar{c}} ( V_{c1}^T \quad V_{c2}^T )$$

*soit*

$$V_{c2}^T (\lambda_{\bar{c}} I_{n_2} - F_2) = 0 \text{ et } V_{c1}^T = V_{c2}^T G_2 H_1 (\lambda_{\bar{c}} I_{n_1} - F_1)^{-1}$$

*Et comme  $\lambda_{\bar{c}}$  est un zéro du système  $\mathcal{SYS}1$ , on a bien*

$$V_{cg}^T G_a = ( V_{c1}^T \quad V_{c2}^T ) \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_{c2}^T G_2 H_1 (\lambda_{\bar{c}} I_{n_1} - F_1)^{-1} G_1 = 0$$

*CQFD.*

**La seconde preuve concerne l'observabilité de la cascade.** *En utilisant les notations considérées, ce résultat stipule que*

$$(H_a, F_a) \text{ est observable} \iff \text{pgcd}(A_1(s), B_2(s)) = 1$$

*ou d'une manière équivalente*

$$\text{pgcd}(A_1(s), B_2(s)) \neq 1 \iff (H_a, F_a) \text{ n'est pas observable}$$

*On notera d'abord que si la cascade n'est pas observable, alors ses modes non observables sont nécessairement des modes du système  $\mathcal{SYS}1$ . Autrement le système  $\mathcal{SYS}2$  ne serait pas observable. Et comme les réalisations des deux systèmes sont minimales, la simplification des modes non observables ne peut se faire qu'avec les zéros du système  $\mathcal{SYS}2$ . La condition est donc bien nécessaire.*

Montrons maintenant que la condition est suffisante en appliquant le test Popov-Belevitch-Hautus. En effet, supposons que les polynômes  $A_1(s)$  et  $B_2(s)$  ont une racine commune que l'on notera  $\lambda_{\bar{o}}$  et montrons qu'elle correspond à un mode non observable de la cascade. Il suffit de montrer la valeur propre  $\lambda_{\bar{o}}$  de la cascade admet un vecteur propre à droite  $V_{od} \in \mathbb{R}^{n_a}$  qui est orthogonal à la matrice de sortie  $H_a$ . En effet, posons

$$V_{od} = \begin{pmatrix} V_{o1} \\ V_{o2} \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ G_2 H_1 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{o1} \\ V_{o2} \end{pmatrix} = \lambda_{\bar{o}} \begin{pmatrix} V_{o1} \\ V_{o2} \end{pmatrix}$$

soit

$$(\lambda_{\bar{o}} I_{n1} - F_1) V_{o1} = 0 \text{ et } V_{o2} = (\lambda_{\bar{o}} I_{n2} - F_2)^{-1} G_2 H_1 V_{o1}$$

Et comme  $\lambda_{\bar{o}}$  est un zéro du système  $\mathcal{SY}S2$ , on a bien

$$H_a V_{od} = \begin{pmatrix} 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{o1} \\ V_{o2} \end{pmatrix} = H_2 V_{o2} = H_2 (\lambda_{\bar{o}} I_{n2} - F_2)^{-1} G_2 H_1 V_{o1} = 0 \quad \mathcal{CQFD}.$$

L'extension de ces résultats au cas des systèmes multivariables a été faite en adoptant une approche polynomiale exploitant judicieusement les propriétés des factorisations premières d'une fonction de transfert ([15], [46]). Pour ce faire, on notera d'abord que si les sous-systèmes de la cascade sont respectivement décrits par leurs factorisations premières, soit

$$\mathcal{G}_i(s) = A_{il}^{-1}(s) B_{il}(s) = B_{ir}(s) A_{ir}^{-1}(s) \text{ pour } i = 1, 2 \quad (3.22)$$

alors la fonction de transfert de la cascade est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = B_{2r}(s) (A_{1l}(s) A_{2r}(s))^{-1} B_{1l}(s) = A_{2l}^{-1}(s) (B_{2r}(s) B_{1r}(s)) A_{1r}^{-1}(s) \quad (3.23)$$

Le résultat suivant précise les conditions requises pour la commandabilité (resp. l'observabilité) de la cascade à partir des factorisations premières des fonctions de transfert des sous-systèmes qui la composent.

**Résultat 3.36** *Considérons la cascade de la figure 2.7 et supposons que les sous-systèmes sont décrits par les factorisations premières de leurs fonctions de transfert (3.22). Alors la cascade est commandable (resp. observable) si et seulement si les matrices de l'une des trois paires de matrices polynomiales  $(A_{2r}(s), B_{1r}(s))$ ,  $(A_{1l}(s) A_{2r}(s), B_{1l}(s))$  ou  $(A_{2l}(s), B_{2l}(s) B_{1r}(s))$  sont premières à gauche (resp. les matrices de l'une des trois paires de matrices polynomiales  $(A_{1l}(s), B_{2l}(s))$ ,  $(A_{1l}(s) A_{2r}(s), B_{2r}(s))$  ou  $(A_{r1}(s), B_{2l}(s) B_{1r}(s))$  sont premières à droite)*

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes pour la commandabilité (resp. l'observabilité) de la cascade à partir des configurations de pôles et de zéros des fonctions de transfert des sous-systèmes qui la composent modulo une condition sur les nombres des entrées et des sorties

**Résultat 3.37** *Considérons la cascade de la figure 2.7 et supposons que  $\mathcal{SYS}1$  admet autant sinon plus d'entrées que de sorties, i.e.  $m_1 \geq p_1$  et  $\mathcal{SYS}2$  admet autant sinon plus de sorties que d'entrées, i.e.  $p_2 \geq m_2$ . Alors la cascade est commandable (resp. observable) pourvu qu'il ny ait aucune simplification entre les pôles de  $\mathcal{SYS}2$  et les zéros de transmission  $\mathcal{SYS}1$  (resp. les pôles de  $\mathcal{SYS}2$  et les zéros de transmission de  $\mathcal{SYS}1$ ).*

**Résultat 3.38** *Le système constitué du système  $\mathcal{SYS}1$  en parallèle avec  $\mathcal{SYS}2$  est commandable et observable si et seulement si  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  sont commandables et observables et qu'il n'y a aucune simplification entre les pôles de  $\mathcal{SYS}2$  et  $\mathcal{SYS}1$ .*

**Résultat 3.39** *Le système constitué du système  $\mathcal{SYS}1$  en rétroaction avec  $\mathcal{SYS}2$  est commandable (resp. observable) si et seulement si la cascade constituée de  $\mathcal{SYS}1$  et  $\mathcal{SYS}2$  est commandable (resp. la cascade constituée de  $\mathcal{SYS}2$  et  $\mathcal{SYS}1$  est observable)*

*Les preuves de ces résultats sont particulièrement détaillés dans [15] et [46]) où la problématique des simplifications entre les pôles et les zéros de transmission au sein des interconnexions élémentaires des systèmes est particulièrement bien développée.*

*Les résultats suivants précisent les conditions de perte de commandabilité et d'observabilité d'une cascade dans le cas où la matrice de sortie du premier système et la matrice d'entrée du second système sont de rang plein.*

**Résultat 3.40** *Considérons la cascade de la figure 2.7 et supposons que ses sous-systèmes sont décrits par des réalisations d'état minimales et que la matrice de sortie du premier système et la matrice d'entrée du second système sont de rang plein.  $\mu$  est un mode non commandable de la cascade si et seulement si  $\mu$  est un zéro de  $\mathcal{SYS}1$  et un pôle de  $\mathcal{SYS}2$  tel que la propriété suivante est vraie.*

$$\exists w_2 \in \mathbb{R}^{n_2} / w_2^T (\mu I_{n_2} - F_2) = 0 \text{ et } w_2^T G_2 (H_1 (\mu I_{n_1} - F_1)^{-1} G_1) = 0$$

**Preuve.** *Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Comme la cascade est décrite par la réalisation d'état donnée par*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ G_2 H_1 & F_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (0 \quad H_2)$$

*Si la condition est vraie, alors on peut considérer le vecteur*

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad w_1^T = w_2^T G_2 H_1 (\mu I_{n_1} - F_1)^{-1}$$

*et vérifier aisément que  $\mu$  est un mode non commandable de la cascade en vertu du critère PBH du résultat 3.9, soit  $w^T F = \mu w^T$  et  $w^T G = 0$ .*

*Montrons que la condition est suffisante. Pour ce faire, notons d'abord que les seules valeurs*

de  $\mu$  satisfaisant l'équation

$$w^T F = \mu w^T \iff \begin{pmatrix} w_1^T & w_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ G_2 H_1 & F_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} w_1^T & w_2^T \end{pmatrix}$$

sont les valeurs propres de  $F_1$  ou  $F_2$  et étudions séparément les deux cas.

Supposons que  $\mu$  est une valeur propre de  $F_2$ , alors  $w_2$  est un vecteur propre à gauche de  $F_2$  et  $w_1^T = w_2^T G_2 H_1 (\lambda I_{n_1} - F_1)^{-1}$ . Par ailleurs, comme la réalisation d'état de  $\mathcal{SYS}2$  est minimale, on a  $w_2^T G_2 \neq 0$  et donc  $\mu$  est un mode non commandable de la cascade, i.e.  $w_1^T G_1 = 0$  seulement si  $w_2^T G_2 (H_1 (\mu I_{n_1} - F_1)^{-1} G_1) = 0$ . Ainsi  $\mu$  est un zéro de  $\mathcal{SYS}1$  dont  $w_2^T G_2$  est la direction.

Autrement, si  $\mu$  est une valeur propre de  $F_1$ , alors  $w_1$  est un vecteur propre à gauche de  $F_1$  et  $w_2 = 0$ . Et donc si  $\mu$  un mode non commandable de la cascade, alors on aura  $w^T G = 0$ . Ceci est en contradiction avec la condition de minimalité de la réalisation d'état de  $\mathcal{SYS}1$  puisque  $w^T G = w_1^T G_1$  et donc  $\mu$  n'est pas une valeur propre de  $F_1$ .

*CQFD*

**Résultat 3.41** Considérons la cascade de la figure 2.7 et supposons que ses sous-systèmes sont décrits par des réalisations d'état minimales et que la matrice de sortie du premier système et la matrice d'entrée du second système sont de rang plein.  $\mu$  est un mode non observable de la cascade si et seulement si  $\mu$  est un pôle de  $\mathcal{SYS}1$  et un zéro de  $\mathcal{SYS}2$  tel que la propriété suivante est vraie.

$$\exists v_1 \in \mathbb{R}^{n_1} / (\mu I_{n_2} - F_2) v_1 = 0 \text{ et } (H_2 (\mu I_{n_2} - F_2) G_2) H_1 v_1 = 0$$

La **preuve** de ce résultat peut être aisément faite à partir de la preuve du résultat 3.40 en exploitant le concept de dualité. Pour mieux apprécier les choses, on suggère de traiter le problème 3.13.

## 3.6 Systèmes linéaires variants dans le temps

La plupart des problèmes d'estimation optimale et d'adaptation paramétrique peuvent être reformulés sous la forme d'un problème de convergence d'un système linéaire variant dans le temps décrit par la représentation d'état (2.101). On se propose dans ce paragraphe d'étudier la commandabilité et l'observabilité de cette classe de systèmes pour mieux apprécier le concept de grammien de commandabilité (resp. d'observabilité) qui est au coeur des algorithmes de commande (resp. d'estimation) optimale.

**Commandabilité.** Le résultat suivant montre que la commandabilité des systèmes linéaires variants dans le temps est complètement caractérisée par leur grammien de commandabilité sur un intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  par la matrice symétrique et définie non négative donnée par

$$\mathcal{W}_c(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_o, \tau) G(\tau) G^T(\tau) \phi^T(t_o, \tau) d\tau \quad (3.24)$$

**Résultat 3.42** *Considérons le système linéaire variant dans le temps (2.101) et supposons que sa réalisation d'état est continue par morceaux. Alors le système est commandable si et seulement si pour tout instant  $t_o$ , il existe un instant final  $t_f > t_o$  tel que le grammien de commandabilité est une matrice définie positive, i.e.  $\mathcal{W}_c(t_o, t_f) > 0$ .*

**Preuve.** *Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Pour ce faire, supposons que la matrice  $\mathcal{W}_c(t_o, t_f)$  soit définie positive sur l'intervalle de temps  $[t_o, t_f]$ , alors on peut utiliser la loi de commande admissible*

$$u(t) = G^T(t)\phi^T(t_f, t)\mathcal{W}_c^{-1}(t_o, t_f) (x(t_f) - \phi(t_f, t_o)x(t_o))$$

*pour réaliser une transition arbitraire de l'état du système  $x(t_o) \rightarrow x(t_f)$ . En effet, on a*

$$\int_{t_o}^{t_f} \phi(t_f, t)G(t)u(t)dt = \mathcal{W}_c(t_o, t_f)\mathcal{W}_c^{-1}(t_o, t_f) (x(t_f) - \phi(t_f, t_o)x(t_o))$$

*ou d'une manière équivalente*

$$x(t_f) = \phi(t_f, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_f, t)G(t)u(t)dt$$

*On retrouve ainsi la solution de l'équation d'état du système.*

*Montrons maintenant que la condition est nécessaire via la contraposée de l'implication. Supposons que la matrice  $\mathcal{W}_c(t_o, t_f)$  soit singulière pour tout  $(t_o, t_f) \in \mathcal{R}^2$ , alors il existe un vecteur non nul  $v \in \mathcal{R}^n$  tel que*

$$v^T \mathcal{W}_c(t_o, t_f)v = \int_{t_o}^{t_f} \|v^T \phi(t_o, t)G(t)\|^2 dt = 0$$

*ou d'une manière équivalente*

$$v^T \phi(t_o, t)G(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [t_o, t_f]$$

*Et compte tenu de l'équation d'état du système, on peut conclure qu'il existe un vecteur non nul  $v \in \mathcal{R}^n$  tel que*

$$v^T (\phi(t_o, t_f)x(t_f) - x(t_o)) = \int_{t_o}^{t_f} v^T \phi(t_o, t)G(t)u(t)dt = 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}_a$$

*L'ensemble des états atteignables à partir de l'état  $\phi(t_o, t_f)x(t_f) - x(t_o)$  n'est pas égal à l'espace d'état tout entier : c'est une obstruction à la commandabilité.*

*CQFD*

**Remarque 3.21** *Outre le test de commandabilité d'un système, le grammien de commandabilité permet de déterminer une loi de commande admissible réalisant une transition arbitraire de l'état d'un système commandable avec une énergie minimale. En effet, on peut vérifier aisément que la loi de commande donnée par*

$$u_o(t) = G^T(t)\phi^T(t_f, t)\mathcal{W}_c^{-1}(t_o, t_f) (x(t_f) - \phi(t_f, t_o)x(t_o))$$

*est optimale au sens de la minimisation de l'énergie de la commande, i.e. elle minimise le critère quadratique*

$$J(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} u^T(t)u(t)dt$$

Pour ce faire, on notera d'abord que la séquence de commande optimale  $\{u_o(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  permet bien de réaliser une transition d'état arbitraire  $x(t_o) \rightarrow x(t_f)$  sur l'intervalle de temps  $[t_o, t_f]$  puisque

$$x(t_f) = \phi(t_f, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_f, \tau)G(\tau)u_o(\tau)d\tau$$

On peut alors récrire les lois de commande admissibles réalisant une transition d'état arbitraire  $x(t_o) \rightarrow x(t_f)$  sur l'intervalle de temps  $[t_o, t_f]$  sous la forme

$$u(t) = u_o(t) + u_c(t) \text{ avec } \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_f, \tau)G(\tau)u_c(\tau)d\tau = 0$$

L'énergie de la commande peut être décomposée comme suit

$$J(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} u_o^T(\tau)u_o(\tau)d\tau + 2 \int_{t_o}^{t_f} u_o^T(\tau)u_c(\tau)d\tau + \int_{t_o}^{t_f} u_c^T(\tau)u_c(\tau)d\tau$$

Et compte tenu de la propriété de la composante  $u_c(t)$  des lois de commandes admissibles, on aura

$$\int_{t_o}^{t_f} u_o^T(\tau)u_c(\tau)d\tau = \left( x(t_f) - \phi(t_f, t_o)x(t_o) \right)^T \mathcal{W}_c^{-1}(t_o, t_f) \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_f, \tau)G(\tau)u_c(\tau)d\tau = 0$$

Ceci permet d'en déduire aisément la propriété

$$J(t_o, t_f) \geq J_o(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} u_o^T(t)u_o(t)dt$$

Il apparaît clairement que l'égalité est obtenue avec la séquence de commande optimale  $\{u_o(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  et que

$$\min_{\{u_a(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}} J_o(t_o, t_f) = \left( x(t_f) - \phi(t_f, t_o)x(t_o) \right)^T \mathcal{W}_c^{-1}(t_o, t_f) \left( x(t_f) - \phi(t_f, t_o)x(t_o) \right)$$

**Observabilité.** Le résultat suivant montre que l'observabilité des systèmes linéaires variants dans le temps est complètement caractérisée par leur grammien d'observabilité sur un intervalle de temps fini  $[t_o, t_f]$  défini par la matrice symétrique et définie non négative donnée par

$$\mathcal{W}_o(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \phi^T(t_o, \tau)H^T(\tau)H(\tau)\phi(t_o, \tau)d\tau \quad (3.25)$$

**Résultat 3.43** Considérons le système linéaire variant dans le temps (2.101) et supposons que sa réalisation d'état est continue par morceaux. Alors le système est observable si et seulement si pour tout instant  $t_o$ , il existe un instant final  $t_f > t_o$  tel que le grammien d'observabilité est une matrice définie positive, i.e.  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f) > 0$ .



**Preuve.** Montrons d'abord que la condition est suffisante. On a

$$y(t) = H(t)\phi(t, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^t H(t)\phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

ou d'une manière équivalente

$$y_o(t) = y(t) - \int_{t_o}^t H(t)\phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau = H(t)\phi(t, t_o)x(t_o)$$

Et si l'on intègre les deux membres de cette équation, après une pré-multiplication par la matrice  $\phi^T(t, t_o)H^T(t)$ , on obtient

$$\int_{t_o}^{t_f} \phi^T(t, t_o)H^T(t)y_o(t)dt = \left( \int_{t_o}^{t_f} \phi^T(t, t_o)H^T(t)H(t)\phi(t, t_o)dt \right) x(t_o)$$

soit

$$\mathcal{W}_o(t_o, t_f) x(t_o) = \int_{t_o}^{t_f} \phi^T(t, t_o)H^T(t)y_o(t)dt$$

Il apparaît clairement que si  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f)$  est régulière pour tout intervalle  $[t_o, t_f]$ , alors on peut reconstruire l'état initial et donc l'état du système.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire via la contraposée de l'implication. Pour ce faire, supposons qu'il existe  $(t_o, t_f) \in \mathcal{R}^2$  tel que  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f)$  soit singulière, alors il existe un vecteur non nul  $v \in \mathcal{R}^n$  et des instants  $t_o$  et  $t_f$  tels que  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f)v = 0$  et donc

$$v^T \mathcal{W}_o(t_o, t_f)v = \int_{t_o}^{t_f} \|H(t)\phi(t_o, t)v\|^2 dt = 0$$

soit

$$H(t)\phi(t_o, t)v = 0 \text{ pour tout } t \in [t_o, t_f]$$

Et compte tenu de la trajectoire de sortie, on aura

$$H(t)\phi(t_o, t)(x(t_o) + v) = H(t)\phi(t_o, t)x(t_o) \text{ pour tout } t \in [t_o, t_f]$$

Les états  $x(t_o) + v$  et  $x(t_o)$  sont alors indistinguables puisqu'ils correspondent au même comportement d'entrée-sortie. Le système est donc non observable.

*CQFD*

**Remarque 3.22** Le grammien d'observabilité représente bien une mesure de l'information contenue dans le comportement d'entrée-sortie du système comme l'indique cette relation usuelle

$$\int_{t_o}^{t_f} y_o^T(t)y_o(t)dt = x_o^T(t)\mathcal{W}_o(t_o, t_f)x_o(t)$$

### 3.7 Conclusion

*Ce chapitre est une présentation systémique progressive des propriétés structurelles des systèmes linéaires en accordant une attention particulière aux concepts de commandabilité et de stabilisabilité (resp. d'observabilité et de détectabilité) qui constituent l'essence de la problématique de commande (resp. d'observation ou d'estimation). Le concept de commandabilité (resp. d'observabilité) a été introduit à partir de la relation entrée  $\rightarrow$  état (resp. la relation état  $\rightarrow$  sortie) qui conduit naturellement à la matrice de commandabilité et au grammien de commandabilité (resp. la matrice d'observabilité et le grammien d'observabilité) du système. La dualité des concepts de commandabilité et d'observabilité est judicieusement exploitée pour simplifier les développements fondamentaux. On distingue deux critères usuels de test de commandabilité (resp. d'observabilité) de sa matrice de commandabilité et son grammien de commandabilité (resp. sa matrice d'observabilité et son grammien d'observabilité). Le choix du critère est principalement motivé par l'efficacité des outils disponibles pour sa mise en oeuvre. Les autres résultats fondamentaux permettent de caractériser les modes non commandables (resp. non observables) du système, d'introduire le concept de stabilisabilité (resp. de détectabilité) d'une manière naturelle et d'assainir le concept de réalisations minimales à partir d'un processus approprié de décompositions canoniques selon la commandabilité et l'observabilité.*

*Cette partie principale est complétée par deux focus. Le premier focus est une synthèse sur le développement des notions des pôles et zéros des systèmes multivariables, qui ont été introduites au chapitre 2 à partir des pôles et zéros de transmission d'une fonction de transfert. Cette synthèse est un ensemble cohérent de résultats fondamentaux relevant essentiellement de la notion de zéros invariants naturellement introduite à partir d'une propriété fondamentale sur le rang de la matrice système. La similitude entre les zéros de transmission et les zéros invariants est particulièrement mise en exergue à partir du concept de réalisation minimale. Le second focus est une bonne préparation aux études relevant de la commande optimale (resp. l'estimation optimale ou de l'adaptation paramétrique). Il concerne la commandabilité (resp. l'observabilité) des systèmes linéaires variants dans le temps à partir de leur grammien de commandabilité (resp. d'observabilité) sur un intervalle de temps fini.*

*On notera que les résultats fondamentaux sur la représentation et la structure des systèmes sont au coeur du développement des conceptions assistées par ordinateur communément utilisées pour la modélisation expérimentale des systèmes. En effet, la modélisation des systèmes requiert une spécification adéquate des entrées et des sorties du système pour recouvrer naturellement les propriétés structurelles appropriées pour la conception des observateurs et des systèmes de commande, notamment des fonctions de transfert irréductibles de rang plein ou des réalisations d'état minimales avec des matrices d'entrée et de sortie de rang maximal pour éviter le redondances des entrées et des sorties.*

### 3.8 Problèmes

*Outre une auto-évaluation des connaissances acquises tout au long de ce chapitre, on suggère d'effectuer les preuves qui ont été jugées relativement faciles pour mieux apprécier le potentiel minimal souhaité.*

**Problème 3.1** *Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , montrer que l'exponentielle de la matrice  $A$  peut se récrire sous la forme*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t) A^k$$

où les  $\varphi_k$  pour  $k \in [0, n-1]$  sont des fonctions réelles linéairement indépendantes que l'on peut déterminer à partir des relations suivantes

$$\mathcal{L}(\varphi_{n-1}(t)\alpha(t)) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

et

$$\mathcal{L}(\varphi_k(t)\alpha(t)) = \frac{s^{n-k-1} + a_1 s^{n-k-2} + \dots + a_{n-k-2} s + a_{n-k-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \text{ pour } k \in [0, n-2]$$

où les  $a_i$  pour  $i \in [0, n]$  désignent les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , soit

$$\det(sI_n - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Et en déduire que

$$\mathcal{W}(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \begin{pmatrix} \varphi_0(t) I_m \\ \varphi_1(t) I_m \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) I_m \end{pmatrix} \left( \varphi_0(t) I_m \quad \varphi_1(t) I_m \quad \dots \quad \varphi_{n-1}(t) I_m \right) dt$$

est une matrice symétrique définie positive indépendamment de la dimension de la matrice identité  $I_m$ .

**Problème 3.2** Considérons un système linéaire décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$ , On demande de montrer que

- 1) Montrer que le système est commandable si et seulement si les lignes de la matrice  $e^{Ft}G$  sont linéairement indépendantes.
- 2) En déduire que le système est commandable si et seulement si son grammien de commandabilité est une matrice définie positive.
- 3) Montrer que le système est observable si et seulement si les colonnes de la matrice  $He^{Ft}$  sont linéairement indépendantes.
- 4) En déduire que le système est observable si et seulement si son grammien d'observabilité est une matrice définie positive.

**Problème 3.3** Etudier la commandabilité et l'observabilité des systèmes hydrauliques et considérés aux problèmes 2.14 et 2.18. On utilisera pour ce faire une démarche élégante et on précisera ce qui se passerait si l'on considérait comme sortie du système le niveau d'eau dans le premier bac ?

**Problème 3.4** Considérons le pont roulant décrit au problème 2.17. Montrer que le système linéarisé est commandable et observable.

**Problème 3.5** Considérons un système monovarié décrit par une réalisation d'état commandable  $(F, G, H, E)$ . Montrer qu'il existe un changement de base dans l'espace d'état,  $x(t) = Tx_c(t)$ , qui conduit à une réalisation  $(F_c, G_c, H_c, E_c)$  dite forme canonique de commandabilité caractérisée par

$$F_c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ & & & -a_{n-1} \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -a_1 \end{pmatrix} \text{ et } G_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\det(sI_n - F) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

On précisera que la matrice de passage est donnée par la matrice de commandabilité du système, soit  $T = \mathcal{M}_c(F, G)$ .

**Problème 3.6** Considérons un système monovarié décrit par une réalisation d'état commandable  $(F, G, H, E)$ . Montrer qu'il existe un changement de base dans l'espace d'état, i.e.  $z(t) = Tx(t)$ , qui conduit à une réalisation  $(F_o, G_o, H_o)$  dite forme canonique d'observabilité caractérisée par

$$F_o = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_n & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ et } H_o = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

avec

$$\det(sI_n - F) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

On précisera que la matrice de passage est donnée par la matrice d'observabilité du système, i.e.  $T = \mathcal{M}_o$ .

**Problème 3.7** Déterminer la fonction de transfert d'un système à partir de sa réalisation d'état issue d'une décomposition selon la commandabilité (resp. selon l'observabilité).

**Problème 3.8** Considérons un système décrit par une représentation d'état. Montrer que les propriétés suivantes sont vraies.

- La paire  $(F, G)$  est commandable si et seulement si les matrices  $sI_n - F$  et  $G$  sont première entre elles à gauche.

- La paire  $(H, F)$  est observable si et seulement si les matrices  $sI_n - F$  et  $H$  sont première entre elles à droite.
- Les modes non commandables et/ou non observables d'une réalisation d'état ne sont pas des pôles du système sous-jacent.
- Le polynôme des pôles est égal au polynôme caractéristique de la matrice d'état, i.e.  $\Phi(s) = \det(sI_n - F)$ , si et seulement si la réalisation d'état est minimale.

**Problème 3.9** Considérons la classe des systèmes décrite par la représentation d'état partiel donnée par

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} A(\rho)z(t) = C(\rho)u(t) \\ y(t) = B(\rho)z(t) \end{cases}$$

où  $z(t) \in \mathcal{R}^m$  est un état partiel du système et  $A(\rho)$ ,  $B(\rho)$  et  $C(\rho)$  sont des matrices polynomiales de dimension appropriées avec  $A(\rho)$  inversible. Montrer que

$$C(\rho) = I_m \iff \mathcal{SYS} \text{ est commandable}$$

et

$$B(\rho) = I_p \iff \mathcal{SYS} \text{ est observable}$$

**Problème 3.10** Montrer que les formes canoniques commandable et observable du système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

constituent des réalisations minimales du système.

**Problème 3.11** Montrer que le nombre de zéros d'un système carré décrit par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n > m$  est donné par

$$nz \begin{cases} \leq n - m + \text{rang}(E) & \text{si } E \neq 0 \\ \leq n - 2m + \text{rang}(HG) & \text{si } E = 0 \\ = n - m & \text{si } E = 0 \text{ et } \text{rang}(HG) = m \end{cases}$$

**Problème 3.12** On se propose de mettre en évidence l'importance des directions des pôles et des zéros à partir du système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit

- 1) Calculer le déterminant de la fonction de transfert et en déduire sa configuration des pôles et des zéros.
- 2) Déterminer les pôles et les zéros du système et justifier leur différence avec les pôles et les zéros de  $\det(\mathcal{G}(s))$ .
- 3) Déterminer les directions des pôles et des zéros du système et conclure.

**Problème 3.13** On se propose d'effectuer la preuve du résultat 3.41 à partir de celle du résultat 3.40 en exploitant le concept de dualité.

**Problème 3.14** Etablir une preuve agréable du résultat 3.13

# Chapitre 4

## Stabilité

*La stabilité d'un système est une propriété qualitative de son comportement asymptotique qui se distingue par deux composantes en vertu du principe de superposition des systèmes linéaires. La première composante est la réponse du système à une entrée admissible lorsque les conditions initiales sont nulles, alors que la seconde composante n'est autre que la solution de l'équation du système issue des conditions initiales lorsque la séquence d'entrée est identiquement nulle. Ces deux composantes constituent l'essence des deux concepts fondamentaux de la stabilité des systèmes. Le premier est le concept de stabilité externe intrinsèque à l'aptitude d'un système à produire des sorties bornées à partir d'entrées bornées, ce qui justifie l'appellation de stabilité entrée bornée-sortie bornée (EBSB). Alors que le second est le concept de stabilité interne intrinsèque à l'aptitude du système à maintenir sa trajectoire d'état dans un voisinage de son état d'équilibre si elle y a été écartée pour une raison ou une autre. Les concepts de stabilité externe et interne ont été convenablement agrégés au travers du concept de passivité dont le potentiel pour l'ingénierie des systèmes est indéniabale. La motivation de ce chapitre est de présenter d'une manière rigoureuse et compréhensible les bases de la stabilité des systèmes linéaires en quatre parties.*

- *La première partie est consacrée au cas des systèmes linéaires invariants dans le temps. On présente le concept de stabilité externe (resp. interne) d'un système à partir de sa réponse impulsionnelle (resp. sa matrice de transition) avec un focus sur sa vraisemblance (resp. sa nuance) avec le concept de stabilité EBSB. Un intermède agréable est élaboré pour le passage de la stabilité externe à la stabilité interne.*
- *La deuxième partie est consacrée à une présentation claire et concise de l'approche de Lyapunov communément utilisée pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires avec un focus sur le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps. L'efficacité de l'approche de Lyapunov, par rapport aux résultats de stabilité issus de la réponse impulsionnelle ou de la matrice de transition du système, est particulièrement mise en exergue.*
- *La troisième partie est réservée à la stabilité uniforme des systèmes linéaires variants dans le temps à partir d'une extension appropriée des concepts de stabilité élaborés pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Outre une opportunité pour conforter les concepts de stabilité interne et externe, cette étude sera utilisée pour analyser la stabilité et la convergence des algorithmes d'estimation et d'adaptation paramétrique au moment opportun.*

- La quatrième partie est un panorama sur le concept de passivité pour une meilleure perception des systèmes réels positifs avec des interprétations physiques de la passivité ([14]). On se focalise sur la caractérisation des systèmes réels positifs à partir de leur fonction de transfert et leurs fonction de transfert de leur réalisation d'état qui conduit naturellement à une contribution potentielle qui a été utilisée dans la plupart des études d'analyse et de synthèse des systèmes de commande et des observateurs incorporant éventuellement une adaptation paramétrique appropriée.

## 4.1 Systèmes linéaires invariants dans le temps

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps est effectuée à partir de leur réponse impulsionnelle, leur fonction de transfert et leurs réalisations d'état qui sont respectivement données par  $\{g(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\mathcal{G}(s) = (\mathcal{G}_{ij}(s))$  et  $(F, G, H, E)$  et reliées par

$$\mathcal{G}(s) = H(sI_n - F)^{-1}G + E = \mathcal{L}\{g(t)\} \text{ avec } g(t) = \begin{cases} He^{Ft}G & \text{pour } t > 0 \\ E & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Les résultats de stabilité externe et interne sont respectivement donnés en fonction des configurations des pôles et des modes du systèmes qui sont éventuellement différentes puisque

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) \subset \mathcal{CM}((F, G, H, E)) = \mathcal{V}\{F\}$$

**Remarque 4.1** L'étude de la stabilité est particulièrement effectuée pour les systèmes strictement propres sans aucune perte de généralité. En effet, tout se passe comme si l'on a occulté la matrice  $E$  de la réalisation d'état qui n'a aucune incidence sur une étude de stabilité.

### 4.1.1 Stabilité externe

La stabilité externe d'un système linéaire invariant dans le temps concerne la bornitude de ses trajectoires de sortie issues de la classe de ses entrées admissibles lorsque ses conditions initiales sont identiquement nulles. Ainsi, elle peut être fondamentalement définie à partir de sa réponse impulsionnelle comme suit.

**Définition 4.1** Considérons un système linéaire et invariant dans le temps décrit par sa réponse impulsionnelle. On dira que

D1. le système est stable si sa réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

D2. le système est marginalement stable s'il n'est pas stable et que sa réponse impulsionnelle est bornée, i.e.

$\{g(t)\}$  est bornée et si elle converge, alors sa limite n'est pas nulle

D3. le système est instable si sa réponse impulsionnelle n'est pas bornée, i.e.

$\{g(t)\}$  n'est pas bornée



Ainsi, la stabilité externe d'un système est intrinsèque à son aptitude à produire des sorties bornées à partir d'entrées bornées comme le montre le résultat fondamental suivant, qui précise la relation de la stabilité  $\mathcal{EBSB}$  d'un système et sa réponse impulsionnelle.

**Résultat 4.1** Un système linéaire et invariant est stable au sens  $\mathcal{EBSB}$  si et seulement si sa réponse impulsionnelle vérifie la propriété suivante

$$\exists \sigma_g \in [0, \infty) / \int_0^\infty \|g(\tau)\| d\tau \leq \sigma_g \quad (4.1)$$

**Preuve.** Montrons d'abord que la condition est suffisante en exploitant le produit de convolution

$$y(t) = \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

En vertu de l'inégalité de Schwartz, on a

$$\|y(t)\| \leq \int_0^\infty \|g(\tau)\| \|u(t-\tau)\| d\tau$$

Et si l'entrée est bornée, soit  $\exists \sigma_u \in [0, \infty) / \|u(t)\| \leq \sigma_u$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , alors on a

$$\|y(t)\| \leq \sigma_u \int_0^\infty \|g(\tau)\| \text{ pour } 0 \leq \sigma_u < \infty$$

Et compte tenu de la propriété 4.1, il est clair que la réponse du système à une entrée bornée est bornée

$$\|y(t)\| \leq \sigma_y = \sigma_u \sigma_g \in [0, \infty)$$

Montrons maintenant que la condition est nécessaire en utilisant la contraposée de la propriété de stabilité au sens  $\mathcal{EBSB}$ , en l'occurrence

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^+, \exists t_\beta \in \mathbb{R}^+ / \int_0^{t_\beta} \|g(t_\beta - \tau)\| > \beta \quad (4.2)$$

Et comme  $g(t) = [g_{ij}(t)]$ , on a  $|g_{ij}(t)| \leq \|g(t)\|$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la propriété 4.2 est satisfaite pourvu qu'il existe  $(i, j) \in [1, p] \times [1, m]$  tel que la propriété suivante soit satisfaite.

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^+, \exists t_\eta \in \mathbb{R}^+ / \int_0^{t_\eta} |g_{ij}(t_\eta - \tau)| > \eta \quad (4.3)$$

On notera que  $\{g_{ij}(t)\}$  n'est autre que la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert reliant la composante d'entrée  $\{u_j(t)\}$  à la composante de sortie  $\{y_i(t)\}$ .

Pour établir la propriété 4.3, on procédera d'une manière constructive en considérant la séquence d'entrée définie par

$$u(t) = \begin{cases} u_\eta(t) & \text{pour } t \in [0, t_\eta] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.4)$$

avec

$$u_\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \in [1, j[ \cup ]j, p] \\ u_j(t) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.5)$$

où la composante  $\{u_j(t)\}$  est définie comme suit

$$u_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_{ij}(t_\eta - t) > 0 \\ 0 & \text{si } g_{ij}(t_\eta - t) = 0 \\ -1 & \text{si } g_{ij}(t_\eta - t) < 0 \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, t_\eta] \quad (4.6)$$

La composante de la sortie  $\{y_i(t)\}$  qui en résulte à l'instant  $t_\eta$  est donnée par

$$y_i(t_\eta) = \int_0^{t_\eta} g_{ij}(t_\eta - \tau) u_j(\tau) d\tau = \int_0^{t_\eta} |g_{ij}(t_\eta - \tau)| d\tau > \eta$$

Il est clair que la séquence d'entrée bornée (4.4)-(4.6) ne conduit pas à une sortie bornée lorsque la réponse impulsionnelle vérifie la propriété (4.3).

*CQFD.*

**Remarque 4.2** Compte tenu de la vraisemblance des concepts de stabilité externe et de stabilité  $\mathcal{EBSB}$ , on utilisera le vocable  $\mathcal{EBSB}$  stable pour se référer aussi bien à la stabilité  $\mathcal{EBSB}$  qu'à la stabilité externe. Cette précision de la nature de stabilité permettra de discerner le concept de stabilité externe du concept de stabilité interne qui est beaucoup plus général pour s'y référer sans aucun qualificatif.

Par ailleurs, la stabilité externe d'un système linéaire invariant dans le temps est complètement caractérisée par la configuration de ses pôles comme l'indique le résultat fondamental suivant.

**Résultat 4.2** Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par sa fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  dont  $\Phi(s)$  désigne le polynôme des pôles, alors les propositions suivantes sont vraies.

$\mathcal{P}1$ . Le système est stable si et seulement si tous ses pôles sont situés à l'intérieur du domaine de stabilité, i.e.

$$\Phi(s) \in \mathbb{R}_{sa}(s) \iff \mathcal{CP}(SY\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

$\mathcal{P}2$ . Le système est marginalement stable si et seulement si tous ses pôles sont situés dans le domaine de stabilité, qu'il admet au moins un pôle sur la frontière du domaine de stabilité et que tous ses pôles situés sur la frontière du domaine de stabilité sont simples, i.e.

$$\Phi(s) = \Phi_{sa}(s) \Phi_{si}(s) \text{ avec } \Phi_{sa}(s) \in \mathbb{R}_{dz}(s) \cup \mathbb{R}_{sa}(s) \text{ et } \Phi_{si}(s) \in \mathbb{R}_{si}(s)$$

$\mathcal{P}3$ . Le système est instable si et seulement si il admet au moins un pôle à l'extérieur du domaine de stabilité ou un pôle multiple sur la frontière du domaine de stabilité, i.e.

$$\Phi(s) \notin \mathbb{R}_{sa}(s) \cup R_{si}(s)$$

**La preuve** sera effectuée pour les systèmes monovariabiles décrits par leurs fonctions de transfert, i.e. une fraction rationnelle propre que l'on peut toujours décomposer en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{\prod_{i=1}^{n_{pd}} (s - p_i)^{m_i}} = \gamma_o + \sum_{i=1}^{n_{pd}} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\gamma_{ij}}{(s - p_i)^j} \quad (4.7)$$

avec

$$\gamma_o = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}(s) \text{ et } \gamma_{ij} = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(m_i - j)!} \left( \frac{d}{ds} \right)^{(m_i - j)} \left( (s - p_i)^{m_i} \mathcal{G}(s) \right) \right\} \quad (4.8)$$

où  $n_{pd}$  et  $m_i$  désignent le nombre de pôles distincts et l'ordre de multiplicité du pôle  $s = p_i$  et les  $\gamma_{ij}$  sont des nombres complexes. Cette décomposition permet de déterminer aisément la réponse impulsionnelle du système

$$g(t) = \gamma_o \delta(t) + \sum_{i=1}^{n_{pd}} \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t} \alpha(t) \quad (4.9)$$

puisque

$$\mathcal{L} \left( \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_i t} \alpha(t) \right) = \frac{1}{(s - p_i)^\ell} \quad (4.10)$$

Et comme la fonction de transfert est une fraction rationnelle à coefficients réels, si le système admet un pôle complexe  $p_k$ , alors son conjugué  $p_k^*$  est aussi un pôle du système que l'on peut noter  $p_\ell$  et on aura  $\gamma_{\ell j} = \gamma_{k j}^*$ . On peut ainsi montrer aisément que les composantes principales d'une réponse impulsionnelle se distinguent par la nature de ses pôles, i.e. un pôle réel  $p_i$  ou une paire de pôles complexes conjugués  $\sigma_i \pm j\omega_i$ , et peuvent se mettre sous les formes suivantes dans le cas d'un pôle d'ordre de multiplicité  $m_i$ .

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij}^{mr} t^{j-1} e^{p_i t} \alpha(t) \quad (4.11)$$

et

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij}^{mo} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{ij}) \alpha(t) \quad (4.12)$$

où  $\mu_{ij}^{mr}$ ,  $\mu_{ij}^{mo}$  et  $\varphi_{ij}$  sont des scalaires respectivement donnés par

$$\mu_{ij}^{mr} = \frac{\gamma_{ij}}{(j-1)!}, \quad \mu_{ij}^{mo} = \frac{2|\gamma_{ij}|}{(j-1)!} \text{ et } \text{tg}(\varphi_{ij}) = \frac{\mathcal{I}_m(\gamma_{ij})}{\mathcal{R}_e(\gamma_{ij})}$$

On notera qu'un pôle réel (resp. une paire de pôles complexes conjugués) du système constitue un mode rigide (resp. oscillatoire) du système et que la réponse impulsionnelle d'un système peut être exprimée en fonction de ses modes distincts comme suit

$$g(t) = \gamma_o \delta(t) + \sum_{i=1}^{n_{mrd}} \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij}^{mr} t^{j-1} e^{p_i t} \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n_{mod}} \sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij}^{mo} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \alpha(t)$$

où  $n_{mrd}$  et  $n_{mod}$  désignent respectivement le nombre de modes rigides et oscillatoires distincts,  $m_i$  est l'ordre de multiplicité du  $i$ ème mode et  $\gamma_o$ ,  $\mu_{ij}^{mr}$  et  $\mu_{ij}^{mo}$  sont des scalaires qui sont déterminés à partir de la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert du système. Remémorons qu'un mode rigide n'est autre qu'un pôle réel, i.e.  $p_i \in \mathbb{R}$ , alors qu'un mode oscillatoire résulte d'une paire de pôles complexe conjugués, i.e.  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$  et  $p_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ .

Il apparaît clairement que la réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle si et seulement si  $p_i < 0$  pour tout  $i \in [1, n_{mrd}]$  et  $\sigma_i < 0$  pour tout  $i \in [1, n_{mro}]$  ou d'une manière équivalente  $\mathcal{R}(p_i) < 0$  pour tout  $i \in [1, n_{md}]$ . On retrouve ainsi le premier résultat fondamental de stabilité. Par ailleurs, il est évident que la réponse impulsionnelle est bornée si et seulement si  $\mathcal{R}(p_i) \leq 0$  pour tout  $i \in [1, n_{md}]$  avec  $m_i = 1$  lorsque  $\mathcal{R}(p_i) = 0$ . On retrouve ainsi le deuxième résultat fondamental de stabilité. Quant au dernier résultat fondamental de stabilité, il émane naturellement des deux autres résultats fondamentaux.

CQFD.

**Remarque 4.3** Le choix du cas des systèmes monovariables pour la preuve est un fructueux exercice sur le passage d'une fonction de transfert à la réponse impulsionnelle. Le problème 4.6 est une opportunité pour réaliser que l'extension de la preuve du résultat au cas des systèmes multivariables. Cette preuve peut être faite à partir de la décomposition en éléments simple de sa fonction de transfert, soit

$$H(sI_n - F)^{-1}G = \frac{H \text{Adj}(sI_n - F)G}{\prod_{i=1}^{\ell} (s - p_i)^{m_i}} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{H\Gamma_{ij}G}{(s - p_i)^j}$$

avec

$$\Gamma_{ij} = \lim_{p \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(m_i - j)!} \left( \frac{d}{ds} \right)^{(m_i - j)} \left( (s - p_i)^{m_i} (sI_n - F)^{-1} \right) \right\}$$

où  $m_i$  désigne l'ordre de multiplicité du pôle  $p = p_i$  et les  $\{\Gamma_{ij}\}$  sont des matrices complexes qui seraient nulles si  $p = p_i$  est un zéro de la matrice polynomiale  $H \text{Adj}(sI_n - F)G$ . On peut alors déterminer la réponse impulsionnelle

$$g(t) = H e^{Ft} G = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t} H\Gamma_{ij}G$$

et en déduire les diverses propriétés des solutions du système autonome 4.2 en remémorant qu'une croissance exponentielle domine une croissance polynomiale.

### 4.1.2 Intermède

Les systèmes sont généralement conçus à partir d'un ensemble d'interconnexions appropriées de systèmes qui ont éventuellement des pôles et des zéros communs. Ces pôles et zéros communs ne sont pas nécessairement reliés à l'entrée et/ou la sortie du système et ne sont donc pas perceptibles à partir du comportement d'entrée-sortie du système, e.g. ils n'apparaissent pas dans la fonction de transfert du système. Le concept de stabilité externe d'un système occulte les éventuelles simplifications entre les pôles et les zéros des systèmes qui le composent. Et si les pôles simplifiés ne sont pas situés dans le domaine de stabilité, alors les variables internes sous-jacentes ne sont pas bornées. Pour mieux apprécier cette problématique, considérons le système issu d'une cascade de deux systèmes comme le montre la figure 4.1.

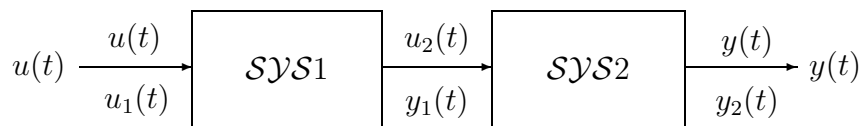


FIGURE 4.1 – Interconnection en cascade

La fonction de transfert du système est alors donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \frac{s + \mu}{s + 2} \frac{\mu}{s + \mu} = \frac{\mu}{s + 2}$$

Par ailleurs, on peut définir les variables d'état de la cascade à partir des sorties des sous-systèmes qui la composent, soit

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$(\rho + \mu) x_1(t) = \mu u(t) \quad \text{et} \quad (\rho + 2) x_2(t) = (\rho + \mu) x_1(t) = \mu u(t)$$

La cascade peut être alors décrite par la réalisation d'état

$$F = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad H = (0 \quad 1) \quad \text{et} \quad E = 0$$

Les trajectoires des variables d'état et de sortie de la cascade issues d'une entrée impulsionnelle d'amplitude unitaire sont alors données par

$$x_1(t) = e^{-\mu t} x_1(o) + \int_o^t e^{-\mu(t-\tau)} \mu \delta(\tau) d\tau = (\mu + x_{01}) e^{-\mu t}$$

$$x_2(t) = e^{-2t} x_2(o) + \int_o^t e^{-2(t-\tau)} \mu \delta(\tau) d\tau = (\mu + x_{02}) e^{-2t}$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Il apparaît clairement que la sortie du système, qui constitue sa seconde variable d'état, est asymptotiquement nulle indépendamment du scalaire  $\mu$ . Ce fait corrobore la propriété de stabilité externe. Quant au comportement de la première variable d'état du système, il dépend du scalaire  $\mu$  comme suit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mu < 0 \\ x_{01} & \text{pour } \mu = 0 \\ \infty & \text{pour } \mu > 0 \end{cases}$$

] Ceci nous amène naturellement au concept de stabilité interne qui concerne l'aptitude d'un système à produire des variables d'état bornées à partir des entrées bornées.

### 4.1.3 Stabilité interne

Le concept de stabilité interne d'un système linéaire invariant concerne la bornitude de sa réponse à une entrée identiquement nulle avec des conditions initiales non nulles ; il peut être étudié à partir du comportement du système autonome sous-jacent

$$\text{SALIT} \{ \rho x(t) = Fx(t) \text{ avec } x(0) = x_o \} \quad (4.13)$$

Le concept de stabilité interne concerne essentiellement le comportement des trajectoires d'état d'un système issu de conditions initiales non nulles lorsque son entrée est identiquement nulle comme l'indiquent les définitions suivantes.

**Définition 4.2** Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$ , on dira que

D1. le système est asymptotiquement stable si la trajectoire d'état du système autonome correspondant est asymptotiquement nulle, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{Ft}\| = 0$$

D2. le système est stable si la trajectoire d'état du système autonome correspondant n'est pas asymptotiquement stable mais elle est bornée, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{Ft}\| \neq 0 \text{ et } \{\|e^{Ft}\|\} \text{ est bornée}$$

D3. le système est instable si la trajectoire d'état du système autonome correspondant n'est pas bornée, i.e.

$$\{\|e^{Ft}\|\} \text{ n'est pas bornée}$$

D4. le système est exponentiellement stable si la trajectoire d'état du système autonome correspondant converge exponentiellement vers l'origine, i.e. il existe deux scalaires  $0 < \gamma < \infty$  et  $0 < \lambda < \infty$  tels que

$$\|e^{Ft}\| \leq \gamma e^{\lambda t} \text{ pour tout } t \geq 0$$

Le résultat fondamental suivant montre que la stabilité interne d'un système linéaire invariant dans le temps peut être étudiée à partir d'une analyse spectrale de sa matrice d'état.

**Résultat 4.3** *Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état, alors on a les axiomes suivants.*

- A1. *Le système est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état sont situées dans le domaine de stabilité asymptotique  $\mathcal{D}_{sa}$ .*
- A2. *Le système est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état sont situées dans le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  et que toute valeur propre située sur l'axe imaginaire n'est pas défective.*
- A3. *Le système est instable si et seulement si la matrice d'état possède au moins une valeur propre à l'extérieur du domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  ou une valeur propre multiple défective sur l'axe imaginaire.*

**La preuve de ce résultat peut être faite en étudiant les solutions des systèmes autonomes linéaires et invariants dans le temps à partir du résultat ??.** En effet, il existe toujours une matrice régulière  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et une matrice bloc diagonale  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que

$$T^{-1}FT = J = \text{Diag} \{J_1, \dots, J_r\} \quad \text{avec} \quad J_i \in \mathbb{C}^{\nu_i \times \nu_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \nu_i = n = \sum_{k=1}^m m_k$$

où les matrices  $\{J_i\}_{i \in [1, r]}$  ne sont autres que les blocs de Jordan associés aux valeurs propres  $\{\lambda_k\}_{k \in [1, m]}$  d'ordres de multiplicité  $\{m_k\}_{k \in [1, m]}$ . Cette décomposition de la matrice d'état permet de déterminer relativement facilement la matrice de transition du système autonome. En effet, on a

$$e^{Ft} = Te^{Jt}T^{-1} = T \text{Diag} \{e^{J_1 t}, \dots, e^{J_r t}\} T^{-1}$$

avec

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_k I_{\nu_i} + N_i)t} = e^{\lambda_k t} e^{N_i t}$$

Et comme  $N_i$  est une matrice nilpotente d'ordre  $\nu_i$ , soit  $N_i^k = 0$  pour tout  $k \geq \nu_i$ ,  $e^{N_i t}$  est une matrice triangulaire supérieure donnée par

$$e^{N_i t} = (\eta_{k\ell}(t)) = \begin{cases} \frac{t^{k-\ell}}{(k-\ell)!} & \text{pour } k \leq \ell \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La trajectoire d'état du système autonome est alors donnée par

$$x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda_i t} \Gamma_{ij} x(0) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

où les  $\Gamma_{ij}$  sont des matrices complexes qui dépendent de la matrice de transformation  $T$  et des matrices  $N_i$ . Les axiomes du résultats peuvent être alors déduits en comparant dans chaque cas une croissance exponentielle et une croissance polynomiale.

*CQFD.*

**Remarque 4.4** Si la matrice  $F$  est diagonalisable, i.e. toutes les valeurs propres multiples sont non défectives, alors il existe une matrice régulière  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$e^{Ft} = T e^{Jt} T^{-1} = T \text{Diag} \{e^{J_i t}\} T^{-1}$$

$$T F T^{-1} = \Lambda = \text{Diag} \{\lambda_i\}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_n \end{pmatrix} \text{ et } T^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^* \\ \vdots \\ W_n^* \end{pmatrix}$$

où  $\mathcal{V}(F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  désigne le spectre de la matrice d'état  $F$  et  $V_i$  (resp.  $W_i$ ) sont les vecteurs propres à droite (resp. à gauche) associés à la valeur propre  $\lambda_i$ , soit

$$F V_i = \lambda_i V_i \quad (\text{resp. } W_i^* F = \lambda_i W_i^* \iff F^* W_i = \lambda_i W_i)$$

La réponse libre du système autonome est alors donnée par l'équation

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} V_i W_i^* x(0)$$

Il apparaît clairement que les valeurs propres non défectives de la matrice d'état qui sont sur l'axe imaginaire ne conduisent pas à l'instabilité du système.

#### 4.1.4 Le jugement dernier

Les résultats de stabilité donnés plus haut nous permettent de postuler naturellement que la stabilité externe est équivalente à la stabilité interne pourvu que la réalisation d'état du système considéré soit minimale. Un tel postulat est corroboré par les deux résultats suivants. Le premier concerne l'équivalence entre les concepts de stabilité asymptotique et de stabilité exponentielle, alors que le second relève de l'équivalence entre le concept de stabilité exponentielle et stabilité  $\mathcal{EBSB}$  pour la classe des systèmes décrits par une réalisation d'état minimale.

**Résultat 4.4** Considérons la classe des systèmes décrits par une réalisation d'état  $(F, G, H)$ , les concepts de stabilité asymptotique et de stabilité exponentielle sont équivalents.

**La preuve** de ce résultat est triviale. Le problème 4.7 suggère de la faire pour mieux apprécier le concept de stabilité exponentielle par rapport au concept de stabilité asymptotique.

**Résultat 4.5** Considérons la classe des systèmes décrits par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H)$ . Alors les concepts de stabilité  $\mathcal{EBSB}$  et de stabilité exponentielle sont équivalents.



**Preuve.** L'implication *Stabilité exponentielle*  $\implies$  *Stabilité  $\mathcal{EBSB}$*  est triviale puisque

$$g(t) = \int_0^\infty \|He^{F\tau}G\| d\tau \leq \|H\| \|G\| \int_0^\infty \|e^{F\tau}\| d\tau$$

et le terme  $\int_0^\infty \|e^{F\tau}\| d\tau$  est borné si le système est exponentiellement stable.

Montrons maintenant que l'implication *Stabilité  $\mathcal{EBSB}$*   $\implies$  *Stabilité exponentielle* est vraie. Pour ce faire, supposons que le système est  $\mathcal{EBSB}$  stable, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} He^{Ft}G = 0$$

Et on peut en déduire aisément que (voir le problème 4.5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} HF^i e^{Ft} GF^j G = 0 \text{ pour tout } (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$$

soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} e^{Ft} \begin{pmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

En prémultipliant à gauche (resp. à droite) les deux membres de l'équation (4.14) par la transposée de la matrice d'observabilité (resp. de commandabilité), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_o(H, F) e^{Ft} \mathcal{M}_c(F, G) = 0 \quad (4.15)$$

Et comme  $(F, G, H)$  est minimale, i.e. le système est observable et commandable et donc  $\mathcal{M}_o(H, F)$  et  $\mathcal{M}_c(F, G)$  sont des matrices inversibles. On retrouve alors la propriété fondamentale de la stabilité exponentielle du système.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Ft} = 0$$

en prémultipliant à gauche (resp. à droite) les deux membres de l'équation (4.15) par l'inverse de la matrice  $\mathcal{M}_o(H, F)$  (resp.  $\mathcal{M}_c(F, G)$ ).

*CQFD.*

## 4.2 Approche de Lyapunov

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques est communément effectuée en adoptant une approche de Lyapunov qui s'est imposée aux sciences de l'ingénieur par sa généralité et son efficacité ([58], [59], [62]). La généralité est essentiellement motivée par le fait que cette approche a été développée pour les systèmes non linéaires. Quant à l'efficacité, elle est motivée par les outils puissants qui ont été développés à partir de cette approche pour le test de stabilité des systèmes. Le potentiel fondamental de cette approche est présenté d'une manière claire et précise dans [53]. On présente dans ce qui suit le concept de stabilité au sens de Lyapunov avec un résultat fondamental qui permet de déduire naturellement tous les résultats de stabilité interne des systèmes linéaires invariants.

### 4.2.1 L'essentiel

Le concept de stabilité au sens de Lyapunov a été principalement développé à partir de la classe des systèmes autonomes décrits par l'équation

$$SAL \quad \{ \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(x_e) = 0 \quad (4.16)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système,  $x_e \in \mathbb{R}^n$  est un état d'équilibre du système et  $f$  est une fonction continûment différentiable qui permet de définir une classe de systèmes relativement large, notamment Les systèmes mécaniques à partir des équations de Lagrange et les systèmes linéaires variants dans le temps. Il se distingue par une nature locale et intrinsèque aux états d'équilibres comme l'indiquent les définitions suivantes.

D1. L'état d'équilibre  $x_e$  est dit stable au sens de Lyapunov si pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

D2. L'état d'équilibre  $x_e$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov et s'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

D3. L'état d'équilibre  $x_e$  est dit exponentiellement stable s'il est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov et qu'il existe deux scalaires positif et finis  $0 < \gamma < \infty$  et  $0 \leq \lambda < \infty$  tels que

$$\|x(t) - x_e\| \leq \gamma e^{-\lambda t} \|x_0 - x_e\|$$

D4. L'état d'équilibre  $x_e$  est dit instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

**Remarque 4.5** La stabilité au sens de Lyapunov garantit que la trajectoire d'état du système reste dans un voisinage de l'un des états d'équilibre pourvu que les conditions initiales soient suffisamment proches de cet état d'équilibre. La stabilité asymptotique permet d'étendre le concept de stabilité au sens de Lyapunov dans la mesure où elle garantit que la trajectoire d'état du système s'approche de plus en plus de l'état d'équilibre pourvu que les conditions initiales soient prises dans un voisinage de cet état d'équilibre. La stabilité pourrait être globale pourvu qu'elle soit indépendante des conditions initiales.

Le principe de l'approche de Lyapunov consiste à introduire une fonction que l'on peut assimiler à l'énergie totale du système et à montrer qu'elle est décroissante le long des trajectoires d'état du système. En effet un système dont l'énergie totale est décroissante ne peut que revenir dans un voisinage de son état d'équilibre et est donc stable au sens de Lyapunov. Pour mieux appréhender cette idée, on considère deux exemples.

**Le premier exemple concerne le circuit électrique** de la figure 4.2 où  $v(t)$  et  $i(t)$  désignent respectivement la tension appliquée au circuit et le courant qui le parcourt.

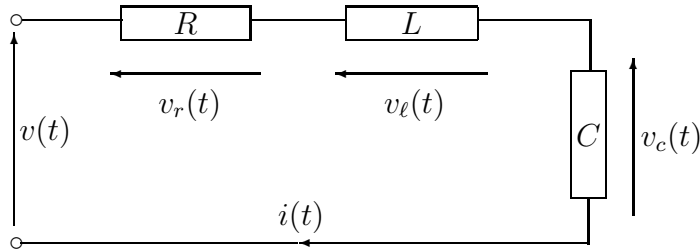


FIGURE 4.2 – Circuit électrique

La relation entre la tension appliquée au circuit et le courant qui le parcourt est donnée par

$$v(t) = v_r(t) + v_l(t) + v_c(t) = Ri(t) + L\rho i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

où  $v_r(t)$ ,  $v_l(t)$  et  $v_c(t)$  désignent respectivement les tensions aux bornes de la résistance  $\mathcal{R}$ , de la bobine d'inductance  $\mathcal{L}$  et du condensateur de capacité  $\mathcal{C}$ . Supposons que ce circuit est abandonné à lui-même à l'instant initial  $t_0$ , l'énergie totale qui a été emmagasinée dans le circuit électrique est donnée par

$$\mathcal{E}(i(t), v_c(t)) = \mathcal{E}_l(i(t)) + \mathcal{E}_c(v_c(t))$$

avec

$$\mathcal{E}_l(i(t)) = \int_0^t v_l(\tau) i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L (i(t))^2$$

$$\mathcal{E}_c(v_c(t)) = \int_0^t v_c(\tau) i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} C (v_c(t))^2$$

Le courant  $i(t)$  et la tension aux bornes du condensateur  $v_c(t)$  représentent donc un état énergétique du circuit et peuvent être alors considérées comme des variables d'état de ce dernier.

L'équation du système autonome correspondant peut alors se mettre sous la forme d'une représentation d'état usuelle

$$\text{SARLC} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{pmatrix} \\ v_c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.17)$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit électrique est une fonction définie positive en l'état du système, soit

$$(\mathcal{E}(i(t), v_c(t)) \geq 0) \text{ et } (\mathcal{E}(i(t), v_c(t)) = 0) \iff (i(t) = 0 \text{ et } v_c(t) = 0)$$

Par ailleurs, la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale du système le long de la trajectoire d'état du système est donnée par

$$\rho(\mathcal{E}(i(t), v_c(t))) = Li(t)\rho i(t) + Cv_c(t)\rho v_c(t) = -R(i(t))^2$$

L'énergie qui a été accumulée dans le circuit  $\mathcal{RLC}$  à l'instant initial est donc continûment dissipée dans le circuit tant que le courant n'est pas nul. Le courant électrique qui parcourt le circuit serait alors asymptotiquement nul, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$$

Et à la lumière des lois usuelles des circuits électriques la tension aux bornes du condensateur serait asymptotiquement nulle, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_c(t) = 0$$

Le système autonome (4.17) n'admet donc aucune trajectoire identiquement nulle autre que l'origine qui représente dans ce cas un état d'équilibre asymptotiquement stable.

**Le second exemple concerne le système masse-ressort-amortisseur** de la figure 4.4 où la masse  $m$  est abandonnée à elle-même après avoir été soumise à l'action d'une force  $\varphi(t)$ .

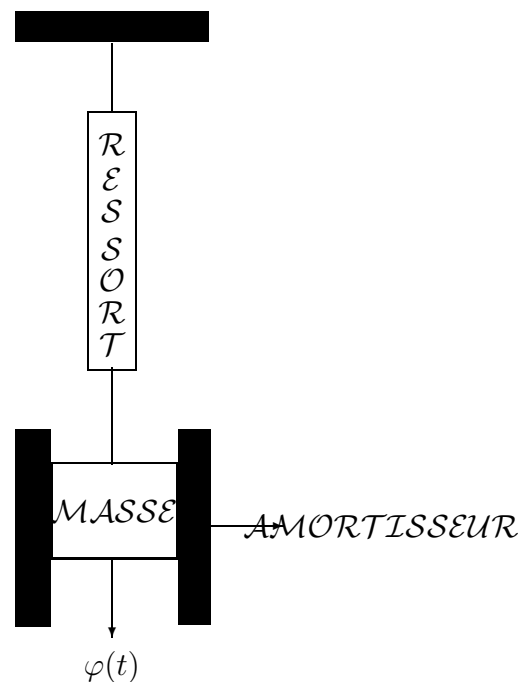


FIGURE 4.3 – Système masse-ressort-amortisseur

Si  $y(t)$  désigne la position du centre de gravité de la masse  $m$  par rapport à sa position d'équilibre, alors la relation fondamentale de la dynamique donne

$$m\rho^2 y(t) = \varphi(t) - \varphi_r(y(t)) - \varphi_f(\rho y(t))$$

dans la mesure où la force de rappel est une fonction de la position de la masse alors que la force de frottement dépend essentiellement de la vitesse de la masse. Supposons que la force de rappel du ressort est linéaire par rapport à la position de la masse et que la force de frottement est caractérisée par une fonction  $\varphi_f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  impaire, alors on aura

$$m\rho^2 y(t) = \varphi(t) - ky(t) - \varphi_f(\rho y(t))$$

où  $k$  désigne la raideur du ressort et

$$\varphi_f(0) = 0 \text{ et } \varphi_f(-v(t)) = -\varphi_f(v(t))$$

L'énergie totale accumulée dans le système est la somme de ses énergies cinétique et potentielle, soit

$$\mathcal{E}(y(t), \rho y(t)) = \mathcal{E}_c(\rho y(t)) + \mathcal{E}_p(y(t)) = \frac{1}{2}m(\rho y(t))^2 + \frac{1}{2}k(y(t))^2$$

La position  $y(t)$  et la vitesse  $\rho y(t)$  de la masse représentent un état mécanique du système et peuvent être alors considérées comme des variables d'état du système. Le système autonome sous-jacent peut être décrit par une représentation d'état usuelle comme suit

$$\text{SAMRA} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} y(t) \\ \rho y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho y(t) \\ -\frac{1}{m}(ky(t) + \varphi_f(\rho y(t))) \end{pmatrix} \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \rho y(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.18)$$

Il apparaît clairement que l'énergie totale du système est définie positive en l'état, soit

$$(\mathcal{E}(y(t), \rho y(t)) \geq 0) \text{ et } (\mathcal{E}(y(t), \rho y(t)) = 0 \iff (y(t) = 0 \text{ et } \rho y(t) = 0))$$

Par ailleurs, la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale du système le long de la trajectoire d'état du système est donnée par

$$\rho(\mathcal{E}(y(t), \rho y(t))) = ky(t)\rho y(t) + m\rho y(t)\rho^2 y(t) = -\rho y(t)\varphi_f(\rho y(t))$$

Et comme la fonction  $\varphi_f$  est impaire, on aura

$$\rho(\mathcal{E}(y(t), \rho y(t))) = -\rho y(t)\varphi_f(\rho y(t)) \leq 0$$

L'énergie totale accumulée dans le système mécanique à l'instant initial sera alors continûment dissipée tant que la vitesse de la masse n'est pas nulle. On aura alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho y(t) = 0$$

Par ailleurs, compte tenu du fait que si la vitesse est nulle, alors la masse retrouve sa position de repos, on aura

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho y(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Le système autonome (4.18) n'admet donc aucune trajectoire identiquement nulle autre que

l'origine qui représente dans ce cas un état d'équilibre asymptotiquement stable.

Ces exemples motivent clairement la définition suivante d'une fonction pour un système autonome donné.

**Définition 4.3** Soit  $V : x \in \mathcal{R}^n \rightarrow V(x) \in \mathcal{R}$  une fonction continue dans un voisinage  $\mathcal{V}(x_e)$  de l'état d'équilibre  $x_e$  du système autonome  $\mathcal{SA}$ .  $V$  est dite fonction de Lyapunov pour le système autonome (4.16) si elle vérifie les propriétés suivantes.

- P1.  $V$  est définie positive dans  $\mathcal{V}(x_e)$  sauf en  $x_e$ , soit  $V(x_e) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(x_e) - \{x_e\}$
- P2.  $V$  est différentiable à dérivées continues et  $\rho V$  est définie négative dans  $\mathcal{V}(x_e)$  le long de la trajectoire de l'état du système autonome (4.16).

Une illustration géométrique relativement simple peut être obtenue à partir des courbes de niveau de la fonction de Lyapunov, soit les lieux définis par  $V(x) = \gamma$  avec  $\gamma > 0$ , au voisinage de l'état d'équilibre  $x_e$ . Ces courbes sont fermées, disjointes et encerclent  $x_e$ . Par ailleurs, la trajectoire d'état évolue toujours vers des courbes de niveau plus bas. Cette interprétation suggère que l'existence d'une fonction de Lyapunov au voisinage d'un état d'équilibre d'un système permet de conclure sur sa stabilité. Le résultat suivant confirme et précise ce point de vue : il constitue le critère de Lyapunov.

**Résultat 4.6** Considérons le système autonome (4.16) et supposons qu'il admet une fonction de Lyapunov  $V$  dans un voisinage de son état d'équilibre  $\mathcal{V}(x_e)$ , alors on a les axiomes suivants.

- A1. L'état d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable dans  $\mathcal{V}(x_e)$ .
- A2. Si  $\rho V$  est définie non positive dans  $\mathcal{V}(x_e)$  le long de la trajectoire d'état du système autonome (4.16), alors l'état d'équilibre  $x_e$  est stable au sens de Lyapunov.
- A3. Si la fonction de Lyapunov  $V$  est de plus radiale, i.e.  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , alors l'état d'équilibre est globalement asymptotiquement stable dans  $\mathcal{R}^n$ .

**Remarque 4.6** L'approche de Lyapunov ne fournit que des conditions suffisantes de stabilité. On peut toutefois postuler que si le système autonome (4.16) admet une fonction  $V$  continue et définie positive telle que la dérivée  $\rho V$  est définie positive le long de ses trajectoire d'état dans un voisinage de son état d'équilibre  $\mathcal{V}(x_e)$ , alors l'état d'équilibre  $x_e$  est instable.

## 4.2.2 Retour aux systèmes linéaires invariants dans le temps

Dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps, l'approche de Lyapunov fournit des conditions nécessaires et suffisantes comme le montre le résultat suivant

**Résultat 4.7** Considérons le système linéaire invariant dans le temps (4.13), alors les axiomes suivants sont équivalents.

A1.  $x_e = 0$  est un état d'équilibre asymptotiquement stable.

A2. Pour toute matrice symétrique et définie positive  $Q$ , il existe une matrice unique symétrique et définie positive  $P$  qui vérifie l'équation de Lyapunov

$$F^T P + P F = -Q$$

A3. L'équation de Lyapunov

$$F^T P_i + P_i F = -I_n$$

admet une solution unique symétrique et définie positive  $P_i$ .

**Preuve.** Montrons dans un premier temps que les propriétés A1 et A2 sont équivalentes. L'implication  $A2 \implies A1$  découle d'une application directe de la seconde méthode de Lyapunov puisque la propriété A2 permet de définir une fonction de Lyapunov pour le système autonome (4.13), en l'occurrence la fonction  $V : x \in \mathcal{R}^n \rightarrow V(x) = x^T P x \in \mathcal{R}^+$ . Elle vérifie les propriétés toutes les propriétés requises sur  $\mathcal{R}^n$ , notamment  $V$  est définie positive sur  $\mathcal{R}^n - \{0\}$  et  $\rho V$  est définie négative sur  $\mathcal{R}^n - \{0\}$  puisque

$$\rho V(x(t)) = (F x(t))^T P x(t) + x(t)^T P (F x(t)) = x(t)^T (F^T P + P F) x(t) = -x(t)^T Q x(t)$$

Par ailleurs,  $V$  est radiale car  $x^T P x$  tend vers l'infini lorsque  $\|x\|$  tend vers l'infini. On peut donc conclure que  $x_e = 0$  est un état d'équilibre asymptotiquement stable du système autonome  $\rho x(t) = F x(t)$  conformément au résultat 4.6.

Pour montrer l'implication  $A1 \implies A2$ , introduisons la matrice définie par

$$P(t) = \int_0^t e^{F^T t} Q e^{F t} dt$$

qui est symétrique et définie positive si la matrice  $Q$  est symétrique et définie positive. Cette intégrale converge en vertu de l'axiome A1 puisque la fonction exponentielle est uniformément continue et  $\{\|e^{F t}\|\}$  est asymptotiquement nulle conformément à la propriété P3 du résultat ?? On aura donc

$$0 < P(t) \leq P = \int_0^{+\infty} e^{F^T t} Q e^{F t} dt$$

Par ailleurs, on peut vérifier aisément que

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left( e^{F^T \tau} Q e^{F \tau} \right) d\tau = e^{F^T t} Q e^{F t} - Q$$

La matrice  $P(t)$  est donc une solution de l'équation différentielle

$$\rho P(t) = F^T P(t) + P(t) F + Q = 0$$

et sa limite  $P$  vérifie l'équation de Lyapunov pour les systèmes linéaires, soit

$$F^T P + P F + Q = 0$$

Il reste à montrer l'unicité de la solution  $P$ . Pour ce faire, supposons que l'équation de Lyapunov admet une autre solution  $\bar{P}$ , alors on a

$$(\bar{P} - P)F + F^T(\bar{P} - P) = 0$$

et donc

$$e^{F^T t}(\bar{P} - P)Fe^{Ft} + e^{F^T t}F^T(\bar{P} - P)e^{Ft} = \frac{d}{dt} \left( e^{F^T t}(\bar{P} - P)e^{Ft} \right) = 0$$

En intégrant les deux membres de 0 à l'infini, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{F^T t}(\bar{P} - P)e^{Ft} \right) dt = -(\bar{P} - P) = 0$$

ce qui permet de conclure à l'unicité de la solution.

Montrons maintenant que les propriétés  $\mathcal{A}2$  et  $\mathcal{A}3$  sont équivalentes. Pour ce faire, rappelons d'abord que pour toute matrice symétrique et définie positive  $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , il existe une matrice triangulaire supérieure  $T \in \mathcal{R}^{n \times n}$  telle que  $Q = T^T T$ . Ce résultat permet de conclure que

$$F^T P_i + P_i F = -I_n$$

$\Leftrightarrow$

$$T^T F^T T^{-T} T^T P_i T + T^T P_i T T^{-1} F T = -T^T T = -Q$$

$\Leftrightarrow$

$$(T^{-1} F T)^T (T^T P_i T) + (T^T P_i T) (T^{-1} F T) = -T^T I_n T = -Q$$

Posons

$$\bar{F} = T^{-1} F T \text{ et } \bar{P} = T^T P_i T$$

On aura alors

$$\exists P_i = P_i^T \geq 0 / F^T P_i + P_i F = -I_n$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \bar{Q} = \bar{Q}^T \geq 0 \exists \bar{P} = \bar{P}^T \geq 0 / \bar{F}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{F}^T = -\bar{Q}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall Q = Q^T \geq 0 \exists P = P^T \geq 0 / F^T P + P F^T = -Q$$

puisque

$$\det(sI_n - \bar{F}) = \det(T^{-1} sI_n T - T^{-1} F T) = \det(sI_n - F)$$

*CQFD.*

**Remarque 4.7** On peut réaliser une estimation du taux de convergence d'une fonction de Lyapunov quadratique du système autonome (4.13), soit

$$\mu = - \frac{\rho(V(x(t)))}{V(x(t))} = \frac{x^T(t) Q x(t)}{x^T(t) P x(t)}$$



On utilisera pour ce faire la propriété triviale issue de la nature quadratique de la fonction de Lyapunov

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \leq \mu \leq \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}$$

qui permet de postuler que

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

est une bonne estimée du taux de convergence dont la détermination requiert la résolution de l'équation de Lyapunov et que cette estimée est invariante d'une normalisation éventuelle de la matrice  $Q$  puisque l'équation de Lyapunov peut toujours se mettre sous la forme

$$F^T \frac{P}{\lambda} + \frac{P}{\lambda} F = -\frac{Q}{\lambda}$$

Par ailleurs, le taux de convergence minimal associé à l'équation de Lyapunov

$$F^T P_i + P_i F = -I_n$$

est supérieure ou égal au temps de convergence minimal associé à l'équation de Lyapunov

$$F^T P + P F = -Q \text{ avec } \lambda_{\min}(Q) = 1$$

En effet, la soustraction membre à membre de ces deux fonctions de Lyapunov donne

$$F^T (P - P_i) + (P - P_i) F = -(Q - I_n)$$

Et puisque  $\lambda_{\min}(Q) = \lambda_{\max}(I_n) = 1$ , on aura  $Q - I_n \geq 0$  et donc  $P - P_i \geq 0$ . Cette dernière inégalité permet de conclure que  $\lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\max}(P_i)$  et donc

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \leq \frac{\lambda_{\min}(I_n)}{\lambda_{\max}(P_i)} = \alpha_i$$

Et comme la taux de convergence de la trajectoire d'état du système est être aisément déterminé à partir du mode dominant du système autonome considéré, on peut alors le déterminer relativement facilement dans certains cas, notamment le cas d'un système asymptotiquement stable dont la matrice d'état  $F$  symétrique. Elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement négatives. On peut alors procéder à un changement de base dans laquelle la matrice d'état est diagonale, i.e. constituée par les valeurs propres de  $F$ . La solution de l'équation de Lyapunov pour  $Q = I_n$  dans cette nouvelle base, soit

$$\Lambda^T P + P \Lambda = 2\Lambda P = I_n$$

est donnée par

$$P = -\frac{1}{2} \Lambda^{-1}$$

L'estimée du taux de convergence de l'état est alors donnée par

$$2\alpha_i = 2 \frac{\lambda_{\min}(I_n)}{\lambda_{\max}(P_i)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(P_i)} = -\lambda_{\min}(\Lambda) = -\lambda_{\min}(F)$$

On retrouve bien la valeur absolue du pôle dominant du système.

### 4.2.3 Test algébrique de stabilité

Un ingénieur issu de l'école d'automatique linéaire pourrait penser que l'approche de Lyapunov n'est pas vital pour tester la stabilité d'un système linéaire invariant puisqu'il suffit de déterminer les racines du polynôme des pôles où les valeurs propres de la matrice d'état  $F$  et vérifier si elles sont bien dans le domaine de stabilité. Cette pensée est fallacieuse dans la mesure où les solveurs des racines d'un polynôme disponibles (resp. des valeurs propres d'une matrice) disponibles ne sont pas suffisamment efficaces. En effet, les solveurs des racines d'un polynôme sont conçues à partir de procédures heuristiques dont la précision n'est pas prouvée indépendamment de l'habileté de leurs architectes. Quant aux solveurs des valeurs propres d'une matrice, ils ne sont efficaces que dans le cas d'une matrice symétrique.

Confronté à ce constat, un ingénieur assidu de l'école d'automatique linéaire pourrait penser aux critères algébriques qui ont été spécifiquement élaborées pour vérifier directement si les zéros d'un polynôme à coefficients réels sont bien situés dans le domaine de stabilité sans avoir à les déterminer. Il réalisera rapidement que ces méthodes algébrique sont relativement limitées pour en faire un outil ingénieur pour trois raisons principales. La première relève du fait qu'ils ne permettent de répondre à la question de stabilité que d'une manière dichotomique, i.e. par un oui ou un non. La seconde concerne leur grande sensibilité aux incertitudes sur les paramètres du polynôme des pôles issues des inéluctables erreurs de modélisation. La troisième est liée à la complexité des calculs qui augmente avec l'ordre du système à analyser.

L'approche de Lyapunov permet d'élaborer un critère algébrique approprié pour le test de stabilité asymptotique dans le cas des systèmes linéaires invariants à partir de l'axiome  $\mathcal{A}2$  du résultat 4.7 que nous rappelons ci dessous.

Un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice symétrique et définie positive  $Q$ , il existe une matrice unique symétrique et définie positive  $P$  qui vérifie l'équation de Lyapunov.

$$F^T P + F F = -Q$$

Pour tester la stabilité d'un système linéaire invariant dans le temps, il suffit de montrer que l'équation de Lyapunov  $F^T P + F F + I_n = 0$  admet une solution symétrique et définie positive, soit  $P = P^T > 0$ . Pour ce faire, on dispose d'une procédure efficace qui consiste à résoudre l'équation de Lyapunov et à tester la positivité de la solution en calculant ses valeurs propres. Ce test est réalisable avec les solveurs robustes de valeurs propres des matrices symétriques.

**Remarque 4.8** Supposons que le critère de stabilité de Lyapunov ne soit pas vérifié d'une manière stricte, e.g.  $\exists P = P^T > 0 / F^T P + F F \leq 0$ , alors les trajectoires d'état du système autonome (4.13) ne convergent pas nécessairement vers son état d'équilibre, mais sont bornées. D'un point de vue géométrique, cela veut dire que l'ellipsoïde donné par  $\mathcal{E} = \{x \in \mathcal{R}^n / x^T P x \leq 1\}$  est un invariant. En effet, on a

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left( x(\tau)^T P x(\tau) \right) d\tau = x(\tau)^T P x(\tau) - x(0)^T P x(0)$$

et

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left( x(\tau)^T P x(\tau) \right) d\tau = \int_0^t x(\tau)^T (F^T P + P F) x(\tau) d\tau$$

Et comme

$$F^T P + P F \leq 0$$

on obtient la propriété

$$x(\tau)^T P x(\tau) - x(0)^T P x(0) \leq 0$$

qui permet d'avoir le résultat géométrique d'invariance de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  requis, notamment

$$x(0) \in \mathcal{E} \implies x(t) \in \mathcal{E} \text{ pour tout } t \geq 0$$

D'un point de vue algébrique, la condition  $\exists P = P^T > 0 / F^T P + P F \leq 0$  est équivalente au fait que toutes les valeurs propres de  $F$  sont situées à l'intérieur du demi-plan gauche et que celles qui sont sur l'axe imaginaire sont non défectives. Physiquement, cela se traduit par l'existence de solutions libres bornées : c'est le cas d'un intégrateur ou d'un oscillateur.

#### 4.2.4 Techniques de comparaison et majoration

L'approche de Lyapunov sera essentiellement utilisée pour l'analyse de stabilité (resp. de convergence) des systèmes linéaires variants dans le temps (resp. des algorithmes d'estimation d'état ou d'adaptation paramétrique). On utilisera pour ce faire des fonctions de Lyapunov quadratiques, e.g.  $V(x) = x^T P(t)x$  avec  $P(t) = P(t)^T > 0$ . Pour mieux apprécier une telle remarque, on suggère de résoudre les problèmes 4.13, 4.14 et 4.15.

Le test de décroissance de la fonction  $V$  n'est pas aussi simple qu'il semble apparaître au premier abord, il requiert des procédures de comparaison et de majoration appropriées, notamment

- la propriété usuelle d'une matrice symétrique définie positive (resp. non négative)  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\lambda_{\min}(P) x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) x^T x$$

$$\text{(resp. } 0 < \underline{\lambda}(P) x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) x^T x \text{)}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $\underline{\lambda}(P)$  désigne la plus petite valeur propre non nulle de la matrice  $P$ ,

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire

$$|x^T y| \leq \|x\| \|y\| \text{ et } \|\pm x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

indépendamment des signes devant les vecteurs au sein du membre de droite.

- et le fait que la moyenne arithmétique d'un vecteur est au moins égale à sa moyenne géométrique, soit

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Par ailleurs, on distingue le cas usuel où la fonction  $V$  est telle que  $\rho V \leq \mu V$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$  (resp.  $\rho V \leq g(V)$ ). On aura alors

$$V(t) \leq V(0) + \mu \int_0^t V(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

$$\left( \text{resp. } V(t) \leq V(0) + \int_0^t g(V(\tau)) d\tau \right) \quad (4.20)$$

On ne peut pas déterminer aisément la fonction  $V$  à partir des inégalités (4.19) et (4.20). Pour pallier cette complexité, on isole la fonction  $V$  d'un seul côté de l'inégalité en vertu du résultat suivant qui n'est autre que le célèbre lemme de Belleman-Gronwall.

**Résultat 4.8** Soient deux fonctions continues  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\eta : [a, b] \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Si une fonction continue  $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie

$$\varphi(t) \leq \gamma(t) + \int_0^t \eta(\tau) \varphi(\tau) d\tau \text{ pour } t \in [a, b] \quad (4.21)$$

alors, on a

$$\varphi(t) \leq \gamma(t) + \int_a^t \eta(\tau) \gamma(\tau) e^{\int_\tau^t \eta(\nu) d\nu} d\tau \quad (4.22)$$

Par ailleurs, si la fonction  $\gamma$  est constante sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors on aura

$$\varphi(t) \leq \gamma \exp \left( \int_a^t \eta(\tau) d\tau \right) \quad (4.23)$$

**Preuve.** Posons

$$\zeta(t) \triangleq \int_a^t \eta(\tau) \varphi(\tau) d\tau \text{ et } v(t) \triangleq \zeta(t) + \gamma(t) - \varphi(t) \geq 0$$

On aura

$$\rho \zeta(t) = \eta(t) \varphi(t) = \eta(t) \zeta(t) + \eta(\tau) \gamma(t) - \eta(t) v(t)$$

C'est une équation d'état scalaire dont la matrice de transition est donnée par

$$\phi(t, \tau) = \exp \left( \int_a^t \eta(\tau) d\tau \right)$$

Comme  $\zeta(a) = 0$ , on a

$$\zeta(t) = \int_a^t \phi(t, \tau) (\eta(\tau) \gamma(\tau) - \eta(t) v(\tau)) d\tau$$

Et compte tenu du fait que  $\int_a^t \phi(t, \tau) \eta(t) v(\tau) d\tau \geq 0$ , on aura

$$\zeta(t) \leq \int_a^t \exp \left( \int_\nu^t \eta(\tau) d\tau \right) \eta(\nu) \gamma(\nu) d\nu$$

Ainsi, on retrouve l'inégalité (4.22) du résultat puisque  $\varphi(t) \leq \gamma(t) + \zeta(t)$ .

Par ailleurs, si la fonction  $\gamma$  est constante sur l'intervalle  $[a, b]$ , on aura

$$\begin{aligned} \int_a^t \eta(\nu) \exp\left(\int_\nu^t \eta(\tau) d\tau\right) d\nu &= - \int_a^t \frac{d}{d\nu} \left( \exp\left(\int_\nu^t \eta(\tau) d\tau\right) \right) d\nu \\ &= - \left[ \exp\left(\int_\nu^t \eta(\tau) d\tau\right) \right]_{\nu=a}^{\nu=t} \\ &= -1 + \exp\left(\int_a^t \eta(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve l'inégalité (4.23) du résultat.

*CQFD.*

### 4.3 Systèmes linéaires variants dans le temps

On se propose dans ce paragraphe de présenter d'une manière concise les résultats de stabilité uniforme spécifiques au cas des systèmes linéaires variants dans le temps décrits par une réalisation d'état

$$\{F(t), G(t), H(t), E(t)\}$$

dont la représentation d'état associée est donnée par les équations (2.101). La nature uniforme de la stabilité des systèmes variants dans le temps est essentiellement motivée par des considérations fondamentales pour l'ingénierie des systèmes. Par ailleurs, on occultera la séquence matricielle  $\{E(t)\}$  sans aucune perte de généralité puisqu'elle n'est pas cruciale pour une étude de la stabilité pourvu qu'elle soit bornée. Autrement, le système ne peut être  $\mathcal{EBSB}$  stable. Ainsi, on se focalisera sur la classe des systèmes linéaires variants dans le temps décrits par

$$S\mathcal{LVT} \begin{cases} \rho x(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \text{ avec } x(0) = x_o \\ y(t) = H(t)x(t) \end{cases} \quad (4.24)$$

Et dont la matrice de transition et la réponse impulsionnelle sont respectivement désignées par les séquences  $\{\Phi(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$  et  $\{g(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ .

#### 4.3.1 Stabilité uniforme $\mathcal{EBSB}$

Comme pour les systèmes linéaires invariants, le concept de stabilité  $\mathcal{EBSB}$  d'un système est communément étudiée par une comparaison du supremum du signal d'entrée par rapport au supremum de sa réponse intrinsèque à ce signal d'entrée avec des conditions initiales nulles comme l'indique la définition suivante.

**Définition 4.4** Le système (4.24) est uniformément  $\mathcal{EBSB}$  stable s'il existe un scalaire positif  $\mu$  tel que pour tout instant initial  $t_o$  et pour toute séquence d'entrée  $\{u(t)\}$ , la réponse du système correspondant à un état initial nul vérifie la propriété suivante

$$\sup_{t \geq t_0} \|y(t)\| \leq \mu \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$$

*Le caractère uniforme de la stabilité est intrinsèque au fait que le scalaire  $\mu$  est le même pour toutes les séquences d'entrée et tous les instants initiaux. La stabilité uniforme  $\mathcal{EBSB}$  d'un système est essentiellement caractérisée par la bornitude de sa réponse impulsionnelle comme le montre le résultat suivant.*

**Résultat 4.9** *Le système (4.24) est uniformément  $\mathcal{EBSB}$  stable si et seulement si il existe un scalaire fini  $\gamma$  tel que sa réponse impulsionnelle vérifie la propriété suivante*

$$\int_{t_i}^t \|g(t, \tau)\| d\tau \leq \gamma \text{ pour tout } (t, t_i) / t \geq t_i \quad (4.25)$$

**La preuve** peut être faite à titre d'exercice à partir de la démarche adoptée dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps.

### 4.3.2 Stabilité uniforme interne

*La stabilité uniforme interne concerne la bornitude et le comportement asymptotique des solutions du système autonome associé au système (4.24), soit*

$$\mathcal{SALVT} \left\{ \rho x(t) = F(t)x(t) \text{ avec } x(t_0) = x_0 \right. \quad (4.26)$$

*Et comme ces solutions sont linéaires par rapport à l'état initial, on peut exprimer cette bornitude sous une forme linéaire par rapport à la norme de l'état initial comme l'indique la définition suivante.*

**Définition 4.5** *Le système autonome (4.26) est uniformément stable s'il existe un scalaire positif  $\gamma$  tel que pour tout instant initial  $t_0$  et tout état initial  $x_0 = x(t_0)$ , les solutions correspondantes vérifient la propriété*

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\| \text{ pour tout } t \geq t_0 \quad (4.27)$$

*On notera que  $\gamma \geq 1$  et que la nature uniforme de la stabilité implique que le scalaire  $\gamma$  est indépendant du choix de l'instant initial. Le résultat suivant montre que la stabilité uniforme d'un système linéaire variant dans le temps est essentiellement caractérisée par la norme induite de la matrice de transition du système autonome sous-jacent.*

**Résultat 4.10** *Le système autonome (4.26) est uniformément stable si et seulement si il existe un scalaire positif  $\eta$  tel la propriété suivante est satisfaite.*

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \eta \text{ pour tout } (t, t_0) / t \geq t_0 \quad (4.28)$$

**La preuve** de ce résultat peut être faite à titre d'exercice en s'inspirant de la preuve qui sera faite dans le cas de la stabilité exponentielle uniforme qui permet d'étudier conjointement la bornitude des solutions et leur comportement asymptotique comme l'indique la définition suivante

**Définition 4.6** Le système autonome (4.26) est uniformément exponentiellement stable s'il existe deux scalaires  $0 < \gamma < \infty$  et  $0 \leq \lambda < \infty$  tels que pour tout instant initial  $t_o$  et tout état initial  $x_o = x(t_o)$ , les solutions correspondantes vérifient la propriété

$$\|x(t)\| \leq \gamma e^{\lambda(t-\tau)} \|x(t_o)\| \text{ pour tout } t \geq t_o \quad (4.29)$$

On notera que  $\gamma \geq 1$  et que la nature uniforme de la stabilité implique que le scalaire  $\gamma$  est indépendant du choix de l'instant initial. Le résultat suivant montre que la stabilité exponentielle uniforme d'un système linéaire variant dans le temps est essentiellement caractérisée par la norme induite de la matrice de transition du système autonome sous-jacent.

**Résultat 4.11** Le système autonome (4.26) est uniformément exponentiellement stable si et seulement si il existe deux scalaires  $0 < \gamma < \infty$  et  $0 \leq \lambda < \infty$  tels que la propriété suivante est satisfaite

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \gamma e^{\lambda(t-\tau)} \text{ pour tout } (t, \tau) / t \geq \tau \quad (4.30)$$

**Preuve.** Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour ce faire, considérons deux scalaires  $0 < \mu < \infty$  et  $0 \leq \lambda < \infty$  tels que la propriété 4.30 est satisfaite. Alors pour tout instant initial  $t_o$  et tout état initial  $x_o = x(t_o)$ , la solution du système autonome (4.26) satisfait la propriété suivante

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|\Phi(t, t_o) x(t_o)\| \\ &\leq \|\Phi(t, t_o)\| \|x(t_o)\| \\ &\leq \gamma e^{-\lambda(t-t_o)} \|x_o\| \text{ pour tout } t \geq t_o \end{aligned}$$

Le système autonome (4.26) est donc uniformément exponentiellement stable.

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Pour ce faire, supposons que le système autonome (4.26) est uniformément exponentiellement stable, alors il existe deux scalaires  $0 < \gamma < \infty$  et  $0 \leq \lambda < \infty$  tels que la propriété (4.30) est satisfaite pour un instant initial et un état initial arbitraires. Par ailleurs, étant donné un instant  $t_i \geq t_o$  et un état  $x_i$  tel que

$$\|x_i\| = 1 \text{ et } \|\Phi(t_i, t_o) x_i\| = \|\Phi(t_i, t_o)\|$$

Alors la solution du système autonome (4.26) pour un état initial  $x(t_o) = x_i$  donne à l'instant  $t_i$

$$\|x(t_i)\| = \|\Phi(t_i, t_o) x(t_o)\| = \|\Phi(t_i, t_o) x_i\|$$

Et comme  $\|x_i\| = 1$ , on aura

$$\|x(t_i)\| = \|\Phi(t_i, t_o)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t_i - t_o)} \|x_o\|$$

Ainsi, la condition est bien suffisante puisque cet état initial peut être spécifié pour tout instant initial  $t_o$  et tout instant  $t_i$  tel que  $t_i \geq t_o$  en vertu de la définition de la norme induite d'une matrice.

CQFD.

Le concept de stabilité uniforme exponentielle est généralement présenté sous la forme suivante.

**Résultat 4.12** *Considérons le système autonome (4.26) et supposons qu'il existe un scalaire positif fini  $\phi$  tel que  $\|F(t)\| \leq \phi$ . Alors le système autonome (4.26) est uniformément exponentiellement stable si et seulement si il existe un scalaire positif fini  $\mu$  tel que la propriété suivante est satisfaite*

$$\int_{\tau}^t \|\Phi(t, \eta)\| d\eta \leq \mu \text{ pour tout } (t, \tau) / t \geq \tau \quad (4.31)$$

**Preuve.** *Montrons d'abord que la condition est nécessaire. En vertu du résultat 4.11, le système est exponentiellement stable s'il existe des scalaires finis  $\gamma$  et  $\lambda$  tels que  $\|\Phi(t, \eta)\| \leq \gamma e^{\lambda(t-\eta)}$  pour tout  $t \geq \eta$ . On aura alors*

$$\int_{\tau}^t \|\Phi(t, \eta)\| d\eta \leq \int_{\tau}^t \gamma e^{\lambda(t-\eta)} d\eta \leq \frac{\gamma}{\lambda} \text{ pour tout } (t, \tau) / t \geq \tau$$

*On retrouve ainsi la propriété (4.31) avec  $\mu = \frac{\gamma}{\lambda}$ . Montrons ensuite que la condition est nécessaire en utilisant la propriété usuelle suivante de la matrice de transition*

$$\Phi(t, \tau) = I_n - \int_{\tau}^t \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi(t, \eta)) d\eta = I_n + \int_{\tau}^t \Phi(t, \eta) F(\eta) d\eta \quad (4.32)$$

Compte tenu de la propriété (4.31), on a

$$\Phi(t, \tau) \leq 1 + \mu_f \int_{\tau}^t \|\Phi(t, \eta)\| d\eta \leq 1 + \mu_f \mu_{\varphi} \quad (4.33)$$

Comme  $t \geq \tau$ , on aura

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, \tau)\| (t - \tau) &= \int_{\tau}^t \|\Phi(t, \tau)\| d\eta \leq \int_{\tau}^t \|\Phi(t, \eta)\| \|\Phi(\eta, \tau)\| d\eta \\ &\leq \mu_{\varphi} (1 + \mu_f \mu_{\varphi}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Et si l'on pose  $\varrho = 2\mu_{\varphi} (1 + \mu_f \mu_{\varphi})$ , on aura



$$\|\Phi(\tau + \varrho, \tau)\| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (4.35)$$

En vertu des propriétés (4.33) et (4.35), on peut établir aisément les inégalités suivantes sur les intervalles de la forme  $(\tau + k\varrho, \tau + (k+1)\varrho)$  pour tout  $\tau$

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, \tau)\| &\leq 1 + \mu_f \mu_\varphi \text{ pour } t \in (\tau, \tau + \varrho) \\ &\leq \|\Phi(t, \tau + \varrho)\| \|\Phi(\tau + \varrho, \tau)\| \\ &\leq \frac{1 + \mu_f \mu_\varphi}{2} \text{ pour } t \in (\tau + \varrho, \tau + 2\varrho) \\ &\leq \|\Phi(t, \tau + 2\varrho)\| \|\Phi(\tau + 2\varrho, \tau + \varrho)\| \|\Phi(\tau + \varrho, \tau)\| \\ &\leq \frac{1 + \mu_f \mu_\varphi}{2^2} \text{ pour } t \in (\tau + 2\varrho, \tau + 3\varrho) \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on trouve

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \frac{1 + \mu_f \mu_\varphi}{2^k} \text{ pour } t \in (\tau + k\varrho, \tau + (k+1)\varrho)$$

Et si l'on choisit  $\gamma = 2(1 + \mu_f \mu_\varphi)$  et  $\lambda = -\frac{1}{\varrho} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ , on obtient

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \gamma e^{\lambda(t-\tau)} \text{ pour } t \geq \tau$$

On retrouve ainsi la propriété de stabilité exponentielle uniforme conformément au résultat 4.11.

*CQFD.*

On peut postuler naturellement qu'un système uniformément exponentiellement stable est uniformément stable mais la réciproque n'est pas vraie. Ceci nous amène au concept de stabilité uniforme asymptotique.

**Définition 4.7** Le système autonome (4.26) est uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si pour tout scalaire positif  $\eta$ , il existe un scalaire positif  $t_h$  tel que pour tout instant initial  $t_o$  et tout état initial  $x_o = x(t_o)$ , les solutions correspondantes vérifient la propriété

$$\|x(t)\| \leq \eta \|x(t_o)\| \text{ pour tout } t \geq t_o + t_h \quad (4.36)$$

Le résultat suivant précise une propriété intrinsèque à la stabilité des systèmes linéaires, en l'occurrence l'équivalence entre stabilité uniforme asymptotique et stabilité uniforme exponentielle.

**Résultat 4.13** *Le système autonome (4.26) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il est uniformément exponentiellement stable*

**La preuve** peut être faite à partir de la démarche adoptée pour établir le même résultat dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Le résultat suivant précise la relation entre le concept de stabilité uniforme exponentielle et celui de stabilité uniforme  $\mathcal{EBSB}$ .

**Résultat 4.14** *Supposons que le système (4.24) est uniformément exponentiellement stable et qu'il existe deux scalaires  $\mu_g$  et  $\mu_h$  tels que*

$$\|G(t)\| \leq \mu_g \text{ et } \|H(t)\| \leq \mu_h \text{ pour tout } t$$

Alors le système est uniformément  $\mathcal{EBSB}$  stable.

**Preuve.** Comme le système est uniformément exponentiellement stable, on aura

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^t \|g(t, \tau)\| d\tau &\leq \int_{t_i}^t \|H(t)\| \|\Phi(t, \tau)\| \|G(\tau)\| d\tau \\ &\leq \mu_h \mu_g \int_{t_i}^t \gamma e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &\leq \frac{\gamma \mu_h \mu_g}{\lambda} \end{aligned}$$

pour tout  $(t, \tau)$  avec  $t \geq \tau$ . Et donc le système est uniformément  $\mathcal{EBSB}$  stable en vertu du résultat ??.

On notera que tous les résultats de stabilité uniforme qui ont été élaborés pour les systèmes linéaires variants dans le temps dépendent essentiellement de la réponse impulsionnelle et de la matrice d'état du système, ils ne peuvent pas être utilisés pour développer des outils efficaces de test de stabilité. Le résultat suivant précise les conditions de stabilité uniforme exponentielle en utilisant une approche de Lyapunov qui permet de construire relativement aisément une procédure appropriée pour le test de la stabilité.

**Résultat 4.15** *Le système autonome (4.26) est uniformément exponentiellement stable s'il existe une séquence matricielle  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  telle que*

$$0 < \nu I_n \leq P(t) = P^T(t) \leq \eta I_n \quad (4.37)$$

et

$$F^T(t)P(t) + P(t)F(t) - \rho P(t) \leq -\mu I_n \quad (4.38)$$

où  $\nu$ ,  $\eta$  et  $\mu$  sont des scalaires positifs finis.

**Preuve.** En utilisant l'équation (4.26) du système et les propriétés (4.38) et (4.38), on a

$$\rho(x^T(t)P(t)x(t)) \leq -\mu \|x(t)\|^2 \text{ pour tout } t \geq t_o$$

et

$$x^T(t)P(t)x(t) \leq -\eta \|x(t)\|^2 \text{ pour tout } t \geq t_o$$

ou d'une manière équivalente

$$-\|x(t)\|^2 \leq -\frac{1}{\eta} x^T(t)P(t)x(t) \text{ pour tout } t \geq t_o$$

On en déduit alors aisément que

$$\rho(x^T(t)P(t)x(t)) \leq -\frac{\mu}{\eta} x^T(t)P(t)x(t) \text{ pour tout } t \geq t_o \quad (4.39)$$

soit

$$x^T(t)P(t)x(t) \leq e^{-\frac{\mu}{\eta}(t-t_o)} x^T(t_o)P(t_o)x(t_o) \text{ pour tout } t \geq t_o$$

Et compte tenu des propriétés (4.37) et (4.38), on aura

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\eta}{\mu} e^{-\frac{\mu}{\eta}(t-t_o)} \|x(t_o)\|^2 \text{ pour tout } t \geq t_o \quad (4.40)$$

Ainsi le système est bien uniformément exponentiellement stable.

## 4.4 Passivité

L'approche de Lyapunov permet de postuler qu'un système dynamique dépourvu de ses entrées est stable pourvu que l'on puisse exhiber une fonction d'énergie qui décroît le long de ses trajectoires d'état. Elle ne peut pas être utilisée en présence d'une entrée dans la mesure où elle pourrait faire croître la fonction d'énergie d'une manière arbitraire au point de rompre ses propriétés de stabilité. La passivité est une extension naturelle de la stabilité au sens de Lyapunov qui a permis de développer une approche entrée-sortie pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande en exploitant judicieusement des considérations énergétiques, en l'occurrence la problématique de commande robuste des systèmes flexibles exhibant des variations des amortissements de leurs modes de résonance.

Ce paragraphe est essentiellement consacré au développement du concept de passivité et ses implications dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps qui conduit naturellement au concept de positivité. Une attention particulière est accordée au célèbre Lemme de Kalman-Yakubovitch-Popov issue d'une activité de recherche florissante allant de la stabilité absolue à l'hyperstabilité des systèmes tout au long des années soixante. Ce résultat fondamental constitue une pierre angulaire de la théorie des systèmes linéaires, comme en témoignent les études vigoureuses de stabilité et de robustesse des systèmes de commande optimale, des systèmes d'estimation optimale et des systèmes de commande adaptative qui lui sont associées ([14]). Après une présentation concise et précise des systèmes passifs, on se focalise sur les systèmes positifs au travers du Lemme de Kalman-Yakubovitch-Popov.

### 4.4.1 Systèmes passifs

Les systèmes passifs constituent une classe de systèmes stables au sens de Lyapunov décrits par l'opérateur  $\Sigma : u(t) \in \mathcal{L}_e \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(t) = \Sigma(u(t)) \in \mathcal{L}_2 \subset \mathbb{R}^m$  et que l'on peut définir comme suit.

**Définition 4.8** Un système  $\Sigma : u(t) \in \mathcal{L}_e \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(t) = \Sigma(u(t)) \in \mathcal{L}_2 \subset \mathbb{R}^m$ , est dit passif s'il existe une constante  $\gamma_{uy}$  telle que

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq \gamma_{uy} \quad (4.41)$$

pour toutes les séquences d'entrée  $\{u(t)\}$  et tout  $t \geq 0$ . Et si en plus, il existe deux constantes non négatives  $\gamma_u$  et  $\gamma_y$  telles que

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq \gamma_{uy} + \gamma_u \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau + \gamma_y \int_0^t y^T(\tau)y(\tau)d\tau \quad (4.42)$$

pour toutes les séquences d'entrée  $\{u(t)\}$  et tout  $t \geq 0$ , alors le système est strictement passif en entrée (SPÉ) si  $\gamma_u > 0$ , strictement passif en sortie (SPS) si  $\gamma_y > 0$  et fortement strictement passif (FSP) si  $\gamma_u > 0$  et  $\gamma_y > 0$ .

**Remarque 4.9** Comme la propriété de passivité (4.41) est satisfaite pour toute séquences d'entrée  $\{u(t)\}$ , il le sera pour une séquence d'entrée identiquement nulle et donc  $\gamma_{uy} \leq 0$ .

Le résultat suivant permet de caractériser la classe des systèmes passifs sous une forme convenable pour une interprétation énergétique.

**Résultat 4.16** Considérons un système décrit par l'opérateur  $\Sigma : u(t) \in \mathbb{R}^m \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}^m$  et supposons qu'il existe une fonction définie non négative  $V$  telle que

$$V(t) - V(0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.43)$$

pour toutes les séquences d'entrée  $\{u(t)\}$ , pour tout  $t \geq 0$  et pour toute fonction  $V$ . Alors le système d'entrée  $\{u(t)\}$  et de sortie  $\{y(t)\}$  est passif. Et s'il existe deux constantes non négatives  $\gamma_u$  et  $\gamma_y$  telles que

$$V(t) - V(0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau - \gamma_u \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau - \gamma_y \int_0^t y^T(\tau)y(\tau)d\tau \quad (4.44)$$

pour toutes les séquences d'entrée  $\{u(t)\}$ , pour tout  $t \geq 0$  et toute fonction  $V$ . Alors le système est strictement passif en entrée (SPÉ) si  $\gamma_u > 0$ , strictement passif en sortie (SPS) si  $\gamma_y > 0$  et fortement strictement passif (FSP) si  $\gamma_u > 0$  et  $\gamma_y > 0$ .

**La preuve** de ce résultat est triviale. Il suffit de remarquer que la propriété de passivité (4.41) est bien satisfaite avec  $\beta \triangleq -V(0)$  puisque

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq -V(0)$$

pour toutes les séquences d'entrée  $\{u(t)\}$ , pour tout  $t \geq 0$  et pour toute fonction  $V$  définie non négative.

On notera que la constante  $\gamma_{uy}$  dépend essentiellement des conditions initiales du système, alors que la fonction  $V$  dépend de l'état du système et peut avoir une interprétation énergétique comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat 4.17** Considérons un système décrit par l'opérateur  $\Sigma : u(t) \in \mathbb{R}^m \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}^m$  et supposons qu'il existe une fonction définie non négative continûment différentiable  $V$  et une fonction mesurable  $g$  telle que  $\int_0^t g(\tau)d\tau \geq 0$  pour tout  $t$ . Alors les propriétés suivantes sont vraies.

$\mathcal{P}1$ . Supposons que

$$\rho V(t) \leq y^T(t)u(t) - g(t)$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$ , alors le système est passif.

$\mathcal{P}2$ . Supposons qu'il existe une constante  $\gamma_u > 0$  telle que

$$\rho V(t) \leq y^T(t)u(t) - \gamma_u u^T(t)u(t) - g(t)$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$ , alors le système est  $\mathcal{SP}\mathcal{E}$ .

$\mathcal{P}3$ . Supposons qu'il existe une constante  $\gamma_y > 0$  telle que

$$\rho V(t) \leq y^T(t)u(t) - \gamma_y y^T(t)y(t) - g(t)$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$ , alors le système est  $\mathcal{SP}\mathcal{S}$ .

$\mathcal{P}4$ . Supposons qu'il existe deux constantes  $\gamma_u > 0$  et  $\gamma_y > 0$  telles que

$$\rho V(t) \leq y^T(t)u(t) - \gamma_u u^T(t)u(t) - \gamma_y y^T(t)y(t) - g(t)$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$ , alors le système est  $\mathcal{FSP}$ .

**Remarque 4.10** Si  $V$  est l'énergie totale du système, alors  $\langle u, y \rangle \triangleq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau$  peut être interprétée comme la puissance fournie au système à partir de la loi de commande  $u$ , alors que  $g(t)$  peut être considérée comme la puissance dissipée par le système. La condition  $\int_0^t g(\tau)d\tau \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$  signifie que le système dissipe de l'énergie.

Par ailleurs, on peut montrer aisément qu'une interconnexions parallèle (resp. en rétroaction) de deux systèmes passifs est passive et peut hériter des propriétés de (stricte) passivité de ses sous-systèmes.

**Résultat 4.18** *Considérons deux systèmes passifs respectivement décrits par les opérateurs*

$$\Sigma_1 : u_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow y_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1} \text{ et } \Sigma_2 : u_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow y_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2}.$$

*Alors le système issu d'une interconnection en parallèle (resp. en rétroaction) de ces deux systèmes est passif comme l'indique la figure 2.8 (resp. la figure 2.9). Par ailleurs, si les deux systèmes sont SPÉ (resp. SPS), alors l'interconnection en parallèle (resp. en rétroaction) est SPÉ (resp. SPS) pourvu que le système  $\Sigma_2$  soit SPÉ.*

**La preuve** de ce résultat peut être aisément faite en utilisant judicieusement les définitions et propriétés des systèmes passifs comme le suggère le problème 4.16

*On développera dans ce qui suit le concept de passivité dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps ; que l'on peut décrire par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$  ou une réalisation d'état  $(F, G, H, E) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}(s) \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times m}$ . Ceci nous amène naturellement aux systèmes positifs qui sont essentiellement caractérisés à partir de leur fonction de Popov qui n'est autre que la fonction rationnelle*

$$\Pi(s) \triangleq \mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(-s) \quad (4.45)$$

*qui a été initialement introduite dans des études relevant de la factorisation spectrale. On notera que les fonctions de transfert des modèles de synthèse des asservissements linéaires vérifient naturellement la propriété suivante.*

$$s \in \mathbb{R} \implies \mathcal{G}(s) \in \mathbb{R} \text{ et } \Pi^T(-s) = \Pi(s) \quad (4.46)$$

#### 4.4.2 Systèmes réels positifs

*Les systèmes réels positifs ont été naturellement introduits à partir des propriétés de passivité des systèmes linéaires invariants dans le temps qui sont précisées par le résultat suivant.*

**Résultat 4.19** *Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  et supposons que tous les pôles du système sont situés dans  $\mathcal{DPGO}$ . Alors les propriétés suivantes sont vraies.*

*P1. Le système est passif si et seulement si sa fonction de Popov est telle que*

$$\lambda_{\min}(\Pi(j\omega)) \geq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

*P2. Le système est SPÉ si et seulement si sa fonction de Popov est telle que*

$$\exists \lambda > 0 / \lambda_{\min}(\Pi(j\omega)) \geq \lambda \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

**La preuve** de ce résultat est essentiellement basée sur le théorème de Parseval, que l'on peut utiliser puisque  $\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) \subset \mathcal{DPGO}$ , soit

$$\int_0^{\infty} y^T(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(j\omega) U(j\omega) d\omega$$

Et comme l'intégration est faite sur un horizon  $[0, t]$  dans les définitions des systèmes passifs, on utilisera une séquence d'entrée tronquée comme suit

$$u_t(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & \text{pour } \tau \leq t \\ 0 & \text{pour } \tau > t \end{cases} \quad (4.47)$$

On aura alors

$$\begin{aligned} \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau &= \int_0^{\infty} y^T(\tau)u_t(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(j\omega) U_t(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (Y^*(j\omega) U_t(j\omega) + U_t^*(j\omega) Y(j\omega)) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^*(j\omega) (\mathcal{G}^*(j\omega) + \mathcal{G}(j\omega)) U_t(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^*(j\omega) \Pi(j\omega) U_t(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.48)$$

Et comme  $\Pi(j\omega)$  est une matrice hermitienne, on aura

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{\min}(\Pi(j\omega)) \|U_t(j\omega)\|^2 d\omega \quad (4.49)$$

Il apparaît alors clairement qu'un système est passif (resp.  $\mathcal{SP}\mathcal{E}$ ) si sa fonction de Popov vérifie la propriété  $\lambda_{\min}(\Pi(j\omega)) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$  (resp.  $\lambda_{\min}(\Pi(j\omega)) \geq \delta > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ ).

Par ailleurs, supposons qu'il existe  $\gamma_u \geq 0$  tel que

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq \gamma_u \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau = \frac{\gamma_u}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^*(j\omega) U_t(j\omega) d\omega$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$  et que le choix des conditions initiales a été fait tel que  $\gamma_{uy} = 0$ ; i.e. le système est passif si  $\gamma_u = 0$  (resp.  $\mathcal{SP}\mathcal{R}$  si  $\gamma_u > 0$ ). Alors, on aura

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^*(j\omega) \Pi(j\omega) U_t(j\omega) d\omega \geq \frac{\gamma_u}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^*(j\omega) U_t(j\omega) d\omega$$

pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$ , soit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^*(j\omega) (\Pi(j\omega) - 2\gamma_u I_m) U_t(j\omega) d\omega \geq 0$$

pour toute séquence entrée  $\{u(t)\}$ . Or cette propriété n'est pas satisfaite pour la classe des entrées harmoniques donnée par

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_0 t) \in \mathbb{R}^m / \lambda_{\min}(\Pi(j\omega_0)) < 2\gamma_u$$

*CQFD*

Une importante activité de recherche a été consacrée à la caractérisation de la passivité des systèmes linéaires invariants dans le temps à partir de leurs fonction de transfert et leurs réalisations d'état (voir [14] pour un bilan pragmatique et rigoureux dans le domaine). Dans ce qui suit, on présente une synthèse concise compte tenu du périmètre de cet ouvrage.

**Fonctions de transfert réelles positives.** Les premières contributions ont été effectuées en adoptant une approche transfert à partir des notions de fonction de transfert réelles bornées et de fonctions de transfert réelles définies positives.

**Définition 4.9** Une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \triangleq [\mathcal{G}_{ij}(s)]$  est dite réelle bornée ( $\mathcal{RP}$ ) si  $\mathcal{G}_{ij}(s)$  est analytique dans  $\mathcal{DPD}$  pour tout  $(i, j) \in [1, m]^2$  et  $\|\mathcal{G}(s)\|_{\infty} \leq 1$ .

**Définition 4.10** . Une fonction de transfert est dite réelle positive ( $\mathcal{RP}$ ) si elle n'admet aucun pôle dans  $\mathcal{DPDO}$  et que la fonction de Lyapunov qui lui est associée est définie non négative dans  $\mathcal{DPDO}$ , i.e.  $\Pi(s) \geq 0$  pour  $\Re(s) > 0$ .

Et on dira qu'une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ , qui n'est pas identiquement nulle pour tout  $s$ , est strictement réelle positive ( $\mathcal{SRP}$ ) si la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s - \mu)$  est  $\mathcal{RP} \forall \mu > 0$ .

Par ailleurs, on dira qu'un système linéaire invariant dans le temps est réel positif ( $\mathcal{RP}$ ) (resp. strictement réel positif ( $\mathcal{SRP}$ )) si et seulement si sa fonction de transfert est  $\mathcal{RP}$  (resp.  $\mathcal{SRP}$ ).

**Remarque 4.11** La définition de fonctions de transfert strictement réelle positives n'est pas uniforme dans la littérature ; elle diffère essentiellement par la nature de la restriction considérée de la classe des fonctions de transfert  $\mathcal{RP}$ . Une présentation concise des différentes définitions est donnée dans [14] avec une attention particulière à leur vraisemblance.

Le résultat suivant permet de caractériser la classe des systèmes réels positifs et stables, i.e. qui n'admettent aucun pôle dans  $\mathcal{DPD}$ .

**Résultat 4.20** Considérons un système stable décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$ . Alors ce système est  $\mathcal{RP}$  si et seulement si sa fonction de Popov sous-jacente vérifie la propriété suivante

$$v^* \Pi(j\omega) v \geq 0 \text{ pour tout } (\omega, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$$



**La preuve** est donnée dans [3]. On propose de la refaire en guise d'un bon exercice sur la caractérisation des systèmes  $\mathcal{RP}$ .

**Remarque 4.12** Considérons un système monovariante et stable décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathbb{R}(s)$ . Alors le système est  $\mathcal{RP}$  si et seulement si son diagramme de Nyquist est complètement situé dans  $\mathcal{DPD}$ . Une telle propriété requiert que le système soit à déphasage minimal, i.e. tous les zéros du système soient situés dans  $\mathcal{DPGO}$ .

Les deux résultats suivants permettent de caractériser les classes des systèmes  $\mathcal{RP}$  et  $\mathcal{SPR}$  qui ne sont pas nécessairement stables à partir de leurs configurations de pôles et fonction de Lyapunov.

**Résultat 4.21** . Un système est  $\mathcal{RP}$  si et seulement si sa fonction de transfert et sa fonction de Popov vérifient les propriétés suivantes.

$\mathcal{P}1$ .  $\mathcal{G}(s)$  n'admet aucun pôle dans  $\mathcal{DPDO}$

$\mathcal{P}2$ .  $\Pi(j\omega) \geq 0$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  /  $j\omega$  n'est pas un pôle de  $\mathcal{G}(s)$

$\mathcal{P}3$ . Si  $j\omega$  est un pôle de  $\mathcal{G}(s)$ , il est simple et le résidu correspondant est une matrice hermitienne semi-définie positive.

**Résultat 4.22** Considérons un système dont la fonction de Popov n'est pas identiquement nulle. Alors, ce système est  $\mathcal{SPR}$  si et seulement si ses fonctions de transfert et sa fonction de Popov vérifient les propriétés suivantes.

$\mathcal{P}1$ .  $\mathcal{G}(s)$  n'admet aucun pôle dans  $\mathcal{DPDO}$

$\mathcal{P}2$ .  $\Pi(j\omega) > 0$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  et que l'une de trois conditions est satisfaite.

$\mathcal{C}1$ .  $\Pi(\infty) > 0$

$\mathcal{C}2$ .  $\Pi(\infty) = 0$  et  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (\Pi(j\omega)) > 0$

$\mathcal{C}3$ .  $\Pi(\infty) \geq 0$  et il existe deux constantes positives  $\sigma$  et  $\delta$  telles que

$$\omega^2 \sigma_{\min} (\Pi(j\omega)) \geq \sigma \text{ pour tout } |\omega| \geq \delta$$

**Les preuves** de ces résultats sont données dans [14] et [53]; elles peuvent être faites en guise d'un bon exercice sur les systèmes positifs en utilisant les résultats donnés ci dessus et ceux qui vont être donnés ci dessous.

**Lemme réel positif.** La principale contribution sur la structure des systèmes réel positifs n'est autre que le célèbre Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov ( $\mathcal{KYP}$ ) donné par le résultat suivant

**Résultat 4.23** *Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H, E) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times m}$ . Alors le système est  $\mathcal{PR}$  si et seulement le système d'équations matricielles*

$$\mathcal{LMI} \begin{cases} PF + F^T P = -LL^T \\ PG - H^T = -LW \\ E + E^T = W^T W \end{cases} \quad (4.50)$$

admet une solution  $(P, L, W) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times m}$  avec  $P = P^T > 0$ .

**Remarque 4.13** *Le système d'équations matricielles (4.50) peut se récrire sous la forme*

$$\begin{pmatrix} -PF - F^T P & -PG + H^T \\ -PG + H^T & E + E^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ W^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^T & W \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.51)$$

*La première équation, i.e.  $PF + F^T P = -LL^T$ , est une équation de Lyapunov du système qui requiert que le système soit stable puisque la matrice  $LL^T$  est semi-définie positive dans la mesure où  $p \leq n$ . Les autres équations peuvent être interprétées comme les conditions requises pour que la fonction de transfert d'un système stable soit  $\mathcal{PR}$ .*

**Remarque 4.14** *Dans le cas des systèmes strictement propres, i.e.  $E = 0_m$ , le système d'équations (4.50) est réduit aux deux équations*

$$\mathcal{LMI} \begin{cases} PF + F^T P = -LL^T \\ PG = H^T \end{cases} \quad (4.52)$$

*On peut alors en déduire aisément que  $HG = G^T PG \geq 0$  et donc le retard uniforme du système est nul pourvu que  $\text{rang}(G) = m$ .*

*La preuve du résultat est relativement laborieuse. elle sera réalisée en deux temps. Le premier temps consiste à présenter six résultats préliminaires qui constituent une base fondamentale pour réaliser d'une manière relativement agréable la preuve du résultat. Le second temps est consacré à la preuve du résultat d'une manière compréhensible.*

**Les résultats préliminaires** sont présentés d'une manière progressive. Le premier est plutôt technique

**Résultat 4.24** *Les seules matrices qui commutent avec la matrice  $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{pmatrix}$  sont de la forme*

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \text{ où } T_1 \text{ et } T_2^T \text{ commutent avec la matrice } F.$$

**La preuve** de ce résultat est triviale. Le deuxième résultat concerne une factorisation spectrale de la fonction rationnelle donnée par l'expression (4.45).

**Résultat 4.25** *Considérons une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$  et supposons que*

$$\mathcal{G}(s) \text{ est } \mathcal{PR} \text{ et } \text{rang}(\Pi(s)) = r \text{ presque partout} \quad (4.53)$$

*Alors il existe une fonction de transfert  $\mathcal{W}(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}(s)$  telle que la relation suivante*

$$\Pi(s) = \mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(-s) = \mathcal{W}^T(-s) \mathcal{W}(s) \quad (4.54)$$

*dite factorisation de Youla est toujours possible et admet les trois propriétés suivantes*

- P1. Les éléments de  $\mathcal{W}(s)$  sont analytiques dans  $\mathcal{DPDO}$  (resp. dans  $\mathcal{DPD}$  si  $\mathcal{W}(s)$  a des éléments analytiques dans  $\mathcal{DPD}$ ),*
- P2.  $\text{Rang}(\mathcal{W}(s)) = r$  dans  $\mathcal{DPDO}$ ,*
- P3.  $\mathcal{W}(s)$  est unique save pour la multiplication à gauche par une matrice orthogonale arbitraire.*

**La preuve** de ce résultat est donnée dans [83]; on recommande de la refaire pour une meilleure perception du problème de factorisation spectrale (problème 4.17). Le troisième résultat n'est autre que le lemme réel positif réduit aux systèmes dont tous les pôles sont simples et sont situés sur l'axe imaginaire.

**Résultat 4.26** *Considérons un système décrit par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H)$  dont tous les modes sont situés sur l'axe imaginaire et sont simples et supposons qu'il est  $\mathcal{PR}$ . Alors il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que*

$$\mathcal{EML} \begin{cases} PF + F^T P = 0 \\ PG = H^T \end{cases} \quad (4.55)$$

**La preuve** de ce résultat est donnée dans [14]; on suggère de faire des exercices pour une meilleure perception du lemme positif réel (voir problème 4.18). Le quatrième résultat concerne la similitude des réalisations d'état des fonctions de transfert  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{W}(s)$  qui apparaissent dans la factorisation de Youla (4.54).

**Résultat 4.27** *Soient  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{R}^{m \times m}(s)$  et  $\mathcal{W}(s) \in \mathcal{R}^{r \times m}(s)$  deux fonctions de transfert stables satisfaisant la factorisation (4.54). Supposons que  $(F, G, H)$  (resp.  $(F_w, G_w, H_w)$ ) est une réalisation d'état minimale de  $\mathcal{G}(s)$  (resp.  $\mathcal{W}(s)$ ), alors les matrices  $F$  et  $F_w$  sont similaires.*

**Preuve.** *Comme  $(F, G, H)$  est une réalisation d'état de  $\mathcal{G}(s)$ , on peut en déduire aisément que la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(-s)$  admet une réalisation d'état  $(F_{fy1}, G_{fy1}, H_{fy1})$  donnée par*

$$F_{fy1} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^T \end{pmatrix}, \quad G_{fy1} = \begin{pmatrix} G \\ H^T \end{pmatrix} \text{ et } H_{fy1} = \begin{pmatrix} H^T \\ -G \end{pmatrix}$$

*Cette réalisation d'état est minimale puisque  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) \cap \mathcal{CP}(\mathcal{G}^T(-s)) = \emptyset$  et  $\mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) \subset \mathcal{DPGO}$ . Et compte tenu du fait que  $(F_w, G_w, H_w)$  est une réalisation d'état*

minimale de la fonction de transfert  $\mathcal{W}(s)$ , on aura

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^T(-s)\mathcal{W}(s) &= G_w^T(-sI_n - F_w)^{-T} H_w H_w^T (sI_n - F_w)^{-1} G_w \\ &= H_{fy2}(-sI_n - F_{fy2})^{-1} G_{fy2}\end{aligned}$$

avec

$$F_{fy2} = \begin{pmatrix} F_w & 0 \\ H_w H_w^T & -F_w^T \end{pmatrix}, G_{fy2} = \begin{pmatrix} G_w \\ 0 \end{pmatrix}, H_{fy2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G_w \end{pmatrix}$$

On peut en déduire aisément, en vertu du résultat 4.16, que  $(F_{fy2}, G_{fy2}, H_{fy2})$  est une réalisation d'état minimale de la fonction de transfert  $\mathcal{W}^T(-s)\mathcal{W}(s)$ .

Par ailleurs, comme  $(F_w, G_w, H_w)$  est une réalisation d'état minimale de  $\mathcal{W}(s)$  et que  $\mathcal{W}(s)$  est stable, il existe une matrice unique  $P_w = F_w^T > 0$  telle que  $F_w^T P_w + P_w F_w^T = -H_w H_w^T$ .

Cette matrice peut être utilisée pour effectuer un changement de base  $T = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ P_w & I_n \end{pmatrix}$  qui permet de déterminer une nouvelle réalisation d'état minimale de  $\mathcal{W}^T(-s)\mathcal{W}(s)$  donnée par

$$F_{fy3} = \begin{pmatrix} F_w & 0 \\ 0 & -F_w^T \end{pmatrix}, G_{fy3} = \begin{pmatrix} G_w \\ P_w G_w \end{pmatrix}, H_{fy3} = \begin{pmatrix} P_w G_w \\ -G_w \end{pmatrix}$$

Et comme  $(F_{fy1}, G_{fy1}, H_{fy1})$  et  $(F_{fy3}, G_{fy3}, H_{fy3})$  sont des réalisations d'état minimales de la même fonction de transfert et que les modes sont invariants par changement de base, on aura  $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(F_w)$ .

CQFD

Les derniers résultats concernent les réalisations d'état minimale de la fonction de transfert  $\mathcal{W}(s)$  et de la fonction rationnelle  $\Pi(s)$ , qui apparaissent dans la factorisation de Youla (4.54), à partir d'une réalisation minimale de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ .

**Résultat 4.28** Soient  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{R}^{m \times m}(s)$  et  $\mathcal{W}(s) \in \mathcal{R}^{r \times m}(s)$  deux fonctions de transfert stables satisfaisant la factorisation de Youla (4.54) et supposons que  $(F, G, H)$  est une réalisation d'état minimale de  $\mathcal{G}(s)$ . Alors il existe deux matrices  $G_w$  et  $H_w$  telles que  $(F, G_w, H_w)$  est une réalisation minimale de  $\mathcal{W}(s)$ . Par ailleurs, on a deux réalisations d'état minimales de  $\mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(-s) = \mathcal{W}^T(-s)\mathcal{W}(s)$  respectivement données par

$$F_{fy1} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^T \end{pmatrix}, G_{fy1} = \begin{pmatrix} G \\ H^T \end{pmatrix}, H_{fy1} = \begin{pmatrix} H^T \\ -G \end{pmatrix}$$

et

$$F_{fy2} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^T \end{pmatrix}, G_{fy2} = \begin{pmatrix} G_w \\ P_w G_w \end{pmatrix}, H_{fy2} = \begin{pmatrix} P_w G_w \\ -G_w \end{pmatrix}$$

où la matrice  $P_w$  n'est autre que la solution unique de l'équation  $F^T P_w + P_w F = -H_w H_w^T$ .

**Résultat 4.29** Soient  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{R}^{m \times m}(s)$  et  $\mathcal{W}(s) \in \mathcal{R}^{r \times m}(s)$  deux fonctions de transfert stables satisfaisant la factorisation de Youla (4.54) et supposons que  $(F, G, H)$  est une réalisation d'état minimale de  $\mathcal{G}(s)$ . Alors il existe une matrice  $H_w$  telle que  $(F, G, H_w)$  est une réalisation d'état minimale de  $\mathcal{W}(s)$ .

**Les preuves de ces résultats peuvent être faites en guise d'exercices pour une bonne préparation à la démonstration du résultat 4.23.**

**La preuve du Lemme réel positif est reproduite à partir de celle élaborée dans [2] en utilisant les résultats préliminaires données ci dessus.**

*Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour ce faire, supposons que les équations matricielles linéaires (4.50) ont une solution, on aura alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(\bar{s}) &= E^T + E + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} H^T + H (sI_n - F)^{-1} G \\
&= W^T W + G^T \left( (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} P + P (sI_n - F)^{-1} \right) G \\
&\quad + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} L W + W^T L^T (sI_n - F)^{-1} G \\
&= W^T W + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} \left( (s + \bar{s}) P - P F - F^T P \right) (sI_n - F)^{-1} \\
&\quad + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} L W + W^T L^T (sI_n - F)^{-1} G \\
&= W^T W + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} L W + W^T L^T (sI_n - F)^{-1} G \\
&\quad + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} P (sI_n - F)^{-1} G (s + \bar{s}) \\
&= \left( W^T + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} L \right) (W + L^T (sI_n - F)^{-1} G) \\
&\quad + G^T (\bar{s}I_n - F^T)^{-1} P (sI_n - F)^{-1} G (s + \bar{s})
\end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(\bar{s}) \geq 0 \text{ dans } \mathcal{DPDO}$$

*Montrons ensuite que la condition est nécessaire en supposant que la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  est telle que  $\text{rang}(\mathcal{G}(s) + \mathcal{G}^T(-s)) = r$ . Le résultat 4.24 permet de postuler qu'il existe une fonction de transfert marginalement  $\mathcal{W}(s)$  telle que la factorisation de Youla (4.54) est satisfaite. Considérons dans un premier temps le cas des fonctions de transfert stables, i.e.  $\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{DPGO}$ . Alors, on peut en déduire aisément à partir des résultats 4.27 et 4.29 qu'il existe deux matrices  $L$  et  $W = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{W}(s)$  telles que  $(F, G, L, W)$  est une réalisation minimale de  $\mathcal{W}(s)$  et que la fonction de transfert  $\mathcal{W}^T(-s)\mathcal{W}(s)$  admet deux réalisations d'état minimales  $(F_{fy1}, G_{fy1}, H_{fy1}, E_{fy1})$  et  $(F_{fy2}, G_{fy2}, H_{fy2}, E_{fy2})$  avec*

$$F_{fy1} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{pmatrix}, G_{fy1} = \begin{pmatrix} G \\ H^T \end{pmatrix}, H_{fy1} = \begin{pmatrix} H^T \\ -G \end{pmatrix}, E_{fy1} = W^T W$$

$$F_{fy2} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{pmatrix}, G_{fy2} = \begin{pmatrix} G \\ PG + LW \end{pmatrix}, H_{fy2} = \begin{pmatrix} PG + LW \\ -G \end{pmatrix}, E_{fy2} = W^T W$$

*où la matrice  $P$  n'est autre que la solution unique de l'équation  $F^T P + P F = -L L^T$ . A la lumière du résultat 3.24 et 3.25 sur les réalisations minimales d'un système donné, il existe une matrice régulière  $T$  telle que  $F_{fy2} = T F_{fy1} T^{-1} = F_{fy1}$ ,  $T G_{fy1} = G_{fy2}$  et  $T^{-T} H_{fy1} = H_{fy2}$ . Et en vertu du résultat 4.24, on peut postuler naturellement qu'il existe une matrice  $T_1$  qui commute avec la matrice  $F$  telle que  $T_1 G = G$  et  $T_1 - T_1 H^T = PG + LW$ . Et comme la réalisation*

d'état  $(F, G, H, E)$  est minimale, on aura  $T_1 = I_n$  et donc  $PG + LW = H^T$ . La troisième équation est naturellement déduite de la factorisation de Youla (4.54) lorsque  $s \rightarrow \infty$ .

Considérons dans un second temps que la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  admet des pôles simples sur l'axe imaginaire, alors on peut la décomposer comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_{as}(s) + \mathcal{G}_{ms}(s) \quad \text{avec} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{ms}(s) = I_m$$

où  $\mathcal{G}_{as}(s)$  et  $\mathcal{G}_{ms}(s)$  sont des fonctions de transfert  $\mathcal{PR}$  qui se distinguent particulièrement par la configuration de leurs pôles, en l'occurrence  $\mathcal{CP}(\mathcal{G}_{as}(s)) \subset \mathcal{D}_{sa}$  et  $\mathcal{CP}(\mathcal{G}_{ms}(s)) \subset \mathcal{A}_{im}$ . Supposons que  $(F_{sm}, G_{sm}, H_{sm})$  est une réalisation minimale de  $\mathcal{G}_{sm}(s)$ , on peut en déduire aisément, en vertu du résultat 4.26, qu'il existe une matrice  $P_{sm} = P_{sm}^T > 0$  telle que  $P_{sm}F_{sm} + F_{sm}^T P_{sm} = 0_n$  et  $P_{sm}G_{sm} = H_{sm}^T$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{G}_{as}(s)$  est  $\mathcal{PR}$ , elle admet une réalisation minimale  $(F_{sa}, G_{sa}, H_{sa}, E_{sa})$  satisfaisant les équations matricielles

$$\mathcal{PAS} \begin{cases} P_{as}F_{as} + F_{as}^T P_{as} = -L_{as}L_{as}^T \\ P_{as}G_{as} = H_{as}^T - L_{as}W_{as} \\ W_{as}^T W_{as} = E_{as} + L_{as}^T \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que l'ensemble des équations matricielles intrinsèques au lemme de  $\mathcal{KYP}$  est satisfait en prenant

$$P = P_{as} + F_{ms}, \quad F = F_{as} + F_{ms}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{sa} \\ G_{sm} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_{sa} & H_{sm} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ L_{sm} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, comme  $(F_{ms}, G_{ms}, H_{ms})$  et  $(F_{as}, G_{as}, H_{as}, E_{as})$  sont respectivement des réalisations minimales des fonctions de transfert  $\mathcal{G}_{ms}(s)$  et  $\mathcal{G}_{as}(s)$ , alors  $(F, G, H, E)$  avec  $E = E_{as}$  est une réalisation minimale de  $\mathcal{G}_{as}(s)$ . On doit toutefois vérifier que les équations matricielles (4.50) sont bien satisfaites modulo une transformation linéaire de rang plein puisqu'elle a été établie pour une forme particulière  $F_{as} + F_{ms}$ .

*CQFD*

Le résultat suivant permet de caractériser les systèmes  $\mathcal{SPR}$  à partir de leur réalisation d'état.

**Résultat 4.30** *Considérons un système multivariable décrit par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H, E) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times m}$  avec  $m \geq 2$  et supposons que  $\mathcal{V}(F) \subset \{s \in \mathbb{C} / \mathcal{R}(s) \leq -\mu\}$  avec  $\mu > 0$ . Alors  $\mathcal{G}(s-)$  est  $\mathcal{SPR}$ , i.e.  $\mathcal{G}(s - \eta)$  pour  $\eta > 0$  est  $\mathcal{PR}$ , si et seulement si on peut trouver une matrice  $P = P^T > 0$  et deux matrices  $L$  et  $W$  telles que*

$$\mathcal{LMI} \begin{cases} PF + F^T P = -LL^T - 2\eta P \\ PG - H^T = -LW \\ E + E^T = W^T W \end{cases} \quad (4.56)$$

**La preuve** de ce résultat est donnée dans [53]; on recommande de la refaire en s'inspirant de la preuve du résultat 4.50 (voir problème ??).

**Remarque 4.15** Les conditions (4.56) sont relativement fortes par rapport aux conditions (4.50). La première des équations (4.56) peut se récrire comme suit

$$P(F + \eta I_n) + (F + \eta I_n)^T P = -LL^T$$

On retrouve alors la première des équations (4.50) modulo un changement de la matrice  $F$  par la matrice  $F + \eta I_n$ . Et comme  $(F + \eta I_n, G, H, E)$  est une réalisation d'état de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s - \eta)$ , les équations (4.56) stipulent que  $\mathcal{G}(s - \eta)$  est une fonction de transfert  $\mathcal{PR}$ .

### 4.4.3 Interprétation énergétique

Dans ce suit, on présente des résultats permettant de mettre en exergue une propriété énergétique des systèmes  $\mathcal{PR}$ . Le résultat suivant concerne la nature dissipative d'un système  $\mathcal{PR}$ .

**Résultat 4.31** Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H, E)$  et supposons qu'il est  $\mathcal{PR}$ . Alors on a

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau = V(x(t)) - V(x(0)) - \frac{1}{2} \int_0^t x^T(\tau)(PF + F^T P)x(\tau)d\tau \quad (4.57)$$

pour tout  $t$  avec  $V(x(t)) = \frac{1}{2} x^T P x(t)$  où  $P$  est une matrice qui vérifie l'inégalité matricielle linéaire (4.51). L'égalité est obtenue le long des trajectoires d'état du système avec une condition initiale  $x(0)$  et une séquence de commande admissible  $\{u(t)\} \in \mathcal{L}_2$ .

**La preuve** de ce résultat peut être aisément établie en utilisant le lemme de  $\mathcal{KYP}$  modulo des opérations mathématiques appropriées. On suggère de la faire en guise d'un bon exercice sur la nature dissipative d'un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{PR}$ .

**Remarque 4.16** On peut récrire l'équation (4.57) sous la forme

$$V(x(t)) = V(x(0)) - \frac{1}{2} \int_0^t x^T(\tau)(LL^T)x(\tau)d\tau + \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \quad (4.58)$$

qui permet de mettre en exergue la nature dissipative du système puisque la fonction  $V$  peut être interprétée comme une fonction de stockage du système, i.e.  $\mathcal{E}_s(t) \triangleq V(x(t))$ , qui est égale à la somme de l'énergie initiale du système, i.e.  $\mathcal{E}_i(t) \triangleq V(x(0))$ , l'énergie dissipée au sein du système, i.e.  $\mathcal{E}_d(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_0^t x^T(\tau)(LL^T)x(\tau)d\tau$  et l'énergie fournie au système, i.e.  $\mathcal{E}_f(t) \triangleq \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau$ . Par ailleurs, si l'état initial est nul, alors on aura

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq 0 \text{ pour tout } t.$$

Compte tenu de la remarque 4.16 et du résultat 4.31, on peut postuler qu'un système  $\mathcal{PR}$  est un système dissipatif. Le résultat suivant montre que la fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps et dissipatif est  $\mathcal{PR}$ .

**Résultat 4.32** *Considérons un système linéaire invariant dans le temps décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  et supposons qu'il vérifie l'équation de dissipativité*

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau = V(x(t)) - V(x(0)) + \frac{1}{2} \int_0^t x^T(\tau)Qx(\tau)d\tau \quad (4.59)$$

avec  $Q = Q^T \geq 0$  et  $V(x(t)) = \frac{1}{2} x^T P x(t)$  où  $P = P^T > 0$ . Alors l'inégalité matricielle linéaire (4.51) est satisfaite.

**Preuve.** Si l'on dérive les deux membres de l'équation de dissipation (4.59), on obtient

$$u^T(t)y(t) = \frac{1}{2} x^T(t) (PF + F^T P) x(t) + u^T(t)G^T P x(t) + \frac{1}{2} x^T(t)Qx(t)$$

soit

$$u^T(t) (H - G^T P) x(t) + u^T(t)E u(t) - \frac{1}{2} x^T(t) (PF + F^T P) x(t) = \frac{1}{2} x^T(t)Qx(t)$$

Et comme  $Q = Q^T \geq 0$ , on a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -PF - F^T P & -PG + H^T \\ -G^T P + H^T & E + E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \geq 0$$

On retrouve ainsi l'inégalité matricielle linéaire (4.51).

*CQFD*

**Remarque 4.17** *Dans le contexte du résultat 4.56, on montre aisément que*

$$V : x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow V(x(t)) = x^T(t)P x(t)$$

est une fonction de Lyapunov associée au système autonome sous-jacent. En effet, on a

$$\rho(V(x(t))) = x^T(t) (-LL^T - 2\eta P) x(t) \leq -2\eta V(x(t))$$

Par ailleurs, on peut montrer que pour toute réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ , la condition

$$\Pi(j\omega) \geq 0 \text{ pour tout } \omega / j\omega \text{ n'est pas un pôle de } \Pi(s)$$

est nécessaire pour que la faisabilité des équations matricielles linéaires (4.50).

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre est un tour d'horizon motivé sur la stabilité des systèmes linéaires. Les concepts de stabilité et les résultats fondamentaux qui lui sont associés sont progressivement présentés d'une manière claire et précise. Les concepts de stabilité externe (resp. interne) pour les systèmes linéaires invariants dans le temps ont été d'abord présentés à partir de leurs réponse impulsionnelle (resp. matrices de transition) avec un focus sur la vraisemblance (resp. la nuance)



entre la stabilité externe (resp. interne) et la stabilité  $\mathcal{EBSB}$ . Les résultats usuels de stabilité externe (resp interne) à partir de la configuration des pôles (resp. des modes) du système ont été alors obtenus d'une manière naturelle et rigoureuse. Le concept de stabilité au sens de Lyapunov a été ensuite présenté d'une manière concise et utilisé pour conforter la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps par un critère algébrique efficace et un aperçu sur des procédures de majoration et de comparaison usuelles. La stabilité uniforme des systèmes linéaires variants dans le temps a été enfin étudiée à partir de leurs réponse impulsionnelle et matrice de transition. Cette étude a été confortée par des résultats fondamentaux sur les nuances entre les concepts de stabilité et leur éventuelle vraisemblance. L'approche de stabilité au sens de Lyapunov sera utilisée pour l'analyse de stabilité des systèmes de commande et de convergence des algorithmes d'estimation paramétrique. Un panorama sur le concept de passivité a été réalisé pour une meilleure perception des systèmes positifs avec des interprétations physiques pertinentes de la passivité.

## 4.6 Problèmes

On propose une série de problèmes pour une évaluation des connaissances acquises tout au long de ce panorama sur la stabilité des systèmes linéaires.

**Problème 4.1** Considérons un système décrit la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{s(s^2 + \omega^2)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{R}^2$ ,  $0 < \zeta < 1$  et  $\omega > 0$ .

- 1) Donner la configuration pôles-zéros du système et étudier sa stabilité en fonction des scalaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme l'indique le tableau suivant. On utilisera les acronymes SA, MS et IS pour désigner respectivement que le système est stable, marginalement stable et instable.

	$\alpha_2 > 0$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 < 0$
$\alpha_1 > 0$			
$\alpha_1 = 0$			
$\alpha_1 < 0$			

- 2) Préciser la classe des entrées asymptotiquement rejetées dans le cas où le système est stable.

**Problème 4.2** Considérons la classe des systèmes décrite par la réalisation d'état

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (h_1 \quad h_2)$$

où  $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1$  et  $h_2$  sont des scalaires qui représentent les paramètres du système. Donner les expressions des trajectoires d'état et de sortie du système et étudier la stabilité interne du système en fonction de ses paramètres.

**Problème 4.3** On se propose de mettre en exergue les propriétés usuelles d'une matrice symétrique définie positive, i.e.  $\mathbb{R}^{n \times n} \ni A = A^T > 0$ . Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit.

- 1) Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont toutes réelles et positives, i.e.  $\lambda(A) > 0$  pour tout  $i \in [1, n]$ . Et en déduire ce qui se passe dans le cas d'une matrice définie non négative, i.e.  $A = A^T \geq 0$
- 2) Montrer que toute paire de vecteurs propres associés à une paire de valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
- 3) Montrer que la propriété suivante est satisfaite pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$\lambda_{\min}(A) x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A) x^T x$$

Et en déduire ce qui se passe dans le cas d'une matrice définie non négative, i.e.  $A = A^T \geq 0$

**Problème 4.4** Etudier la stabilité des systèmes autonomes linéaires invariants dans le temps décrits par l'équation (4.13) en supposant que la matrice d'état  $F$  est diagonalisable.

**Problème 4.5** Considérons la classe des systèmes décrits par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H)$ . Montrer que la propriété suivante est vraie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H e^{Ft} G = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} H F^i e^{Ft} G F^j G = 0 \text{ pour tout } (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$$

**Problème 4.6** Etablir une preuve du résultat de stabilité 4.2 dans le cas des systèmes multivariés en utilisant le résultat A.11 sur la décomposition spectrale d'une matrice.

**Problème 4.7** Montrer que les concepts de stabilité asymptotique et exponentielle des systèmes linéaires sont équivalents.

**Problème 4.8** Déterminer les modes et la matrice de transition de la classe des systèmes linéaires variants dans le temps caractérisés par une matrice d'état donnée par

$$F(t) = \begin{pmatrix} \gamma \cos^2(\omega t) - 1 & -\gamma \sin(\omega t) \cos(\omega t) + 1 \\ -\gamma \sin(\omega t) \cos(\omega t) - 1 & \gamma \sin^2(\omega t) - 1 \end{pmatrix}$$

**Problème 4.9** Considérons le système autonome (4.26) et posons

$$\mu_{\max}(t) \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(F(t) + F^T(t)) \text{ et } \mu_{\min}(t) \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(F(t) + F^T(t))$$

Montrer que les trajectoires d'état du système vérifient la propriété suivante pour un instant initial et un état initial arbitraires.

$$\|x_o\| e^{\int_{t_o}^t \mu_{\min}(\tau) d\tau} \leq \|x(t)\| \leq \|x_o\| e^{\int_{t_o}^t \mu_{\max}(\tau) d\tau} \text{ pour tout } t \geq t_o$$

**Problème 4.10** Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction définie positive telle que  $\rho V = \mu V$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ . Montrer que le système est exponentiellement stable pourvu que  $\mu < 0$ .

**Problème 4.11** On se propose d'étudier la stabilité des trois systèmes dynamiques suivants selon la méthode de Lyapunov.

**S1.** Un système linéaire invariant dans le temps de second ordre décrit par

$$\text{SALIT} \left\{ \rho x(t) = Fx(t) \text{ avec } x(0) = x_0 \right.$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

On confortera le résultat à partir des résultats usuels sur la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps.

**S2.** Un système autonome variant dans le temps décrit par

$$\text{SALVT} \left\{ \rho \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & f(t) \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right.$$

lorsque la fonction  $f$  est continue. On étudiera plus particulièrement les cas où la fonction  $f$  est définie par

$$f(t) = e^{\alpha t} \text{ et } f(t) = \sin(\omega t)$$

**S3.** Le système masse-ressort-amortisseur de la figure 4.4 où le chariot est abandonné à lui-même après avoir été soumis à l'action d'une force  $f(t)$ . On supposera que les forces de rappel du ressort et de frottement de l'amortisseur sont respectivement données par les fonctions non linéaires suivantes

$$\varphi_r(y(t)) = (\alpha + \beta (y(t))^2) y(t) \text{ et } \varphi_f(\rho y(t)) = \gamma | \rho y(t) | \rho y(t)$$

où  $y(t)$  désigne la position du centre de gravité du chariot par rapport à sa position d'équilibre et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres qui sont généralement déterminés à partir d'un ensemble d'expériences appropriées effectuées par des mécaniciens.

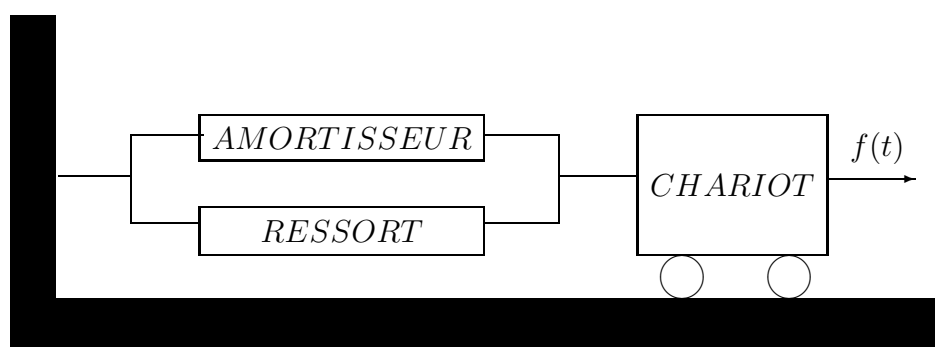


FIGURE 4.4 – Système masse-ressort-amortisseur

**S4.** L'asservissement non linéaire de la figure 4.5 où  $\{y^*(t)\}$  est une séquence de référence de type échelon. L'élément non linéaire est un amplificateur dont la caractéristique statique vérifie la propriété suivante

$$\left( f(e) = 0 \iff e = 0 \right) \text{ et } \left( \int_0^e f(\sigma) d\sigma \geq 0 \right)$$

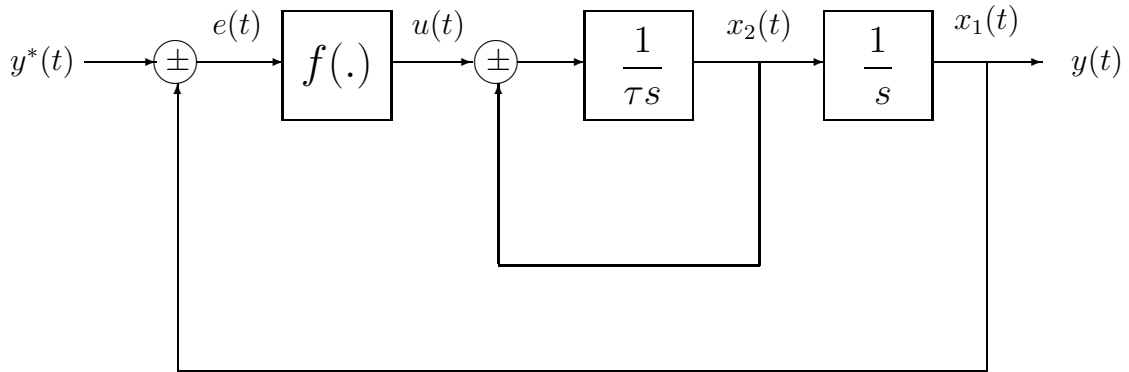


FIGURE 4.5 – Asservissement non linéaire

**Problème 4.12** On se propose dans ce problème d'étudier un ensemble de questions vitales pour une meilleure perception de la théorie des systèmes, en l'occurrence

- Q1. Parmi l'infinité des lois de commande qui permettent de transférer un système d'un état à un autre, quelle est celle qui réaliserait un tel transfert avec une énergie minimale ?
- Q2. Comment quantifier l'information contenue dans le comportement d'entrée-sortie d'un système sur son état ?
- Q3. Comment caractériser les grammien de commandabilité et d'observabilité ?
- Q4. Que représentent les grammien d'observabilité et de commandabilité dans le cas des systèmes asymptotiquement stables ?

Pour mieux appréhender toutes ces questions fondamentales, on suggère de procéder progressivement en considérant la classe des systèmes linéaires invariants dans le temps décrits par une réalisation d'état minimale  $(F, G, H, E)$  pour lesquels les grammien de commandabilité et d'observabilité du système sur l'intervalle de temps  $[t_o, t_f]$  sont respectivement définis par les matrices

$$\mathcal{W}_c(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t_f-\tau)} G G^T e^{F^T(t_f-\tau)} d\tau = \int_{t_o}^{t_f} e^{F(t-t_o)} G G^T e^{F^T(t-t_o)} dt$$

et

$$\mathcal{W}_o(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} e^{F^T(t_f-\tau)} H^T H e^{F(t_f-\tau)} d\tau = \int_{t_o}^{t_f} e^{F^T(t-t_o)} H^T H e^{F(t-t_o)} dt$$

On passe d'une intégrale à l'autre en effectuant le changement de variable  $t_f + t_o - t = \tau$ .

- 1) Montrer que  $(F, G)$  est commandable si et seulement si  $\mathcal{W}_c(t_o, t_f)$  est régulière. On vérifiera pour ce faire que la loi de commande

$$u(t) = G^T e^{F^T(t_f-t)} (\mathcal{W}_c(t_o, t_f))^{-1} (x(t_f) - e^{F(t_f-t_o)} x(t_o))$$

permet de transférer l'état du système de  $x(t_o)$  à  $x(t_f)$ .

- 2) Montrer que si le système est asymptotiquement stable, alors le grammien de commandabilité admet une limite que l'on désignera par  $\mathcal{W}_c = \int_o^\infty e^{F\tau} G G^T e^{F^T\tau} d\tau$ .

- 3) Montrer que le grammien de commandabilité est la solution de l'équation différentielle de Lyapunov donnée par

$$\rho \mathcal{W}_c(t_o, t) = F \mathcal{W}_c(t_o, t) + \mathcal{W}_c(t_o, t) F^T + G G^T \text{ avec } \mathcal{W}_c(t_o, t_o) = 0$$

et en déduire que si le système est asymptotiquement stable, alors on a

$$F \mathcal{W}_c + \mathcal{W}_c F^T + G G^T = 0$$

- 4) Montrer que  $(H, F)$  est observable si et seulement si  $\mathcal{W}_o(t_o, t_f)$  est régulière. On proposera une méthode de détermination des conditions initiales d'un système à partir de son comportement d'entrée-sortie.

- 5) Montrer que si le système est asymptotiquement stable, alors le grammien d'observabilité admet une limite que l'on désignera par  $\mathcal{W}_o = \int_o^\infty e^{F\tau} H^T H e^{F^T\tau} d\tau$ .

- 6) Montrer que l'énergie du comportement d'entrée-sortie du système définie par

$$E(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} y_o(t)^T y_o(t) dt \text{ avec } y_o(t) = y(t) - \int_{t_o}^{t_f} H e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$$

est donnée par

$$E(t_o, t_f) = x(t_o)^T \mathcal{W}_o(t_o, t_f) x(t_o)$$

- 7) Montrer que le grammien d'observabilité est la solution de l'équation différentielle de Lyapunov donnée par

$$\rho \mathcal{W}_o(t_o, t) = F^T \mathcal{W}_o(t_o, t) + \mathcal{W}_o(t_o, t) F + H^T H \text{ avec } \mathcal{W}_o(t_o, t_o) = 0$$

et en déduire que si le système est asymptotiquement stable, alors on a

$$F^T \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o F + H^T H = 0$$

- 8) Etudier les deux exemples suivants en guise d'illustration. Le premier concerne la charge d'un condensateur décrite par

$$\rho y(t) = -\frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} u(t) \text{ avec } y(0) = 0$$

où  $R$  et  $C$  sont respectivement la résistance et la capacité du circuit,  $u(t)$  est la tension appliquée aux bornes du circuit, qui est considérée comme l'entrée du système, et  $y(t)$  désigne la tension aux bornes du condensateur qui est naturellement prise comme la variable d'état du système. Quant au second exemple, il concerne l'accélération d'un engin, dans un environnement sans frottement à partir d'une vitesse nulle, décrit par

$$m \dot{v}(t) = f(t) \text{ avec } v(0) = 0$$

où  $m$  est la masse de l'engin et  $v(t)$  et  $f(t)$  désignent la vitesse de l'engin et la force qui lui est appliquée, elles désignent respectivement la sortie et l'entrée du système.

**Problème 4.13** Supposons que le système (4.26) est uniformément exponentiellement stable et qu'il existe un scalaire positif  $0 < \mu_f < \infty$  tel que  $\|F(t)\| \leq \mu_f$  pour tout  $t$ . Montrer que la matrice

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) \Phi(\tau, t) d\tau$$

satisfait toutes les hypothèses du résultat 4.15.

**Problème 4.14** Considérons le système autonome (4.26) et supposons qu'il est uniformément stable. Montrer que le système autonome perturbé décrit par

$$\dot{x}_\delta(t) = (F(t) + \Delta(t)) x_\delta(t)$$

est uniformément stable pourvu que la propriété suivante soit satisfaite

$$\exists \mu_\delta \in (0, \infty) / \int_\tau^\infty \|\Delta(t)\| dt \leq \mu_\delta \text{ pour tout } \tau$$

**Problème 4.15** Considérons le système autonome (4.26) et supposons qu'il est uniformément exponentiellement stable et qu'il existe un scalaire positif fini  $\mu_f$  tel que  $\|F(t)\| \leq \mu_f$ . Montrer qu'il existe un scalaire positif  $\mu_\delta$  tel que le système autonome perturbé décrit par

$$\dot{x}_\delta(t) = (F(t) + \Delta(t)) x_\delta(t)$$

est uniformément exponentiellement stable si  $\|\Delta(t)\| \leq \mu_\delta$  pour tout  $t$ .

**Problème 4.16** Elaborer une preuve du résultat fondamental sur la factorisation spectrale de Youla.

**Problème 4.17** Elaborer une preuve du résultat fondamental 4.16 sur la factorisation spectrale de Youla.

**Problème 4.18** *Elaborer une preuve du résultat fondamental 4.26 sur le lemme réel positif des systèmes dont tous les pôles sont simples et imaginaires.*

**Problème 4.19** *Considérons un système linéaire stable. On se propose de montrer que les propriétés suivantes sont satisfaites pour tout système linéaire stable.*

$\mathcal{P}1$ . *Supposons que  $(F, G)$  est commandable, alors on a*

$$\Pi(j\omega) \geq 0 \text{ pour tout } \omega \implies \begin{pmatrix} -PF - F^T P & -PG + H^T \\ -PG + H^T & E + E^T \end{pmatrix} \geq 0$$

$\mathcal{P}2$ . *Supposons que  $\mathcal{V}(F) \in \mathcal{D}_{sa}$ , alors on a*

$$\Pi(j\omega) \geq 0 \text{ pour tout } \omega \iff \mathcal{G}(s) \text{ est } \mathcal{PR}$$

$\mathcal{P}3$ . *Supposons que  $(F, G, H, E)$  est une réalisation d'état minimale, alors on a*

$$\Pi(j\omega) \geq 0 \text{ pour tout } \omega$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} -PF - F^T P & -PG + H^T \\ -PG + H^T & E + E^T \end{pmatrix} \geq 0 \text{ avec } P = P^T \geq 0$$

où  $\mathcal{G}(s)$  et  $\Pi(s)$  désignent la fonction de transfert du système et la fonction de de Popov qui lui est associée, alors que  $(F, G, H, E)$  est une réalisation d'état du système.





# Chapitre 5

## *Observation et commande*

*L'observation et commande des systèmes constituent l'essence des prouesses réalisées dans tous les domaines des sciences et technologiques de l'information et des communications. La motivation de ce chapitre est une présentation compréhensible des concepts d'observation avec injection de sortie et de commande avec retour d'état pour les systèmes linéaires en occultant toutes les imperfections dues aux perturbations, aux bruits de mesure et aux erreurs de modélisation, soit*

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

*Le choix d'un contexte idéal, qui se distingue par une connaissance parfaite de la réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  du système et une absence des perturbations d'état et de bruits de mesure, est particulièrement motivé par des considérations purement pédagogiques. Cette présentation sera faite progressivement en trois parties.*

*La première partie est consacrée au **concept de reconstruction d'état** d'un système à partir de son comportement d'entrée-sortie en exploitant judicieusement le concept d'injection de sortie. Une attention particulière est accordée aux invariants par une injection de sortie et à l'importante notion des concepts d'observabilité et de détectabilité. Une interprétation polynomiale est faite pour préciser la fonction de transfert d'un observateur et son processus d'innovation.*

*La seconde partie est réservée à la **commande avec retour d'état** en accordant une attention particulière aux invariants d'une rétroaction d'état et l'importance vitale des concepts de commandabilité et de stabilisabilité. Une interprétation polynomiale est faite pour préciser les performances en poursuite d'un système de commande avec retour d'état. Le calcul du gain de commande avec retour d'état est effectué par une synthèse modale pour des considérations de simplicité de spécification des performances. La dualité entre l'observation et la commande est utilisée pour la synthèse des observateurs.*

*La troisième partie est dédiée à la **commande avec retour d'état incorporant un observateur** qui est au cœur de la commande avec retour de sortie dynamique. Une analyse du système de commande résultant est effectuée pour mettre en évidence la légitimité du concept d'équivalence certitude selon lequel on peut remplacer l'état du système par son estimation si besoin est. On montre qu'une loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur peut se mettre sous la forme de transfert usuelle des régulateurs. Cette interprétation polynomiale permet de caractériser la classe des régulateurs stabilisants à partir d'un régulateur issu d'une*

*rétroaction d'état basée sur un observateur avec un filtrage approprié de son processus d'innovation.*

*Ces trois parties permettent d'acquérir les bases fondamentales d'observation et de commande des systèmes linéaires qui sont utilisés au quotidien pour résoudre de nombreux problèmes des sciences pour l'ingénieur, en l'occurrence le calibrage des capteurs, le développement de capteurs logiciels, la synthèse des filtres optimaux couramment utilisés pour le traitement des signaux provenant de capteurs, les algorithmes de sûreté de fonctionnement et enfin la synthèse des asservissements. Quelques remarques sont données en guise de conclusion pour souligner l'intérêt de l'approche d'état introduite par Kalman : un pionnier de l'automatique moderne ([47], [49], [48], [50]). Des problèmes sont proposés pour mieux apprécier le potentiel des concepts d'observation et de commande.*

## 5.1 Observation des systèmes

*Le problème d'observation consiste à reconstruire la trajectoire d'état d'un système à partir de la connaissance de son comportement d'entrée-sortie comme l'indique la figure 5.1. Dans le contexte idéal considéré, cette reconstruction peut être réalisée par un système dynamique décrit par*

$$\mathcal{RES} \left\{ \rho \hat{x}(t) = F_o \hat{x}(t) + G_o u(t) + M_o y(t) \right. \quad (5.2)$$

*où la matrice d'état  $F_o$  et les matrices d'entrée  $G_o$  et  $M_o$  sont déterminées de manière à assurer une erreur d'observation asymptotiquement nulle, soit*

$$\lim_{t \leftarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0 \quad (5.3)$$

*indépendamment des trajectoires d'entrée et d'état du système, i.e.  $\{u(t)\}$  et  $\{x(t)\}$ .*

*Et compte tenu des équations d'état du système 5.1 et du système dynamique 5.2, on peut en déduire naturellement l'équation de l'erreur d'observation*

$$\rho \tilde{x}(t) = F_o \tilde{x}(t) + (F - M_o H - F_o) x(t) + (G - G_o) u(t)$$

*On peut alors postuler que la trajectoire d'état du système peut être reconstruite à partir de son comportement d'entrée-sortie par le système dynamique 5.2 pourvu que ses matrices d'état et d'entrée vérifient la propriété suivante.*

$$\exists M_o \in \mathbb{R}^{n \times p} / \mathcal{V}(F - M_o H) \in \mathcal{D}_{sa}, F_o = F - M_o H \text{ et } G_o = G \quad (5.4)$$

*Et cette propriété permet de récrire le système dynamique (5.2) sous la forme d'une injection de sortie qui constitue l'essence d'un observateur*

$$\mathcal{OBS} \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + My(t) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

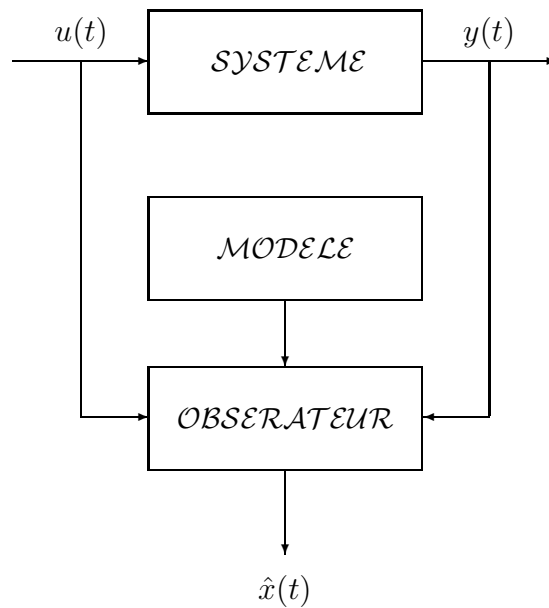


FIGURE 5.1 – Observateur

On retrouve ainsi la structure usuelle d'un observateur qui consiste en une recopie de l'équation du système modulo une correction à partir de l'erreur d'observation de sortie donnée par

$$\text{OBS} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  désigne le gain d'observation. Ceci nous amène naturellement au concept de faisabilité d'un observateur que l'on peut exprimer comme suit.

La conception d'un observateur d'état est faisable si et seulement si on peut déterminer le gain d'observation sous-jacent de manière à garantir sa stabilité asymptotique, soit

$$\exists M \in \mathbb{R}^{n \times p} / \mathcal{V}(F - MH) \in \mathcal{D}_{sa}$$

La figure 5.2 est une description fonctionnelle de l'observateur (5.6) qui met en exergue la rétroaction intrinsèque au processus de reconstruction de l'état du système à partir de son comportement d'entrée-sortie pourvu que le gain d'observation ne soit pas nul. Cette rétroaction est judicieusement exploitée pour garantir les performances admissibles par rapport à la synthèse adoptée, notamment une atténuation des perturbations et une insensibilité aux bruits de mesure, avec une robustesse en stabilité par rapport aux erreurs de modélisation inévitables.

**Remarque 5.1** Si le gain d'observation est nul, l'observateur est réduit à un simulateur du système donné par

$$\text{SIM} \begin{cases} \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{cases}$$

et dont l'erreur d'observation correspondante est décrite par l'équation

$$\tilde{x}(t) = F\tilde{x}(t)$$

On peut alors postuler que la reconstruction de l'état peut être parfaitement réalisée avec la dynamique du système si et seulement si le système est asymptotiquement stable, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t) \iff \mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

Le simulateur est un observateur en boucle ouverte, comme le montre la figure 5.3, que l'on ne peut utiliser que pour les systèmes dont les modes sont situés dans le domaine de stabilité et de performances considéré sans se soucier s'ils sont observables ou non. Ce type d'observateur est utilisé dans la commande prédictive de Smith qui a été réhabilitée sous l'appellation de commande avec modèle interne tout au long des deux dernières décennies ([66]).

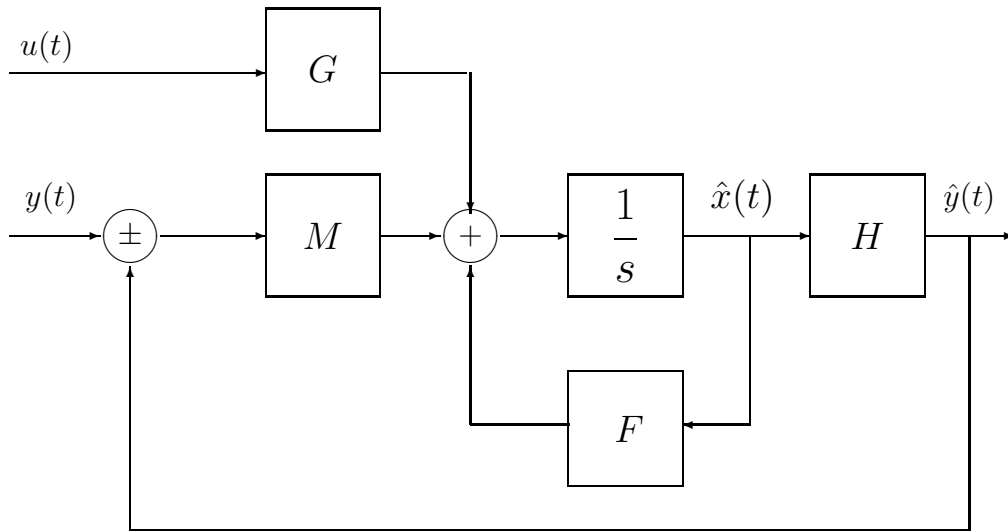


FIGURE 5.2 – Observateur

Le résultat fondamental suivant donne une interprétation polynomiale adéquate des observateurs d'état issus du concept d'injection de sortie.

**Résultat 5.1** L'observateur d'état décrit par les équations d'état et de sortie (5.5) peut être interprété sous une forme transfert comme suit

$$\mathcal{FTOBS} \left\{ \begin{pmatrix} \hat{X}(s) \\ \hat{Y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{u\hat{x}}(s) & \mathcal{G}_{y\hat{x}}(s) \\ \mathcal{G}_{u\hat{y}}(s) & \mathcal{G}_{y\hat{y}}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} \right. \quad (5.7)$$

où  $\mathcal{G}_{u\hat{x}}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{y\hat{x}}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{u\hat{y}}(s)$  et  $\mathcal{G}_{y\hat{y}}(s)$  désignent des fonctions de transfert respectivement données par

$$\mathcal{EFTOBS} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{u\hat{x}}(s) = (sI_n - F + MH)^{-1} G \\ \mathcal{G}_{y\hat{x}}(s) = (sI_n - F + MH)^{-1} M \\ \mathcal{G}_{u\hat{y}}(s) = H (sI_n - F + MH)^{-1} G \\ \mathcal{G}_{y\hat{y}}(s) = H (sI_n - F + MH)^{-1} M \end{array} \right. \quad (5.8)$$

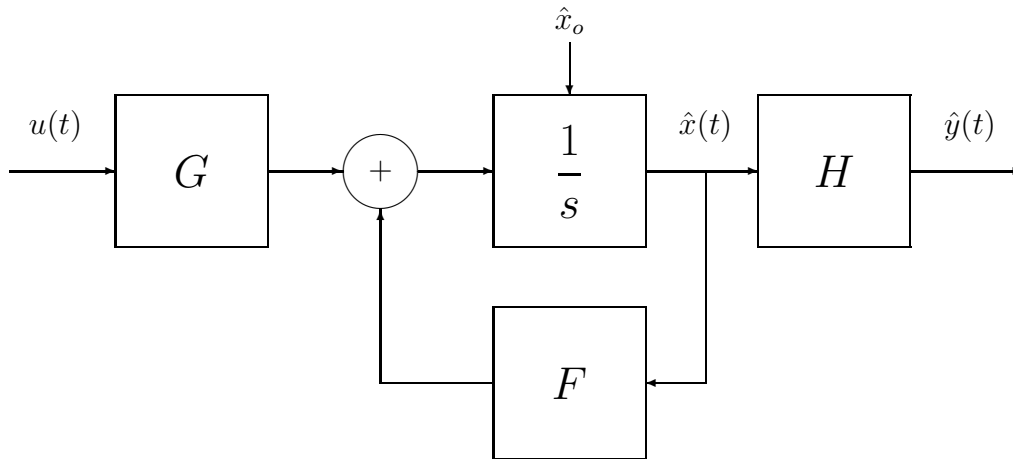


FIGURE 5.3 – Simulateur

Par ailleurs, on a

$$\hat{Y}(s) = \mathcal{G}(s) U(s) \quad (5.9)$$

**Preuve.** Si l'on applique la transformée de Laplace aux équations d'état et de sortie (5.5), de l'observateur d'état en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient

$$\text{OBS} \begin{cases} s\hat{X}(s) = (F - MH)\hat{X}(s) + GU(s) + MY(s) \\ \hat{Y}(s) = H\hat{X}(s) \end{cases}$$

On peut alors exprimer les équations d'état et de sortie de l'observateur comme suit

$$\hat{X}(s) = (sI_n - F + MH)^{-1} GU(s) + (sI_n - F + MH)^{-1} MY(s)$$

et

$$\hat{Y}(s) = H (sI_n - F + MH)^{-1} GU(s) + H (sI_n - F + MH)^{-1} MY(s)$$

Et compte tenu des expressions (5.8) des fonctions de transfert  $\mathcal{G}_{u\hat{x}}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{y\hat{x}}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{u\hat{y}}(s)$  et  $\mathcal{G}_{y\hat{y}}(s)$ , on retrouve la fonction de transfert de l'observateur d'état (5.7).

Par ailleurs, si l'on utilise la fonction de transfert du système, on peut récrire l'équation de sortie de l'observateur comme suit

$$\hat{Y}(s) = \hat{\mathcal{G}}(s)U(s)$$

avec

$$\hat{\mathcal{G}}(s) = H (sI_n - F + MH)^{-1} G + H (sI_n - F + MH)^{-1} M \mathcal{G}(s) \quad (5.10)$$

Et la fonction de transfert  $\hat{\mathcal{G}}(s)$  peut être simplifiée comme le montrent les simples manipulations algébriques suivantes

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}(s) &= H (sI_n - F + MH)^{-1} (G + MH (sI_n - F)^{-1} G) \\
&= H (sI_n - F + MH)^{-1} (I_n + MH (sI_n - F)^{-1}) G \\
&= H (sI_n - F + MH)^{-1} (sI_n - F + MH) (sI_n - F)^{-1} G \\
&= H (sI_n - F)^{-1} G \\
&= \mathcal{G}(s)
\end{aligned}$$

*CQFD.*

**Remarque 5.2** *L'observateur réalise une estimation relativement insensible aux bruits de mesure inéluctables sur la sortie en procédant à un filtrage adéquat du comportement entrée-sortie du système. Le qualificatif adéquat dépend essentiellement des réponses harmoniques des fonctions de transfert de l'observateur.*

### 5.1.1 Propriétés fondamentales

*Le résultat suivant donne les propriétés principales des observateurs issus d'une injection de sortie indépendamment de la méthode de synthèse adoptée pour la détermination du gain d'observation.*

**Résultat 5.2** *L'observateur d'état décrit par les équations (5.5) se distingue par les six propriétés fondamentales suivantes.*

**P1.** *L'observateur d'état est asymptotiquement stable si et seulement si le gain d'observation  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  vérifie la propriété suivante*

$$\left( \mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_{sa} \right) \iff \left( \det(sI_n - F + MH) = 0 \implies \Re(s) < 0 \right) \quad (5.11)$$

**P2.** *Le polynôme caractéristique de l'observateur d'état est relié au polynôme caractéristique du système sous jacent comme suit*

$$\mathcal{R}\mathcal{P}\mathcal{C} \left\{ \frac{P_{cobs}(s)}{A(s)} \triangleq \frac{\det(sI_n - F + MH)}{\det(sI_n - F)} = \det(I_p + H (sI_n - F)^{-1} M) \right. \quad (5.12)$$

**P3.** *Les fonctions de transfert  $\mathcal{G}_{u\hat{y}}(s)$  et  $\mathcal{G}_{y\hat{y}}(s)$  de l'observateur d'état peuvent être factorisées comme suit*

$$\mathcal{G}_{u\hat{y}}(s) = \mathcal{F}(s)\mathcal{G}(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{y\hat{y}}(s) = \mathcal{F}(s)\mathcal{G}_{os}(s) \quad (5.13)$$

*où  $\mathcal{F}(s)$  et  $\mathcal{G}_{os}(s)$  désignent un filtre bicausal et la fonction de transfert de l'observateur lorsqu'on ouvre la boucle en sortie respectivement données par*

$$\mathcal{F}(s) = I_p - H (sI_n - F + MH)^{-1} M \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{os}(s) = H (sI_n - F)^{-1} M \quad (5.14)$$

$\mathcal{P}4$ . *L'observabilité est un invariant par injection de sortie : un observateur d'état est observable si et seulement si le système qui lui est associé est observable.*

$\mathcal{P}5$ . *Les modes non observables du système sont invariants par injection de sortie : tout mode non observable du système est un mode non observable de l'observateur d'état correspondant.*

**Preuve.** *Notons d'abord que la propriété  $\mathcal{P}1$  découle naturellement de résultat 4.2 de stabilité asymptotique.*

*La propriété  $\mathcal{P}2$  est issue des manipulations algébriques suivantes*

$$\begin{aligned} \det(sI_n - F + MH) &= \det((sI_n - F)(I_n + (sI_n - F)^{-1}MH)) \\ &= \det(sI_n - F) \det(I_n + (sI_n - F)^{-1}MH) \\ &= \det(sI_n - F) \det(I_p + H(sI_n - F)^{-1}M) \end{aligned}$$

*La dernière opération est effectuée à la lumière du résultat A.3. On retrouve ainsi la relation (5.12) de passage du polynôme caractéristique du système au polynôme caractéristique de l'observateur sous-jacent.*

*La propriété  $\mathcal{P}3$  est le fruit d'un ensemble de manipulations algébriques sur les fonctions de transfert  $\mathcal{G}_{u\hat{y}}(s)$  et  $\mathcal{G}_{y\hat{y}}(s)$  de l'observateur d'état que l'on peut factoriser comme suit en utilisant les résultats A.5 et A.6.*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{u\hat{y}}(s) &= H(sI_n - F + MH)^{-1}G \\ &= H((sI_n - F)(I_n + (sI_n - F)^{-1}MH))^{-1}G \\ &= (I_p + H(sI_n - F)^{-1}M)^{-1}H(sI_n - F)^{-1}G \\ &= (I_p - H(sI_n - F + MH)^{-1}M)H(sI_n - F)^{-1}G \\ &= \mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z) \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{y\hat{y}}(s) &= H(sI_n - F + MH)^{-1}M \\ &= H((sI_n - F)(I_n + (sI_n - F)^{-1}MH))^{-1}M \\ &= (I_p + H(sI_n - F)^{-1}M)^{-1}H(sI_n - F)^{-1}M \\ &= (I_p - H(sI_n - F + MH)^{-1}M)H(sI_n - F)^{-1}M \\ &= \mathcal{F}(s)\mathcal{G}_o(s) \end{aligned} \tag{5.16}$$

*La propriété  $\mathcal{P}4$  est naturellement obtenue à partir de la relation entre les matrices d'observabilité du système et de l'observateur d'état correspondant, soit*

$$\mathcal{M}_o(H, F) = \mathcal{T}(F, H, M) \mathcal{M}_o(H, F - MH)$$

avec

$$\mathcal{T}(F, H, M) = \begin{pmatrix} I_p & 0_p & \dots & \dots & \dots & 0_p \\ HM & I_p & 0_p & \dots & \dots & \vdots \\ HFM & HM & I_p & 0_p & \dots & \vdots \\ \vdots & HFM & HM & I_p & 0_p & \vdots \\ \vdots & & HFM & HM & I_p & 0_p \\ HF^{n-2}M & \dots & \dots & HFM & HM & I_p \end{pmatrix}$$

Et comme la matrice  $\mathcal{T}(F, H, M) \in \mathbb{R}^{np \times np}$  est régulière, on peut postuler que la matrice d'observabilité de l'observateur d'état est de rang plein si et seulement si la matrice d'observabilité du système est de rang plein.

Quant à la propriété  $\mathcal{P}5$ , elle peut être établie d'une manière élégante à partir de la décomposition selon l'observabilité, soit

$$\text{SYSDO} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} x_o(t) \\ x_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o(t) \\ x_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} H_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o(t) \\ x_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

où  $x_o(t) \in \mathbb{R}^{n_o}$  et  $x_{\bar{o}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\bar{o}}}$  correspondent respectivement aux modes observables, i.e. la paire  $(H_o, F_o)$  est observable, et aux modes non observables. En effet, l'observateur d'état associé peut se mettre sous la forme

$$\text{OBS} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} \hat{x}_o(t) \\ \hat{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_o(t) \\ \hat{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} M_o \\ M_{\bar{o}} \end{pmatrix} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \begin{pmatrix} H_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_o(t) \\ \hat{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\text{OBS} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} \tilde{x}_o(t) \\ \tilde{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_o - M_o H_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} - M_{\bar{o}} H_o & F_{\bar{o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_o(t) \\ \tilde{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} M_o \\ M_{\bar{o}} \end{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} H_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_o(t) \\ \tilde{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Et compte tenu de l'invariance du polynôme caractéristique par un changement de base, on a

$$P_{\text{cobs}}(s) = \det(sI_{n_o} - F_o + M_o H_o) \det(sI_{n_{\bar{o}}} - F_{\bar{o}})$$

Les modes non observables du système sont bien invariants par injection de sortie. Et en vertu de la propriété  $\mathcal{P}4$ , on peut postuler que la paire  $(H_o, F_o - M_o H_o)$  est observable puisque la paire  $(H_o, F_o)$  est observable. L'observateur d'état est ainsi naturellement décomposé selon l'observabilité.

*CQFD*



**Remarque 5.3** Bien que le résultat fondamental 5.2 concerne principalement les propriétés structurelles de l'observateur d'état par rapport à celles du système sous-jacent, les propriétés  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}5$  peuvent être utilisées pour la synthèse. La propriété  $\mathcal{P}2$  est la pierre angulaire d'une méthode de synthèse modale. Quant à la propriété  $\mathcal{P}5$ , elle permet d'introduire naturellement le concept de détectabilité des systèmes en vertu du fait que le polynôme caractéristique est invariant par changement de base.

### 5.1.2 Synthèse modale

Comme les performances dynamiques d'un observateur dépendent essentiellement de la configuration de ses modes et compte tenu de la propriété  $\mathcal{P}5$ , on peut postuler que le polynôme caractéristique d'un observateur d'état peut être toujours décomposé comme suit

$$M_{cobs}(s) \triangleq \det(sI_n - F + MH) = M_o(s)M_{\bar{o}}(s)$$

avec

$$M_o(s) = \prod_{i=1}^{nm_o} (s - \mu_{oi}) \quad \text{et} \quad M_{\bar{o}}(s) = \prod_{j=1}^{nm_{\bar{o}}} (s - \mu_{\bar{o}j})$$

où  $M_o(s)$  (resp.  $M_{\bar{o}}(s)$ ) désigne le polynôme de modes issus de la synthèse considérée (resp. le polynôme des modes non observables qui sont invariants par injection de sortie) de degré égal au nombre des modes observables  $nm_o$  (resp. des modes non observables  $nm_{\bar{o}}$ ). Il apparaît alors clairement que si les modes non observables ne sont pas asymptotiquement stables, alors l'observateur d'état sous-jacent n'est pas asymptotiquement stable. Ceci nous amène naturellement au postulat suivant

Si un système admet un mode non observable qui n'est pas situé dans la domaine de stabilité asymptotique  $\mathcal{D}_{sa}$  (resp. dans le domaine de stabilité et de performances  $\mathcal{D}_{sp}$ ), alors l'observateur d'état sous-jacent n'est pas asymptotiquement stable (resp. ne réalise pas les performances dynamiques requises).

Ce postulat est conforté par deux résultats fondamentaux. Le premier résultat montre que la propriété d'observabilité d'un système garantit la possibilité d'assigner arbitrairement les modes de l'observateur d'état.

**Résultat 5.3** Soient  $(H, F)$  une paire observable d'ordre  $n$  et  $M_o(s) \in \mathbb{R}_n[s]$  un polynôme normalisé arbitraire de degré  $n$ . Alors l'équation algébrique

$$\det(sI_n - F + MH) = M_o(s) \triangleq s^n + \sum_{i=1}^n \gamma_i s^{n-i} \quad (5.17)$$

admet une solution  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et cette solution est unique dans le cas d'un système mono sortie.

**La preuve** sera particulièrement faite dans le cas des systèmes ayant une seule sortie en utilisant la propriété  $\mathcal{P}2$  que l'on peut récrire comme suit

$$P_{cobs}(s) - P_{csys}(s) = H \text{Adj}(sI_n - F) M$$

Et compte tenu de la synthèse modale considérée, on peut exprimer la relation entre les polynômes caractéristiques du système et de l'observateur sous-jacent comme suit

$$M_{\text{cobs}}(s) - A_\sigma(s) = H \text{Adj}(sI_n - F) M \text{ avec } A_\sigma(s) \triangleq s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Et en vertu et du résultat A.14, on aura

$$\text{Adj}(sI_n - F) = \sum_{k=1}^n A_k s^{n-k} \text{ avec } A_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i F^{k-i-1}$$

ou d'une manière équivalente

$$\begin{aligned} \gamma_1 - a_1 &= HM \\ \gamma_2 - a_2 &= HFM + a_1 HH \\ \gamma_i - a_i &= HF^{i-1}M + a_1 HF^{i-2}M + \dots + a_{i-2} KFG + a_{i-1} KG \\ \gamma_n - a_n &= KF^{n-1}G + a_1 HF^{n-2}M + a_2 HF^{n-3}M + \dots + a_{n-2} HFM + a_{n-1} KG \end{aligned}$$

que l'on peut récrire sous la forme du système d'équations linéaires

$$\mathcal{T}_\sigma \mathcal{M}_o(H, F) M = C_\gamma - C_a$$

avec

$$C_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad C_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme  $\mathcal{T}_\sigma$  est une matrice de  $\mathcal{T}$ oplitz qui est régulière pour toute matrice d'état  $F$ , le calcul du gain d'observation est possible si et seulement si la paire  $(H, F)$  est observable, i.e. la matrice d'observabilité  $\mathcal{M}_o(H, F)$  est régulière, soit

$$M = \mathcal{T}_\sigma^{-1} \mathcal{M}_c^{-1}(H, F) (C_\gamma - C_a)$$

*CQFD.*

**Remarque 5.4** Dans le cas des systèmes observables admettant plusieurs sorties, l'équation algébrique (5.17) admet une infinité de solutions, en l'occurrence l'ensemble des matrices

$$M = W_f + M_w W_h$$

où  $W_f \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $W_h \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  sont des matrices arbitraires et  $M_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  est la solution unique de l'équation algébrique

$$\det \left( sI_n - (F - W_f H) + M_w (W_h H) \right) = M_o(s) \triangleq s^n + \sum_{i=1}^n \gamma_i s^{n-i}$$

qui n'est autre que l'équation d'une synthèse modale d'un observateur pour les systèmes admettant une seule sortie et dont les matrices d'état et de sortie sont respectivement données par  $F - W_f H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $W_h H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . L'unicité de la solution est une conséquence naturelle de la propriété

$$(W_h H, F - W_f H) \text{ est observable} \iff (H, F) \text{ est observable}$$

que l'on peut établir aisément.

Quant au second résultat, il montre qu'un assignement arbitraire partiel des modes d'un observateur est faisable pour les systèmes détectables.

**Résultat 5.4** *Considérons un système décrit par une réalisation d'état détectable  $(F, G, H)$  d'ordre  $n$  et soient  $M_{\bar{o}}(s) \in \mathbb{R}_{sa}[s]$  le polynôme des modes non observables de degré  $n_{\bar{o}}$  et  $M_o(s) \in \mathbb{R}_{sp}[s]$  un polynôme normalisé arbitraire de degré  $n_o$ . Alors l'équation algébrique*

$$\det \left( sI_n - F + MH \right) = M_o(s) M_{\bar{o}}(s)$$

admet une solution  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et cette solution est unique dans le cas d'un système mono sortie.

**La preuve** peut être aisément faite à titre d'exercice pour mieux apprécier l'invariance des modes non observables par injection de sortie en vertu de la propriété  $\mathcal{P}5$ .

**Remarque 5.5** *Les résultats 5.3 et 5.4 permettent de conforter le postulat donné ci dessus comme suit. Un assignement arbitraire des modes d'un observateur avec injection de sortie n'est pas faisable pour les systèmes non observables. Néanmoins, on peut réaliser un assignement admissible modulo les modes non observables du système pourvu qu'ils soient situés dans le domaine de stabilité et des performances.*

### 5.1.3 Observateur d'ordre réduit

Le système dynamique (5.5) est un observateur d'état d'ordre plein dans la mesure où il réalise une estimation de toutes les variables d'état du système. Ce type d'observateur occulte le fait que la mesure de la sortie est une mesure de l'état modulo le noyau de la matrice de sortie puisque

$$y(t) = Hx(t) = H(x(t) + x_o) \text{ pour tout } x_o \in \mathcal{N}(H) \quad (5.18)$$

On peut donc connaître l'état à partir des mesures disponibles pourvu que l'on puisse déterminer la part de l'état contenue dans le noyau de la matrice de sortie. Et comme la dimension maximale de l'image de la matrice de sortie est  $p$ , la dimension minimale du noyau de la matrice de sortie est  $n - p$ . Il est donc possible de reconstruire l'état d'un système à partir des mesures disponibles en utilisant un observateur d'ordre réduit, e.g.  $n - p \leq n_r < n$ . En effet, considérons la classe des systèmes linéaires invariants décrits par les équations d'état et de sortie

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.19)$$

Et supposons que le choix du nombre de sortie a été judicieusement effectué,  $\text{rang}(H) = p$ . Alors il existe un changement de base

$$x(t) = T\bar{x}(t) \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix}^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

où  $C \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  est une matrice arbitraire telle que la matrice  $T$  soit régulière. On aura alors

$$TT^{-1} = T^{-1}T = \begin{pmatrix} HT_1 & HT_2 \\ CT_1 & CT_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \\ 0_{(n-p) \times p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

Les équations d'état et de sortie du système peuvent être alors exprimées dans la nouvelle base comme suit

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix} = \bar{x}_1(t) \end{cases} \quad (5.21)$$

Et compte tenu de l'équation de sortie du système, i.e.  $y(t) = \bar{x}_1(t)$ , on peut le récrire sous la forme

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho y(t) = \bar{F}_{11}y(t) + \bar{F}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{G}_1u(t) \\ \rho \bar{x}_2(t) = \bar{F}_{21}y(t) + \bar{F}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{G}_2u(t) \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\text{MOR} \begin{cases} \rho \bar{x}_2(t) = \bar{F}_{22}\bar{x}_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) = \bar{F}_{12}\bar{x}_2(t) \end{cases} \quad (5.22)$$

avec

$$u_2(t) = \bar{F}_{21}y(t) + \bar{G}_2u(t) \quad (5.23)$$

$$y_2(t) = \rho y(t) - \bar{F}_{11}y(t) - \bar{G}_1u(t) \quad (5.24)$$

Et comme  $\{u_2(t)\} \in \mathbb{R}^{n-p}$  et  $\{y_2(t)\} \in \mathbb{R}^p$  sont des séquences que l'on peut déterminer à partir

du comportement d'entrée-sortie du système à partir des expressions (5.23) et (5.24), la représentation d'état (5.22)-(5.24) peut être utilisée comme un modèle d'observation qui permet de reconstruire d'une manière consistante les variables d'état  $\{\bar{x}_2(t)\}$  à partir du comportement d'entrée-sortie du système pourvu que la paire  $(\bar{F}_{12}, \bar{F}_{22})$  soit observable. Or cette condition est satisfaite si et seulement si le système est observable puisque

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI_n - F \\ H \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} sI_n - \bar{F} \\ \bar{H} \end{pmatrix} \text{ pour tout } s \in \mathbb{C}$$

et

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI_{n-p} - \bar{F}_{11} & -\bar{F}_{12} \\ -\bar{F}_{21} & sI_p - \bar{F}_{22} \\ I_p & 0 \end{pmatrix} = n \text{ pour tout } s \in \mathbb{C}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI_{n-p} - \bar{F}_{22} \\ \bar{F}_{12} \end{pmatrix} = n - p \text{ pour tout } s \in \mathbb{C}$$

En effet, une telle reconstruction peut être réalisée en temps réel par l'observateur d'ordre réduit donné par

$$\text{OBSR} \left\{ \rho \hat{\tilde{x}}_2(t) = (\bar{F}_{22} - \bar{M}_2 \bar{F}_{12}) \hat{\tilde{x}}_2(t) + \bar{M}_2 y_2(t) + u_2(t) \right. \quad (5.25)$$

où  $\bar{M}_2$  désigne le gain d'observation que l'on peut déterminer de manière à assigner arbitrairement les modes de l'observateur pourvu que le système soit observable. Et cette reconstruction est bien consistante comme le montre l'équation d'erreur d'observation sous-jacente

$$\rho \tilde{\tilde{x}}_2(t) = (\bar{F}_{22} - \bar{M}_2 \bar{F}_{12}) \tilde{\tilde{x}}_2(t)$$

Cette équation conduit en effet naturellement à la propriété de précision suivante

$$\mathcal{V}(\bar{F}_{22} - \bar{M}_2 \bar{F}_{12}) \in \mathcal{D}_{sp} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{x}}_2(t) = 0$$

Par ailleurs, l'observateur d'ordre réduit (5.25) n'est pas sous la forme filtre usuelle de l'observateur d'ordre plein puisque  $\{\hat{\tilde{x}}_2(t)\}$  dépend directement de  $\{y(t)\}$ . On peut toutefois le récrire sous la forme

$$\text{OBSR} \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{z}_2(t) = (\bar{F}_{22} - \bar{M}_2 \bar{F}_{12}) \hat{z}_2(t) + (\bar{G}_2 - \bar{M}_2 \bar{G}_1) u(t) \\ \quad + (\bar{F}_{21} - \bar{M}_2 \bar{F}_{11} + \bar{F}_{22} \bar{M}_2 - \bar{M}_2 \bar{F}_{12} \bar{M}_2) y(t) \quad (5.26) \\ \hat{\tilde{x}}_2(t) = \hat{z}_2(t) + \bar{M}_2 y(t) \end{array} \right.$$

qui permet de restaurer la forme filtre usuelle pour la génération de la séquence  $\{\hat{z}_2(t)\}$ .

### 5.1.4 Observateurs de Luenberger

A la lumière de la présentation effectuée aux paragraphes précédents sur l'observation des systèmes, on peut conclure que l'estimation des variables d'état d'un système à partir des mesures de ses variables d'entrée et de sortie est faisable pourvu qu'il soit détectable. Et compte tenu d'une étude générale effectuée par Luenberger en la matière, cette estimation peut être réalisée par une classe de systèmes dynamiques, dits observateurs de Luenberger, dont la structure générale est donnée par les équations

$$\mathcal{OL} \begin{cases} \rho \hat{z}(t) = F_o \hat{z}(t) + G_u u(t) + G_y y(t) \\ \hat{x}(t) = W_z \hat{z}(t) + W_y y(t) + W_u u(t) \end{cases} \quad (5.27)$$

où les matrices  $(F_o, G_u, G_y)$  et  $(W_z, W_y, W_u)$  sont déterminées de manière à réaliser une convergence asymptotique de l'erreur d'observation d'état vers l'origine, soit

$$\mathcal{POL} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0 \right. \quad (5.28)$$

indépendamment des conditions initiales et la nature de la séquence d'entrée  $\{u(t)\} \in \mathbb{R}^m$ . Ce fait est corroboré par le résultat suivant

**Résultat 5.5** La synthèse d'un observateur de la famille (5.27) est faisable si et seulement si le système est détectable.

**Preuve.** La condition est bien suffisante comme l'indiquent les résultats qui ont été établis aussi bien pour l'observateur d'ordre plein (5.5) que pour l'observateur d'ordre réduit (5.26). Pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de montrer que si le système n'est pas détectable, alors la synthèse des observateurs Luenberger n'est pas faisable. Pour ce faire, supposons que le système n'est pas détectable et désignons par  $\mathcal{E}_{\bar{d}}$  son sous-espace non détectable et prenons  $x(0) \in \mathcal{E}_{\bar{d}}$ ,  $\hat{z}(0) = 0$  et  $u(t) = 0 \forall t \geq 0$ , alors les équations du système (5.1) et de la famille des systèmes dynamiques (5.27) se réduisent comme suit

$$\mathcal{SOL} \begin{cases} \rho x(t) = F x(t) \\ \rho \hat{z}(t) = F_o \hat{z}(t) + G_y H x(t) \\ \hat{x}(t) = W_z \hat{z}(t) + W_y H x(t) \end{cases}$$

Et comme  $x(0) \in \mathcal{E}_{\bar{d}} \subset \mathcal{E}_{\bar{o}}$ , on aura  $x(t) \in \mathcal{E}_{\bar{o}} \forall t \geq 0$  et donc  $Hx(t) = 0 \forall t \geq 0$ . Cette propriété permet de conclure que les trajectoires  $\{\hat{x}(t)\}$  et  $\{\hat{z}(t)\}$  sont identiquement nulles. Néanmoins, il existe  $x(0) \in \mathcal{E}_{\bar{d}}$  tel que la trajectoire d'état  $\{x(t)\}$  n'est pas asymptotiquement nulle et donc la condition requise pour un observateur n'est pas satisfaite par le système dynamique (5.27).

CQFD.

Les observateurs de Luenberger (5.27) peuvent être utilisés pour réaliser une estimation précise d'une combinaison linéaire des variables d'état d'un système définie par  $z(t) = P x(t)$ ,

pour une matrice  $P \in \mathbb{R}^{n_r \times n}$  donnée, pourvu que les matrices  $F_o$ ,  $G_u$  et  $G_y$  vérifient les propriétés suivantes

$$\mathcal{OLP} \begin{cases} \mathcal{P1.} & G_u = PG \text{ et } G_y H = PF - F_o P \\ \mathcal{P2.} & \mathcal{V}(F_o) \subset \mathcal{D}_{sp} \end{cases} \quad (5.29)$$

Pour ce faire, il suffit de procéder à une analyse de l'erreur d'observation correspondante dont l'équation peut être obtenue à partir des simples manipulations algébriques suivantes

$$\begin{aligned} \rho \tilde{z}(t) &= \rho z(t) - \rho \hat{z}(t) \\ &= P \rho x(t) - \left( F_o \hat{z}(t) + G_u u(t) + G_y y(t) \right) \\ &= P F x(t) + P G u(t) - F_o \left( P x(t) - \tilde{z}(t) \right) - G_y H x(t) - G_u u(t) \\ &= F_o \tilde{z}(t) + \left( P F - F_o P - G_y H \right) x(t) + \left( P G - G_u \right) u(t) \end{aligned}$$

La propriété  $\mathcal{P1}$  permet de récrire l'équation de l'erreur d'observation sous la forme simplifiée et indépendante de la séquence d'entrée donnée par

$$\rho \tilde{z}(t) = F_o \tilde{z}(t)$$

La trajectoire de l'erreur d'observation est alors donnée par

$$\tilde{z}(t) = e^{F_o t} \tilde{z}(0)$$

Il apparaît clairement que la propriété de précision requise est alors réalisée indépendamment des conditions initiales si et seulement si la propriété  $\mathcal{P2}$  est vraie. La dynamique de l'erreur d'observation est complètement caractérisée par le spectre de la matrice  $F_o$ .

Par ailleurs, on peut réaliser une estimation précise de l'état du système à partir de deux combinaisons linéaires des sorties et de l'estimée de la combinaison linéaire des variables d'état  $z(t) = P x(t)$ , soit

$$\mathcal{ESE} \left\{ \hat{x}(t) = W_z \hat{z}(t) + W_y y(t) \right. \quad (5.30)$$

où  $W_z \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  et  $W_y \in \mathbb{R}^{n \times p}$  sont telles que

$$W_z P + W_y H = I_n \quad (5.31)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= W_z \left( P x(t) - \tilde{z}(t) \right) + W_y H x(t) \\ &= \left( W_z P + W_y H \right) x(t) - W_z \tilde{z}(t) \end{aligned}$$

Et puisque  $W_z P + W_y H = I_n$ , on obtient

$$\hat{x}(t) = x(t) - W_z \tilde{z}(t)$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0 \text{ puisque } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}(t) = 0$$

On distingue deux observateurs de Luenberger qui sont couramment utilisés dans la pratique de l'observation des systèmes.

- Le premier est un observateur d'ordre plein qui consiste à observer  $n$  combinaisons linéaires indépendantes des variables d'état du système. Il est obtenu avec des matrices  $W_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $W_y \in \mathbb{R}^{n \times p}$  telles que

$$W_z = P^{-1} \text{ et } W_y = 0$$

- Le second est un observateur d'ordre minimal qui permet d'observer  $n - p$  combinaisons linéaires indépendantes de la matrice de sortie  $H$ . Il est élaboré avec une matrice  $P \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  telle que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix} = n$$

et une paire de matrices  $(W_z, W_y)$  donnée par

$$\begin{pmatrix} W_z & W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix}^{-1}$$

### 5.1.5 Exemple d'application

Le diagramme fonctionnel de la figure 5.4 représente une antenne radar entraînée par un moteur à courant continu. Les séquences  $\{u(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désignent respectivement la tension d'induit et la mesure de la vitesse du radar alors que la séquence  $\{v(t)\}$  représente les perturbations dues à l'influence du vent sur le radar et que l'on peut modéliser par un échelon d'amplitude inconnue  $v$ , i.e.  $\rho v(t) = 0$  avec  $v(0) = v$ . Les fonctions de transfert  $\mathcal{G}_1(s)$  et  $\mathcal{G}_2(s)$  sont déterminées à partir d'une modélisation adéquate du système actionneur-antenne radar-capteur correspondant en tenant compte de la nature des perturbations. On se propose de montrer que l'on peut réaliser une estimation consistante des perturbations à partir du comportement d'entrée-sortie du système dans le cas où les fonctions de transfert sont respectivement données par

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \text{ et } \mathcal{G}_2(s) = \frac{\beta}{s + \beta}$$

Cette estimation peut être réalisée à partir d'une représentation d'état du système, notamment celle que l'on peut obtenir aisément à partir des sorties des sous-systèmes.

$$\begin{aligned} \rho x_1(t) &= -\alpha x_1(t) + \alpha u(t) \\ \rho x_2(t) &= -\beta x_2(t) + \beta (x_1(t) + v(t)) \end{aligned}$$



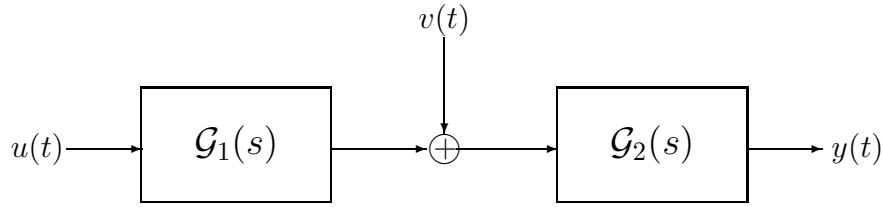


FIGURE 5.4 – Entraînement d'une antenne radar

$$y(t) = x_2(t)$$

et du modèle générateur des perturbations

$$\rho v(t) = 0$$

soit

$$\mathcal{AR} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + \Gamma v(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } H = (0 \ 1 \ 0)$$

Et comme la réalisation d'état  $(F, G, H)$  est observable, on propose un observateur asymptotique pour réaliser une estimation consistante conjointe des variables d'état du système et des perturbations avec une dynamique arbitraire caractérisée par trois modes  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathcal{D}_{sp}^3$ . Un tel observateur est donné

$$\text{OBSA} \{ \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + My(t) \}$$

avec

$$\det(sI_3 - F + MH) = \prod_{i=1}^3 (s - \mu_i)$$

soit

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} s + \alpha & m_1 & 0 \\ -\beta & s + \beta + m_2 & -\beta \\ 0 & m_3 & s \end{pmatrix} \\ & = \\ & s^3 + (m_2 + \alpha + \beta) s^2 + (\beta m_1 + \alpha m_2 + \beta m_3 + \alpha \beta) s + \alpha \beta m_3 \\ & = \\ & s^3 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \gamma_1 s^2 + (\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3) s + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \end{aligned}$$

Les composantes du gain d'observation sont alors respectivement données par

$$m_1 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \alpha(\alpha - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) + \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\alpha}$$

$$m_2 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \alpha - \beta$$

$$m_3 = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\alpha\beta}$$

## 5.2 Commande avec retour d'état

La commande avec retour d'état est issue d'une interprétation naturelle des variables d'état d'un système, en l'occurrence une mémoire minimale du système à partir de laquelle on peut prédire son comportement futur. Cette capacité de prédiction permet de traiter les problèmes usuels de la commande des systèmes, notamment la stabilisation, la régulation et la poursuite de trajectoires.

La figure 5.5 montre un système de commande avec retour d'état usuel. On distingue le système dont le comportement entrée-sortie est supposé être décrit par les équations d'état et de sortie (5.1) et la loi de commande avec retour d'état

$$\mathcal{CRE} \left\{ u(t) = -Kx(t) + u_r(t) \right. \quad (5.32)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  désigne le gain de retour d'état et  $\{u_r(t)\} \in \mathbb{R}^m$  désigne une séquence de référence pour la commande.

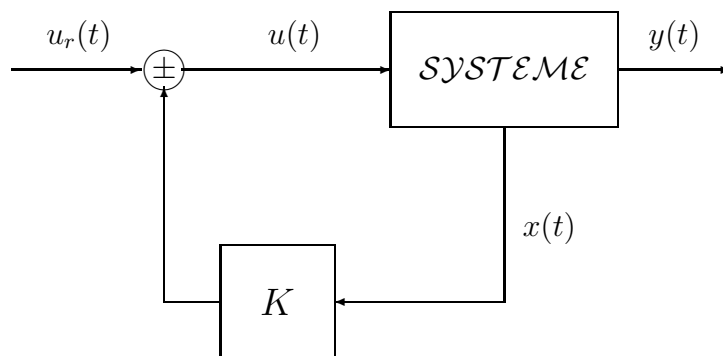


FIGURE 5.5 – Système de commande avec retour d'état

**Remarque 5.6** La séquence  $\{u_r(t)\} \in \mathbb{R}^m$  peut être générée à partir de la séquence de référence  $\{y^*(t)\} \in \mathbb{R}^p$  que l'on désire faire poursuivre à la sortie du système modulo une multiplication par un gain de dimension approprié, i.e.

$$u_r(t) = \Gamma y^*(t) \quad (5.33)$$

où  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p}$  est un gain particulièrement motivé par des considérations de précision, i.e. une erreur statique nulle.

La description du système de commande est obtenue en éliminant le signal de commande entre l'équation d'état du système (5.1) et celle de la loi de commande (5.32). On aura alors

$$SCRE \begin{cases} \rho x(t) = (F - GK) x(t) + Gu_r(t) \\ y(t) = Hx(t) \\ u(t) = -Kx(t) + u_r(t) \end{cases} \quad (5.34)$$

Et en appliquant la transformée de Laplace aux équations d'état et de sortie du système de commande avec retour d'état (5.34) ainsi que celle de la loi de commande avec retour d'état (5.32), tout en supposant que les conditions initiales sont nulles, on peut déterminer aisément la fonction de transfert du système de commande avec retour d'état.

$$SCRE \begin{cases} \begin{pmatrix} Y(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(sI_n - F + GK)^{-1}G \\ (I_m - K(sI_n - F + GK)^{-1}G) \end{pmatrix} U_r(s) \end{cases} \quad (5.35)$$

Le système de commande avec retour d'état  $\mathcal{G}_{scre} : u_r(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$  peut être alors décrit par

$$\mathcal{G}_{scre}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F - GK & G \\ \hline H & 0_{p \times m} \\ -K & I_m \end{array} \right) \quad (5.36)$$

### 5.2.1 Propriétés fondamentales

Le résultat suivant donne les propriétés principales de la commande avec retour d'état indépendamment de la méthode de synthèse adoptée pour la détermination du gain de commande avec retour d'état.

**Résultat 5.6** Le système de commande avec retour d'état décrit par les équations (5.34) ou (5.35) se distingue par les six propriétés fondamentales suivantes.

$\mathcal{P}1$ . Le système de commande avec retour d'état (5.34) est asymptotiquement stable si et seulement si le gain  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  vérifie la propriété suivante

$$\left( \mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_{sa} \right) \iff \left( \det(sI_n - F + GK) = 0 \implies |z| < 1 \right) \quad (5.37)$$

$\mathcal{P}2$ . Le polynôme caractéristique du système de commande avec retour d'état est relié au polynôme caractéristique du système sous jacent comme suit

$$\mathcal{RPC} \begin{cases} \frac{P_{ccre}(s)}{A_\sigma(s)} \triangleq \frac{\det(sI_n - F + GK)}{\det(sI_n - F)} = \det(I_m + K(sI_n - F)^{-1}G) \end{cases} \quad (5.38)$$

$\mathcal{P}3$ . Le retour d'état statique peut être interprété comme un précompensateur bicausal, soit

$$\text{IREPB} \left\{ \mathcal{G}_c(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{C}(s) \right. \quad (5.39)$$

avec

$$\mathcal{C}(s) = (I_m - K(sI_n - F + GK)^{-1}G) = (I_m + K(sI_n - F)^{-1}G)^{-1} \quad (5.40)$$

$\mathcal{P}4$ . Les zéros du système sont invariants par retour d'état : tout zéro du système est un zéro du système de commande avec retour d'état sous-jacent.

$\mathcal{P}5$ . La commandabilité est un invariant par retour d'état : un système de commande avec retour d'état est commandable si et seulement si le système qui lui est associé est commandable.

$\mathcal{P}6$ . Les modes non commandables du système sont invariants par retour d'état : tout mode non commandable du système est un mode non commandable du système de commande avec retour d'état correspondant.

**Preuve.** Notons d'abord que la propriété  $\mathcal{P}1$  découle naturellement de résultat 4.2 de stabilité asymptotique.

La propriété  $\mathcal{P}2$  est issue des manipulations algébriques suivantes

$$\begin{aligned} \det(sI_n - F + GK) &= \det((sI_n - F)(I_n + (sI_n - F)^{-1}GK)) \\ &= \det(sI_n - F) \det(I_n + (sI_n - F)^{-1}GK) \\ &= \det(sI_n - F) \det(I_m + K(sI_n - F)^{-1}G) \end{aligned}$$

La dernière opération est effectuée à la lumière du résultat A.3. On retrouve ainsi la relation (5.37) de passage du polynôme caractéristique du système au polynôme caractéristique du système de commande sous-jacent.

La propriété  $\mathcal{P}3$  est le fruit d'un ensemble de manipulations algébriques sur la fonction de transfert du système de commande, soit  $\mathcal{G}_c(s) = H(sI_n - F + GK)^{-1}G$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_c(s) &= H(sI_n - F + GK)^{-1}G \\ &= H\left((sI_n - F)(I_n + (sI_n - F)^{-1}GK)^{-1}\right)G \\ &= H(I_n + (sI_n - F)^{-1}GK)^{-1}(sI_n - F)^{-1}G \\ &= H(sI_n - F)^{-1}G(I_m + K(sI_n - F)^{-1}G)^{-1} \\ &= H(sI_n - F)^{-1}G(I_m - K(sI_n - F + GK)^{-1}G) \end{aligned}$$

Les deux dernières opérations ont été respectivement effectuées en vertu des résultats A.5 et A.6. On retrouve bien la propriétés  $\mathcal{P}3$  compte tenu des expressions de la fonction de transfert

du système de commande avec retour d'état  $\mathcal{G}_{scre}(s)$  et du compensateur  $\mathcal{C}(s)$ .

La propriété  $\mathcal{P}4$  peut aisément être établie en remarquant que la matrice système du système de commande avec retour d'état peut être décomposée comme suit

$$\begin{pmatrix} sI_n - F + GK & -G \\ H & 0_{p \times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & 0_{p \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ -K & I_m \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Et comme la matrice  $\begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ -K & I_m \end{pmatrix}$  est de rang plein, on aura

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - F + GK & -G \\ H & 0_{p \times m} \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & 0_{p \times m} \end{pmatrix} \quad \forall s \in \mathcal{C} \quad (5.42)$$

Et compte tenu du résultat 3.28, on peut postuler que les zéros du système sont des zéros du système de commande avec retour d'état pourvu que les configurations des zéros du système et des pôles du système de commande avec retour d'état soient disjointes; i.e.  $\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)) \cap \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{scre}(s)) = \emptyset$ .

La propriété  $\mathcal{P}5$  est naturellement obtenue à partir de la relation entre les matrices de commandabilité du système et du système de commande avec retour d'état correspondant, soit

$$\mathcal{M}_c(F, G) = \mathcal{M}_c(F - GK, G) \mathcal{T}(F, G, K)$$

avec

$$\mathcal{T}(F, G, K) = \begin{pmatrix} I_m & KG & KFG & \dots & \dots & KF^{n-2}G \\ 0 & I_m & KG & KFG & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & I_m & KG & KFG & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & I_m & KG \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}$$

En effet, la matrice de commandabilité du système de commande avec retour d'état est de rang plein si et seulement si la matrice de commandabilité du système est de rang plein puisque  $\mathcal{T}(F, G, K)$  est une matrice carrée inversible.

Pour la propriété  $\mathcal{P}6$ , elle peut être établie d'une manière élégante à partir de la décomposition selon la commandabilité, en vertu du résultat 3.8, soit

$$\mathcal{DSC} \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c & F_{\bar{c}c} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_c \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

où  $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  et  $x_{\bar{c}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\bar{c}}}$  correspondent respectivement à la partie commandable et la partie non commandable. En effet, le système de commande avec retour d'état associé est décrit par

$$\text{SCRÉ} \begin{cases} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c - G_c K_c & F_{\bar{c}} - G_c K_{\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_c \\ 0 \end{pmatrix} u_r(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Et compte tenu de l'invariance du polynôme caractéristique par changement de base, on a

$$P_{\text{scré}}(s) = \det(sI_{n_c} - F_c + G_c K_c) \det(sI_{n_{\bar{c}}} - F_{\bar{c}})$$

Les modes non commandables du système sont bien invariants par retour d'état. Et en vertu de la propriété  $\mathcal{P}5$ , on peut postuler que la paire  $(F_c - G_c K_c, G_c)$  est commandable puisque la paire  $(F_c, G_c)$  est commandable. Le système de commande avec retour d'état est ainsi naturellement décomposé selon la commandabilité.

CQFD

Les remarques suivantes permettent de mieux apprécier le concept de commande avec retour d'état à partir d'une lecture ingénieur de ses propriétés fondamentales.

**Remarque 5.7** Si le système peut exhiber une dynamique relativement lente et/ou des modes oscillatoires, le comportement d'un système de commande doit être relativement rapide et bien amorti. On est ainsi amené à définir un domaine de stabilité et de performances en fonction des performances dynamiques requises, notamment des modes dominants relativement rapides par rapport aux modes du système avec un amortissement raisonnable, i.e.  $\mathcal{D}_{sp} \subset \mathcal{D}_{sa}$ .

**Remarque 5.8** Les propriétés  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}3$  permettent de montrer que les zéros du système sont des zéros du système de commande avec retour d'état pourvu qu'ils ne figurent pas dans sa configuration modale, i.e.  $\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)) \cap \mathcal{CM}(\mathcal{G}_{\text{scré}}(s)) = \emptyset$ . On retrouve naturellement la propriété  $\mathcal{P}4$  que l'on peut conforter dans le cas des systèmes ayant autant d'entrées que de sorties en vertu de la propriété  $\mathcal{P}2$ . En effet, on aura

$$\det(\mathcal{G}_{\text{scré}}(s)) = \det(\mathcal{G}(s)) \det(\mathcal{C}(s)) = \frac{B_\sigma(s)}{A_\sigma(s)} \frac{A_\sigma(s)}{P_{\text{cscré}}(s)} = \frac{B_\sigma(s)}{P_{\text{cscré}}(s)}$$

**Remarque 5.9** Bien que le résultat fondamental 5.6 est principalement consacré aux propriétés structurelles du système de commande avec retour d'état par rapport à celles du système, les propriétés  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}6$  peuvent être néanmoins utilisées pour la synthèse. La propriété  $\mathcal{P}2$  est la pierre angulaire de la méthode de synthèse modale qui a été présentée au paragraphe précédent. Quant à la propriété  $\mathcal{P}6$ , elle permet d'introduire naturellement le concept de stabilisation des systèmes en vertu du fait que le polynôme caractéristique est invariant par changement de base. Ce fait permet de conclure que les modes non-commandables d'un système ne peuvent être modifiés avec une commande avec retour d'état et doivent être donc asymptotiquement stables. C'est le pourquoi du concept de stabilisabilité.

**Remarque 5.10** L'interprétation d'un système de commande avec retour d'état comme une cascade composée du système et d'un précompensateur bicausal est un résultat remarquable de la théorie des systèmes. Un effort de recherche considérable a été consacré à la réciproque de ce résultat, notamment la caractérisation des précompensateurs bicauxaux qui sont réalisables par un retour d'état statique ([43], [44]).

### 5.2.2 Synthèse modale

Comme les performances dynamiques d'un système dépendent essentiellement de la configuration de ses modes et compte tenu de la propriété  $\mathcal{P}6$ , on peut postuler que le polynôme caractéristique d'un système de commande avec retour d'état peut être toujours décomposé comme suit

$$M_{scre}(s) \triangleq \det(sI_n - F + GK) = M_c(s)M_{\bar{c}}(s)$$

avec

$$M_c(s) = \prod_{i=1}^{nm_c} (s - \mu_{ci}) \quad \text{et} \quad M_{\bar{c}}(s) = \prod_{j=1}^{nm_{\bar{c}}} (s - \mu_{\bar{c}j})$$

où  $M_c(s)$  (resp.  $M_{\bar{c}}(s)$ ) désigne le polynôme de modes issus de la synthèse considérée (resp. le polynôme des modes non commandables qui sont invariants par retour d'état) de degré égal au nombre des modes commandables  $n_c$  (resp. des modes non commandables  $n_{\bar{c}}$ ). Il apparaît alors clairement que si les modes non commandables ne sont pas asymptotiquement stables, alors le système de commande avec retour d'état sous-jacent n'est pas asymptotiquement stable. Ceci nous amène naturellement au postulat suivant

Si un système admet un mode non commandable qui n'est pas situé dans la domaine de stabilité asymptotique  $\mathcal{D}_{sa}$  (resp. dans le domaine de stabilité et de performances  $\mathcal{D}_{sp}$ ), alors le système de commande avec retour d'état sous-jacent n'est pas asymptotiquement stable (resp. ne réalise pas les performances dynamiques requises).

Ce postulat est conforté par deux résultats fondamentaux. Le premier résultat montre que la propriété de commandabilité d'un système garantit la possibilité d'assigner arbitrairement les modes d'un système de commande avec retour d'état.

**Résultat 5.7** Soient  $(F, G)$  une paire commandable d'ordre  $n$  et  $M(s) \in \mathbb{R}_n[s]$  un polynôme normalisé arbitraire de degré  $n$ . Alors l'équation algébrique

$$\det(sI_n - F + GK) = M(s) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{C} \quad (5.43)$$

admet une solution  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et cette solution est unique dans le cas d'un système mono entrée.

**La preuve** peut être effectuée en exploitant le résultat 5.3 sous la bénédiction de la dualité entre l'observabilité et la commandabilité mais on adoptera une autre approche pour mieux apprécier la synthèse modale. Et comme pour le résultat 5.3, la preuve sera particulièrement faite dans le cas des systèmes monovariabiles pour des considérations purement pédagogiques. Comme le polynôme caractéristique est un invariant par changement de base, la synthèse modale peut être effectuée dans une base où la détermination du gain du retour d'état est la plus simple possible compte tenu des résultats disponibles, notamment le résultat 3.7 qui stipule que si un système est commandable, alors il existe un changement de base  $x(t) = Tx_c(t)$  qui permet d'exprimer la réalisation d'état du système sous une forme canonique commandable caractérisée par une paire  $(F_c, G_c)$  donnée par

$$F_c = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système de commande avec retour d'état associé est décrit par la représentation d'état (5.34) avec

$$F_c - G_c K_c = \begin{pmatrix} -m_1 - a_1 & m_2 - a_2 & \dots & -m_n - a_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_c = \begin{pmatrix} k_{c1} \\ k_{c2} \\ \vdots \\ k_{cn} \end{pmatrix}$$

L'équation algébrique (5.17) peut se récrire comme suit

$$\det(sI_n - F_c + G_c K_c) = s^n + \sum_{i=1}^n (k_{ci} + a_i) s^{n-i} = s^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i s^{n-i}$$

Il apparaît alors clairement que l'on peut assigner arbitrairement les modes de l'observateur d'état avec un gain d'observation donné par

$$k_{ci} = \alpha_i - a_i \quad \text{pour tout } i \in [1, n]$$

Et ainsi, on peut concevoir un système de commande avec retour d'état d'un système commandable avec une dynamique arbitraire, i.e. caractérisée par  $M_c(s) \triangleq s^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i s^{n-i}$ , en utilisant une commande avec retour d'état de gain  $K = K_c T$ .

*CQFD.*

**Remarque 5.11** Dans le cas des systèmes commandables admettant plusieurs entrées, l'équation algébrique (5.43) admet une infinité de solutions, en l'occurrence l'ensemble des matrices

$$K = W_f + W_g K_w$$

où  $W_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $W_g \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  sont des matrices arbitraires et  $K_w \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  est la solution unique de l'équation algébrique

$$\det(sI_n - (F - GW_f) + (GW_g)) K_w = M_c(s)$$

qui n'est autre que l'équation de synthèse modale d'un système de commande avec retour d'état pour les systèmes admettant une seule entrée et dont les matrices d'état et de sortie sont respectivement données par  $F - GW_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $GW_g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . L'unicité de la solution est une conséquence naturelle de la propriété

$$(F - GW_f, GW_g) \text{ est commandable} \iff (H, F) \text{ est commandable}$$

que l'on peut établir aisément.



Quant au second résultat, il montre que la propriété de stabilisabilité est impérative pour la stabilisation d'un système.

**Résultat 5.8** Si  $(F, G)$  est stabilisable, alors on peut toujours déterminer un gain de commande avec retour d'état qui permet de stabiliser le système de commande avec retour d'état sous-jacent, i.e.

$$\exists K \in \mathbb{R}^{m \times n} / \mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

**La preuve** peut être aisément faite en s'inspirant de la preuve de la propriété  $\mathcal{P}6$ . Elle peut être faite à titre d'exercice pour mieux apprécier l'invariance des modes non commandables.

L'assignement arbitraire des modes d'un système de commande avec retour d'état n'est pas faisable pour les systèmes non commandables. Néanmoins, on peut réaliser un assignement admissible par rapport à la propriété  $\mathcal{P}6$  comme le montre le résultat fondamental suivant

**Résultat 5.9** Considérons un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H)$  d'ordre  $n$  et soient  $M_c(s) \in \mathbb{R}_{sp}[s]$  un polynôme normalisé arbitraire de degré  $n_c$  et  $M_{\bar{c}}(s) \in \mathbb{R}_{sa}[s]$  est le polynôme des modes non commandables de degré  $n_{\bar{c}}$ . Alors l'équation algébrique

$$\det(sI_n - F + GK) = M_c(s) M_{\bar{c}}(s)$$

admet une solution  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et cette solution est unique dans le cas d'un système mono entrée.

### 5.2.3 Exemple d'application

On se propose de résoudre le problème de commande pour les systèmes dynamiques dont le comportement d'entrée-sortie peut être décrit par l'équation différentielle

$$\mathcal{DINT} \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 y(t) = u(t) \end{array} \right.$$

Un tel problème est au coeur des asservissements d'attitude d'un satellite et des problèmes de commande de robots. Le système est un double intégrateur dont la sortie et sa dérivée, que l'on peut interpréter comme la position et la vitesse du système, peuvent être considérées comme des variables d'état. En effet, on peut vérifier que le système peut être décrit par la représentation suivante

$$\mathcal{DI} \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \right.$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \rho y(t) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (1 \quad 0)$$

Supposons que toutes les variables d'état sont accessibles à la mesure pour pouvoir réaliser la commande avec retour d'état

$$\text{CRÉ} \left\{ \begin{array}{l} u(t) = -Kx(t) + \gamma y^*(t) \end{array} \right.$$

alors on peut concevoir un système de commande avec retour d'état qui peut être décrit par la réalisation d'état  $(F - GK, \gamma G, H)$  ou la fonction de transfert

$$\mathcal{G}_{\text{scree}}(s) = \gamma H (sI_2 - F + GK)^{-1} G = \gamma \frac{B_\sigma(s)}{P_{\text{ccre}}(s)}$$

avec

$$P_{\text{ccre}}(s) = \det(sI_2 - F + GK)$$

Comme la paire  $(F, G)$  est commandable, il est possible de déterminer le gain de retour d'état  $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$  qui permet d'affecter au système de commande avec retour d'état une dynamique d'un système de second ordre d'amortissement  $\zeta_c$  et de pulsation propre  $\omega_c$ . Il suffit de résoudre, en le gain du retour d'état, l'équation caractéristique

$$\det(sI_2 - F + GK) = s^2 + 2\zeta_c\omega_c s + \omega_c^2$$

Et comme

$$\det(sI_2 - F + GK) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ k_1 & s + k_2 \end{pmatrix} = s^2 + k_2 s + k_1$$

les composantes du gain du retour d'état qui permettent de réaliser les performances dynamiques considérées sont alors données par

$$k_1 = \omega_c^2 \quad \text{et} \quad k_2 = 2\zeta_c\omega_c$$

Quant au gain  $\gamma$ , il est particulièrement introduit pour conférer un gain statique unitaire à la fonction de transfert du système de commande avec retour d'état, soit

$$\mathcal{G}_{\text{scree}}(0) = \gamma \frac{B_\sigma(0)}{P_{\text{ccre}}(0)} = 1 \quad \implies \quad \gamma = \frac{P_{\text{ccre}}(1)}{B_\sigma(1)} = \omega_c^2$$

### 5.3 Commande avec retour de sortie

La commande avec retour de sortie est généralement réalisée à partir d'une commande avec retour d'état incorporant un observateur comme l'indique la figure 5.6. Elle constitue la plus importante application de la commande avec retour d'état et de l'observation des systèmes. La pierre angulaire de la commande avec retour d'état utilisant un observateur est le principe d'équivalence certitude : l'observateur est considéré comme un capteur des variables d'état du système dont la mesure est beaucoup plus une exception qu'une règle dans la pratique.

Dans ce qui suit, on donne une description des systèmes de commande avec retour d'état incorporant un observateur et une interprétation polynômiale de la loi de commande sous-jacente. La description du système de commande permet d'étudier sa stabilité et ses performances. Ceci nous amène au théorème de séparation et aux propriétés structurelles du système de commande avec retour d'état incorporant un observateur. Quant à l'interprétation polynômiale de la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur, elle permet de mettre en évidence

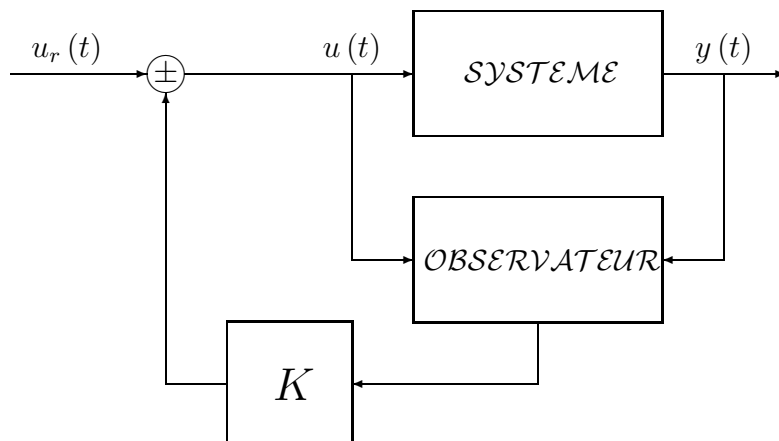


FIGURE 5.6 – Système de commande avec retour d'état incorporant un observateur

la relation entre l'approche d'état et l'approche polynomiale. Ceci nous amène à la caractérisation de la classe des régulateurs stabilisants.

### 5.3.1 Description du système de commande

La structure usuelle d'une loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur est donnée par

$$CBO \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + My(t) \\ u(t) = -K \hat{x}(t) + u_r(t) \end{cases} \quad (5.44)$$

où  $K$  et  $M$  sont respectivement les gain de retour d'état et d'observation du système de commande qui sont déterminés en fonction des performances requises, en l'occurrence

$$\mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_{sp} \text{ et } \mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

On notera que l'on peut spécifier arbitrairement les dynamiques du système de commande avec retour d'état et de l'observateur pourvu que le système soit commandable et observable.

Le système de commande avec retour d'état basé sur un observateur peut être obtenu en éliminant directement la commande entre l'équation du système 5.1 et celle de la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur (5.44) comme suit

$$SCREO \begin{cases} \rho \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & -GK \\ MH & F - GK - MH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ G \end{pmatrix} u_r(t) \\ y(t) = (H \ 0) \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.45)$$

**Remarque 5.12** Cette réalisation d'état du système de commande n'est pas appropriée pour étudier la stabilité et les performances du système de commande. En effet, on ne peut pas calculer aisément son polynôme caractéristique comme le montrent les manipulations algébriques suivantes utilisant principalement le résultat A.2.

$$\begin{aligned}
P_{ccreo}(s) &= \det \begin{pmatrix} sI_n - F & GK \\ -MH & sI_n - F + GK + MH \end{pmatrix} \\
&= \det(sI_n - F) \det(sI_n - F + GK + MH + MH(sI_n - F)^{-1}GK) \\
&= \det(sI_n - F) \det(sI_n - F + GK + MH(I_n + (sI_n - F)^{-1}GK)) \\
&= \det(sI_n - F) \det(sI_n - F + GK + MH(sI_n - F)^{-1}(sI_n - F + GK)) \\
&= \det(sI_n - F) \det((I_n + MH(sI_n - F)^{-1})(sI_n - F + GK)) \\
&= \det(sI_n - F) \det((sI_n - F + MH)(sI_n - F)^{-1}(sI_n - F + GK)) \\
&= \det(sI_n - F) \det(sI_n - F + MH) \det((sI_n - F)^{-1}) \det(sI_n - F + GK) \\
&= \det(sI_n - F + MH) \det(sI_n - F + GK) \\
&= P_{ccre}(s)P_{cobs}(s)
\end{aligned}$$

Et il en serait de même pour la simplification de la dynamique de poursuite nominale donnée par

$$Y(s) = \begin{pmatrix} H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - F & GK \\ -MH & sI_n - F + GK + MH \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G \\ G \end{pmatrix} U_r(s)$$

Le résultat fondamental suivant constitue la légitimité de la commande avec retour d'état incorporant un observateur : le théorème de séparation et le recouvrement de la dynamique de poursuite du système de commande avec retour d'état sous-jacent.

**Résultat 5.10** *Considérons le système de commande avec retour d'état utilisant un observateur composé du système (5.1) en rétroaction avec le régulateur (5.45), alors on a deux propriétés remarquables.*

*P1. Le polynôme caractéristique est égal au produit des polynômes caractéristique du système de commande avec retour d'état et de l'observateur sous-jacents, i.e.*

$$P_{ccreo}(s) = \det(sI_n - F + GK) \det(sI_n - F + MH) = P_{ccre}(s)P_{cobs}(s)$$

*P2. La dynamique de poursuite est la même que celle du système de commande avec retour d'état sous-jacent, i.e.*

$$Y(s) = \mathcal{G}_{screo}(s) U_r(s) \text{ avec } \mathcal{G}_{screo}(s) = \mathcal{G}_{scre}(s) = H(sI_n - F + GK)^{-1}G$$

**Preuve.** Notons d'abord que la système de commande peut être décrit par une réalisation d'état associée au vecteur d'état du système augmenté de l'erreur d'observation. Cette réalisation peut être obtenue en remarquant que l'équation d'état du système peut se récrire comme suit

$$\begin{aligned}
\rho x(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\
&= Fx(t) + G(-K\hat{x}(t) + u_r(t)) \\
&= Fx(t) - GK(x(t) - \tilde{x}(t)) + Gu_r(t) \\
&= (F - GK)x(t) + GK\tilde{x}(t) + Gu_r(t)
\end{aligned}$$

Et en tenant compte de l'équation de l'erreur d'observation, soit

$$\rho \tilde{x}(t) = (F - MH) \tilde{x}(t)$$

on obtient la représentation d'état suivante du système de commande avec retour d'état incorporant un observateur

$$\text{SCREO} \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - MH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ G \end{pmatrix} u_r(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.46)$$

Le polynôme caractéristique du système de commande peut être alors aisément déterminé en fonction des polynômes caractéristiques du système de commande avec retour d'état et de l'observateur sous-jacents conformément à la première propriété. En effet, on a

$$P_{\text{ccreo}}(s) = \det(sI_n - F + GK) \det(sI_n - F + MH) = P_{\text{ccre}}(s) P_{\text{cobs}}(s) \quad (5.47)$$

Par ailleurs, les équations (5.46) est une forme canonique issue d'une décomposition selon la commandabilité du système de commande avec retour d'état basé sur un observateur. Les modes commandables sont ceux du système de commande avec retour d'état sous-jacent (qui est commandable puisque le système est commandable), alors que les modes non commandables sont ceux de l'observateur sous-jacent. La fonction de transfert du système de commande avec retour d'état incorporant un observateur est donc réduite à celle de sa partie commandable qui n'est autre que le système de commande avec retour d'état sous-jacent. C'est l'essence de la seconde propriété.

*CQFD.*

La remarque suivante permet de mieux appréhender les propriétés remarquables et de montrer qu'elles sont satisfaites pour tous les observateurs de Luemberger.

**Remarque 5.13** La première propriété n'est autre que le principe de séparation qui stipule qu'un système de commande avec retour d'état basé sur un observateur est asymptotiquement stable si et seulement le système de commande avec retour d'état et l'observateur sous-jacents sont respectivement asymptotiquement stables, soit

$$\left( \mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_{sa} \right) \text{ et } \left( \mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_{sa} \right)$$

La seconde propriété montre que l'observateur peut être alors considéré comme un capteur logique puisqu'on peut recouvrir la dynamique de poursuite du système de commande avec retour d'état sous-jacent.

Par ailleurs, ces propriétés sont vérifiées dans le cas général d'une commande avec retour d'état utilisant un observateur de Luemberger donnée par les équations

$$\text{CREOL} \left\{ \begin{array}{l} u(t) = -K\hat{x}(t) + u_r(t) \\ \rho \hat{z}(t) = F_o \hat{z}(t) + G_u u(t) + G_y y(t) \\ \hat{x}(t) = W_z \hat{z}(t) + W_y y(t) \end{array} \right. \quad (5.48)$$

avec

$$PG = G_u, PF - F_oP = G_yH \text{ et } W_zP + W_yH = I_n$$

Cette assertion se déduit directement de la représentation du système de commande correspondant que l'on peut obtenir en éliminant la commande entre l'équation du système (5.1) et celle de la loi de commande (5.48), soit

$$\rho \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - GKW_yH & -GKW_z \\ G_yH - PGKW_yH & F_o - PGKW_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ PG \end{pmatrix} u_r(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} H & 0_{p \times n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix}$$

Et si l'on effectue le changement de base

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times n_r} \\ P & -I_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$$

on obtient une nouvelle réalisation d'état en effectuant les opérations algébriques requises pour le passage d'une réalisation d'état à une autre, en l'occurrence

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ P & -I_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F - GKW_yH & -GKW_z \\ G_yH - PGKW_yH & F_o - PGKW_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ P & -I_{n_r} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} F - GK & GKW_z \\ 0_{n_r \times n} & F_o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ P & -I_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ PG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ 0_{n_r \times m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H & 0_{p \times n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times n_r} \\ P & -I_{n_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0_{p \times n_r} \end{pmatrix}$$

Il apparaît clairement que le changement de base considéré a permis de décomposer le système de commande avec retour d'état utilisant un observateur de Luemberger selon la commandabilité ou la stabilisabilité

$$SCREOL \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - GK & GKW_z \\ 0_{n_r \times n} & F_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0_{n_r \times m} \end{pmatrix} u_r(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} H & 0_{p \times n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Cette décomposition permet de retrouver aisément le théorème de séparation et le recouvrement de la dynamique de poursuite du système de commande avec retour d'état. En effet, on a

$$P_{ccreol}(s) = \det(sI_n - F + GK) \det(sI_n - F_o) = P_{ccre}(s)P_{cobs}(s)$$

et

$$Y(s) = H(sI_n - F + GK)^{-1} G U_r(s)$$

**Remarque 5.14** Dans le cas des systèmes multivariables, on peut exploiter judicieusement la pluralité des solutions d'une synthèse modale en assignant conjointement les modes du système de commande avec retour d'état (resp. de l'observateur) et une partie des composantes des vecteurs propres sous-jacents. On réalise ainsi un assignement de la structure du système de commande avec retour d'état (resp. de l'observateur) dont la faisabilité est vigoureusement étudiée dans [60]. Le concept de l'assignement de la structure a été particulièrement adopté à l'ONERA comme en témoignent les activités de recherche qui ont été consacrées et corroborées par une approche de synthèse modale robuste pour le pilotage automatique des avions. L'essence d'un assignement de structure est présentée d'une manière claire, concise et précise avec une étude de faisabilité dans les annales des techniques d'ingénieurs ([31] et [32]). Un ouvrage a été essentiellement dédiée à l'approche de synthèse modale robuste en accordant une attention particulière aux outils requis pour son application au pilotage des avions ([63]). Ces outils ont été principalement développés à partir d'une lecture ingénieur des résultats disponibles sur la commande robuste ([77], [88]) et du savoir faire développé au sein de l'ONERA en la matière.

### 5.3.2 Interprétation polynomiale

Le résultat fondamental suivant donne une interprétation polynomiale adéquate de la commande avec retour d'état incorporant un observateur. Le régulateur sous-jacent admet une structure usuelle qui est à la base de la théorie de la commande des systèmes.

**Résultat 5.11** Considérons la classe des système de commande avec retour d'état basée sur un observateur décrit par les équations d'état et de sortie (5.48), alors la loi de commande peut se mettre la forme polynomiale désormais usuelle donnée par

$$\text{CREOFP} \{ \mathcal{R}_d(s) U(s) + \mathcal{R}_n(s) Y(s) = U_r(s) \} \quad (5.49)$$

avec

$$\mathcal{R}_d(s) = I_m + K (sI_n - F + MH)^{-1} G \quad (5.50)$$

$$\mathcal{R}_n(s) = K (sI_n - F + MH)^{-1} M \quad (5.51)$$

ou d'une manière équivalente

$$\text{CREOFP} \{ U(s) = -\mathcal{R}_r(s) Y(z) + \mathcal{R}_p(s) U_r(s) \} \quad (5.52)$$

avec

$$\mathcal{R}_r(s) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{F - GK - MH}{K} & M \\ \hline & 0 \end{array} \right) \quad (5.53)$$

$$\mathcal{R}_p(s) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{F - GK - MH}{K} & -G \\ \hline & I_m \end{array} \right) \quad (5.54)$$

**Preuve.** Si l'on applique la transformée de Laplace à la loi de commande avec retour d'état basé sur un observateur (5.48), en supposant que les conditions initiales sont nulles, on aura

$$U(s) = -K\hat{X}(s) + U_r(s) \quad (5.55)$$

Et compte tenu des expressions (5.7)-(5.8) de la fonction de transfert de l'observateur, on retrouve la forme polynomiale (5.52)-(5.50). Autrement, on peut exprimer l'estimée de l'état en tenant compte de l'équation de loi de commande avec retour d'état basée sur un observateur (5.44) comm suit

$$s\hat{X}(s) = F\hat{X}(s) + G \left( -K\hat{X}(s) + U_r(s) \right) - MH\hat{X}(s) + MY(s)$$

soit

$$\hat{X}(s) = (sI_n - F + GK + MH)^{-1} (MY(s) + GU_r(s))$$

Et en substituant cette expression dans la loi de commande avec retour d'état basée sur un observateur (5.55), on obtient la loi de commande (5.52) avec

$$\mathcal{R}_r(s) = K (sI_n - F + GK + MH)^{-1} M$$

et

$$\mathcal{R}_p(s) = I_m - K (sI_n - F + GK + MH)^{-1} G$$

Ainsi, on retrouve les expressions (5.53) et (5.54) des fonctions de transfert du régulateur  $\mathcal{R}_r(s)$  et  $\mathcal{R}_p(s)$ .

*CQFD*

La première partie du problème 5.4 est consacrée à l'interprétation polynomiale d'une loi de commande avec retour d'état basée sur un observateur dans le cas des systèmes monovariables, on suggère de la faire pour mieux apprécier une telle interprétation.

**Remarque 5.15** Les fonctions de transfert en boucle ouverte à l'entrée et à la sortie du système de commande avec retour d'état incorporant un observateur sont respectivement données par

$$\mathcal{G}_{oe}(s) = \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{os}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$$

avec

$$\mathcal{G}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G$$

et

$$\mathcal{R}(s) = K (sI_n - F + GK + MH)^{-1} M$$

Elles permettent d'étudier les performances et la robustesse, notamment les marges de stabilité du système de commande en entrée et en sortie à partir des fonctions de sensibilité associées. Il faut remarquer que les propriétés de robustesse du système de commande avec retour d'état et de l'observateur ne sont généralement pas préservées par la commande avec retour d'état utilisant un observateur. Cet aspect des choses sera particulièrement étudié dans le cadre du concept de Restauration du Transfert de la Boucle au chapitre 8.



### 5.3.3 Paramétrisation des régulateurs stabilisants

Le résultat fondamental suivant permet de caractériser la classe des régulateurs stabilisants à partir d'une loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur. On considérera pour ce faire un contexte de régulation, i.e.  $\{u_r(t)\}$  est une séquence identiquement nulle, pour se focaliser sur le problème de stabilisation.

**Résultat 5.12** *Considérons la loi de commande avec retour d'état basée sur un observateur (5.44) avec une séquence  $\{u_r(t)\}$  identiquement nulle, la classe des régulateurs stabilisants sous-jacente est élaborée en y incorporant un filtrage du processus d'innovation de l'observateur comme suit*

$$\text{CREOFI } \left\{ U(s) = -K\hat{X}(s) - Q(s)\tilde{Y}(s) \right. \quad (5.56)$$

où  $Q(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$  est une fonction de transfert strictement propre et asymptotiquement stable, communément appelé le paramètre de Youla-Kucera, que l'on peut exprimer à partir de l'une de ses réalisations d'état minimales comme suit

$$Q(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_s & G_s \\ \hline H_s & 0_{m \times p} \end{array} \right) \text{ avec } \mathcal{V}(F_s) \in \mathcal{D}_{sa} \quad (5.57)$$

**Preuve.** En vertu du résultat 5.11, le régulateur issu de la commande avec retour d'état basé sur un observateur est décrit par

$$\mathcal{R}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F - GK - MH & M \\ \hline K & 0_{m \times p} \end{array} \right) \quad (5.58)$$

avec

$$\mathcal{V}(F - GK) \in \mathcal{D}_{sa} \text{ et } \mathcal{V}(F - MH) \in \mathcal{D}_{sa} \quad (5.59)$$

Par ailleurs, si l'on désigne par  $x_s(t) \in \mathbb{R}^q$  l'état associé à la réalisation d'état  $(F_s, G_s, H_s)$ , la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur et un filtrage de son processus d'innovation peut être développée comme suit

$$\text{CRS } \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}(t) = (F - MH)\hat{x}(t) + My(t) + Gu(t) \\ u_s(t) = y(t) - H\hat{x}(t) \\ \rho x_s(t) = F_s x_s(t) + G_s u_s(t) \\ y_s(t) = H_s x_s(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) - y_s(t) \end{array} \right. \quad (5.60)$$

ou d'une manière équivalente

$$\text{CRS } \left\{ \begin{array}{l} \rho x_{rs}(t) = (F_{rs} - G_{rs}K_{rs} - M_{rs}H_{rs})x_{rs}(t) + M_{rs}y(t) \\ u(t) = -K_{rs}x_{rs}(t) \end{array} \right. \quad (5.61)$$

avec

$$x_{rs}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ x_s(t) \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

$$F_{rs} = \begin{pmatrix} F & 0_{m \times q} \\ 0_{q \times n} & F_s \end{pmatrix}, \quad G_{rs} = \begin{pmatrix} G \\ 0_{q \times m} \end{pmatrix}, \quad H_{rs} = (H \quad 0_{p \times q}) \quad (5.63)$$

$$K_{rs} = (K \quad H_s) \quad \text{et} \quad M_{rs} = \begin{pmatrix} M \\ G_s \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

Par ailleurs, on montre aisément que le système de commande issu de la classe des régulateurs stabilisants (5.61)-(5.64) peut être décrit par une réalisation d'état associée au vecteur d'état du système augmenté du vecteur d'état du filtre de la séquence d'innovation de l'observateur et de l'erreur d'observation, soit

$$\text{SCREO} \left\{ \begin{aligned} \rho \begin{pmatrix} x(t) \\ x_s(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F - GK & -H_s & GK \\ 0_{q \times n} & F_s & G_s H \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times q} & F - MH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_s(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} \\ &= (H \quad 0_{p \times q} \quad 0_{p \times n}) \begin{pmatrix} x(t) \\ x_s(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Le système de commande issu des régulateurs stabilisants est donc bien asymptotiquement stable puisque son polynôme caractéristique est donné par

$$\begin{aligned} P_{creo}(s) &= \det(sI_n - F + GK) \det(sI_n - F_s) \det(sI_n - F + MH) \\ &= P_{cre}(s) P_{cfil}(s) P_{cobs}(s) \end{aligned}$$

La classe des régulateurs stabilisants est alors donnée par

$$\mathcal{R}_{rs}(z) = \left( \begin{array}{c|c} F_{rs} - G_{rs}K_{rs} - M_{rs}H_{rs} & M_{rs} \\ \hline -K_{rs} & 0_{m \times p} \end{array} \right) \quad (5.65)$$

avec

$$\mathcal{V}(F_{rs} - G_{rs}K_{rs}) \in \mathcal{D}_{sa} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(F_{rs} - M_{rs}H_{rs}) \in \mathcal{D}_{sa} \quad (5.66)$$

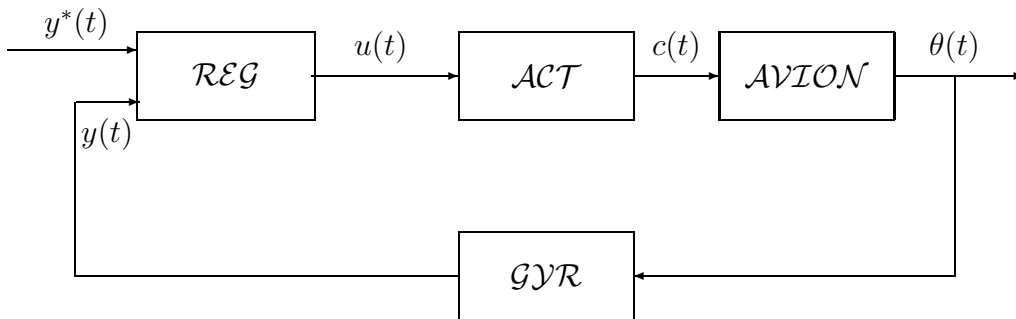
*CQFD*

La seconde partie du problème 5.4 concerne l'élaboration d'une classe de régulateurs stabilisants à partir d'une loi de commande avec retour d'état basée sur un observateur dans le cas des systèmes monovariabiles, on suggère de le faire pour mieux apprécier la nature du concept de stabilisation.

### 5.3.4 Exemple d'application

On se propose d'étudier le problème d'asservissement de position d'un avion dans le contexte spécifique d'un mouvement en roulis dont le schéma fonctionnel peut être représenté comme le montre la figure 5.7. La cascade  $ACT \rightarrow AVION \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{Y}\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{G}$  désignent respectivement le système et le régulateur. Les séquences  $\{c(t)\}$  et  $\{\theta(t)\}$  désignent respectivement le couple effectivement appliqué aux ailerons et l'angle de roulis, alors que les séquences  $\{u(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  représentent le couple à appliquer aux ailerons et la mesure de l'angle de roulis.  $ACT$  ( $\mathcal{G}\mathcal{Y}\mathcal{R}$ ) est un système hydraulique asservi relativement performant (resp. est un gyroscope relativement précis) pour être considéré comme un amplificateur de gain unitaire. Le mouvement de roulis d'un avion peut être raisonnablement par l'équation différentielle

$$AMR \quad \{ (\rho^2 + 2\zeta\omega\rho + \omega^2)\theta(t) = \omega^2 c(t) \}$$



La synthèse d'un tel système est effectuée à partir d'une réalisation d'état du système. Pour ce faire, il suffit de remarquer que la sortie du système et sa dérivée modulo une normalisation spécifique, soit

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{1}{\omega}\rho y(t) \end{pmatrix}$$

constituent des variables d'état du système. En effet, on a bien

$$\rho x_1(t) = \rho y(t) = \omega x_2(t)$$

$$\rho x_2(t) = \frac{1}{\omega}\rho^2 y(t) = -2\zeta\rho y(t) - \omega y(t) + \omega u(t) = -\omega x_1(t) - 2\zeta\omega x_2(t) + \omega u(t)$$

soit

$$\rho \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\zeta\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} u(t)$$

Quant à la sortie, elle peut bien se récrire sous la forme

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi une réalisation d'état minimale du système donnée par

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\zeta\omega \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et on vérifie qu'elle correspond bien à la fonction de transfert du système puisque

$$\mathcal{G}(s) = H(sI_2 - F)^{-1}G = \frac{H \text{Adj}(sI_2 - F)G}{\det(sI_2 - F)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\omega\zeta s + \omega^2}$$

Comme la réalisation d'état du système est minimale, elle est commandable et observable. On peut donc concevoir un système de commande avec retour d'état incorporant un observateur permettant de réaliser des performances dynamiques arbitraires modulo l'invariance des zéros du système par retour d'état, soit

$$\text{CREO} \begin{cases} \hat{x}(t) = (F - MH)\hat{x}(t) + Gu(t) + M_y(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) + \gamma y^*(t) \end{cases}$$

Compte tenu de la propriété  $\mathcal{P}1$  du résultat 5.10, le polynôme caractéristique du système asservi ainsi conçu est donné par le produit des polynômes caractéristiques du système de commande avec retour d'état et de l'observateur sous-jacent, soit

$$P_{\text{creo}}(s) \triangleq P_{\text{cre}}(s)P_{\text{cobs}}(s) = \det(sI_2 - F + GK) \det(sI_2 - F + MH)$$

et sa fonction de transfert est réduite à celle du système de commande avec retour d'état qui lui est associé, soit

$$\mathcal{G}_{\text{screeo}}(s) = \frac{H \text{Adj}(sI_2 - F + GK)G}{\det(sI_2 - F + GK)} \gamma = \frac{H \text{Adj}(sI_2 - F)G}{\det(sI_2 - F + GK)} \gamma = \gamma \frac{B_\sigma(s)}{P_{\text{cre}}(s)}$$

La détermination des gains de commande avec retour d'état et d'observation sont effectuées conformément aux performances requises, en l'occurrence une dynamique de poursuite de gain statique unitaire caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et de fréquence propre  $\omega$ . Pour ce faire, on peut déterminer le gain de commande avec retour d'état de manière à conférer au système de commande avec retour d'état une dynamique d'un système de second ordre d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega$  dont les zéros sont ceux du système. Le gain  $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  est la solution de l'équation caractéristique

$$P_{\text{cre}}(s) \triangleq \det(sI_2 - F + GK) = s^2 + 2\omega s + \omega^2$$

Et comme

$$\det \begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega + \omega k_1 & s + 2\zeta\omega + \omega k_2 \end{pmatrix} = s^2 + (2\zeta\omega + \omega k_2)s + (\omega^2 + \omega^2 k_1)$$

les composantes du gain de commande sont alors respectivement données par

$$k_1 = 0 \text{ et } k_2 = 2(1 - \zeta)$$

Le gain  $\gamma$  permet de conférer un gain statique unitaire à la fonction de transfert du système de commande avec retour d'état, soit

$$\mathcal{G}_{\text{screeo}}(1) = \gamma \frac{B_\sigma(1)}{P_{\text{cre}}(1)} = 1 \implies \gamma = 1$$

Quant au gain d'observation, on peut le déterminer de manière à réaliser une dynamique d'observation relativement rapide par rapport à la dynamique de poursuite de l'asservissement, notamment un mode d'amortissement unitaire et de fréquence propre  $\eta\omega$  avec  $\eta \geq 2$ . Le gain d'observation  $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  est la solution de l'équation caractéristique

$$P_{\text{cobs}}(s) \triangleq \det(sI_2 - F + MH) = s^2 + 2\eta\omega s + \eta^2\omega^2$$

Et comme

$$\det \begin{pmatrix} s + m_1 & -\omega \\ m_2 + \omega & s + 2\zeta\omega \end{pmatrix} = s^2 + (2\zeta\omega + m_1)s + 2\zeta\omega m_1 + \omega m_2 + \omega^2$$

les composantes du gain de commande sont alors respectivement données par

$$m_1 = 2(\eta - \zeta)\omega \quad \text{et} \quad m_2 = (\eta^2 - 4\zeta\eta + 4\zeta^2 - 1)\omega$$

On notera que la différence essentielle entre la dynamique du système est de commande de celle du système concerne l'amortissement qui est passé de  $\zeta < 1$  à 1. La dynamique du système de commande avec retour d'état (resp. de l'observateur) est la dynamique dominante du système de commande (resp. est une dynamique auxiliaire qui permet d'affiner la robustesse en stabilité par rapport aux erreurs de modélisation inéluctable).

### 5.3.5 Digression

Permettez-moi une petite digression en guise d'une amicale pensée à mes collègues de la spécialité électronique et physique appliquée de l'ENSICAEN qui ont la culture de la rétroaction. La figure 5.8 montre le diagramme fonctionnel d'une boucle de verrouillage de phase (BVP) où  $y^*(t)$  et  $y(t)$  représentent respectivement le signal d'entrée et le signal de sortie respectivement donnés par  $y^*(t) = r^* \sin(\varphi^*(t))$  et  $y(t) = r \sin(\varphi(t))$ . VCO désigne un oscillateur qui délivre un signal dont la fréquence est proportionnelle à la tension qui lui est appliquée, soit  $\omega(t) = \gamma u(t)$  avec  $\gamma > 0$ . Cet oscillateur est communément connu sous l'appellation anglophone "Voltage Controlled Oscillator" qui justifie l'acronyme VCO. COP désigne un comparateur de phase qui délivre un signal proportionnel à l'écart entre la phase du signal d'entrée et celle du signal de sortie. Et R&E désigne un régulateur qui permet de conférer à la BVP une précision maximale avec une dynamique donnée et une robustesse (resp. insensibilité) admissible par rapport aux erreurs de modélisation (resp. aux bruits de mesure) inéluctables.

On se propose d'étudier d'une manière progressive la synthèse d'une BVP pour un signal d'entrée de pulsation constante, i.e.  $\omega^*(t) = \omega^* \forall t \geq 0$ , à partir du système constitué par la cascade  $\text{VCO} \rightarrow \text{CPH}$  décrit par les équations

$$\rho(\varphi^*(t)) = \omega^*(t)$$

$$\rho(\omega^*(t)) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^*(0) = \omega^*$$

$$\rho(\varepsilon(t)) = \omega^*(t) - \gamma u(t) = \omega^* - \gamma u(t)$$

que l'on peut récrire sous la forme d'une représentation d'état

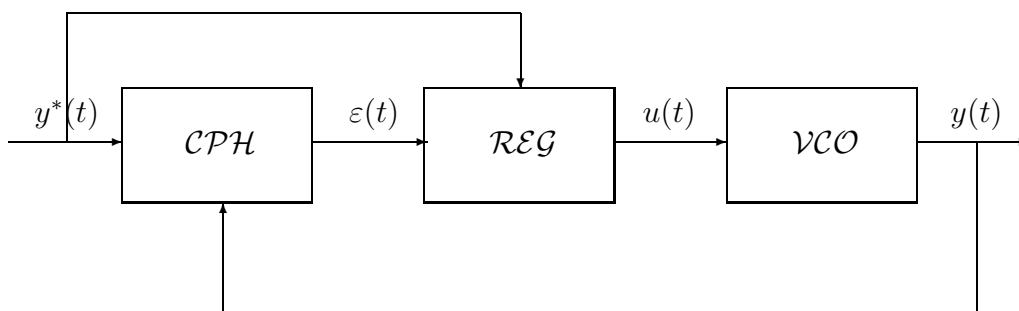


FIGURE 5.8 – Boucle à verrouillage de phase

$$\mathcal{BV}\mathcal{P} \begin{cases} \rho x_\sigma(t) = F_\sigma x_\sigma(t) + G_\sigma u(t) \\ \varepsilon(t) = H_\sigma x_\sigma(t) \end{cases}$$

avec

$$x_\sigma(t) \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \omega^*(t) \\ \varphi^*(t) \end{bmatrix}$$

$$F_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_\sigma = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_{\text{sigma}} = (1 \ 0 \ 0)$$

La réalisation d'état  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma)$  est sous la forme d'une décomposition selon la commandabilité et l'observabilité, on peut en déduire aisément que les modes associés aux variables d'état  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  ne sont pas commandables et que le mode associé à la variable d'état  $x_3(t)$  n'est pas observable. Et comme tous les modes du système sont à l'origine, le système n'est ni stabilisable ni détectable et ne peut donc être utilisé pour la synthèse d'un système de commande. Cette synthèse peut être néanmoins faite à partir d'un modèle réduit du système que l'on peut obtenir en éliminant le mode associé à la variable d'état  $x_3(t)$ . Ce modèle est alors décrit par la représentation d'état

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ \varepsilon(t) = Hx(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ \omega^*(t) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (1 \ 0)$$

Notons d'abord que la réalisation d'état  $(F, G, H)$  n'est pas stabilisable mais son mode non commandable est stable au sens de Lyapunov. On peut donc envisager une commande avec retour d'état

$$\mathcal{CRE} \left\{ u(t) = -K x(t) \text{ avec } K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right.$$

modulo un découplage des parties commandable et non commandable du système de commande avec retour d'état décrit par les équations

$$\text{SCRÉ} \begin{cases} \rho x(t) = (F - GK) x(t) \\ \varepsilon(t) = Hx(t) \end{cases}$$

avec

$$F - GK = \begin{pmatrix} \gamma k_1 & 1 + \gamma k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce découplage est réalisé avec un gain de commande avec retour d'état satisfaisant la propriété suivante

$$k_1 = \frac{1}{\gamma} \mu < 0 \quad \text{et} \quad k_2 = -\frac{1}{\gamma}$$

Cette propriété permet de mettre le mode non commandable du système dans le sous espace d'inobservabilité du système de commande avec retour d'état. Ce dernier est alors réduit à sa partie commandable, soit

$$\text{SCRÉ} \begin{cases} \rho \varepsilon(t) = \mu \varepsilon(t) \end{cases}$$

qui est asymptotiquement stable puisque  $\mu < 0$ .

**Remarque 5.16** La fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande avec retour d'état est particulièrement donnée par

$$\mathcal{G}_o(s) = K (sI_2 - F)^{-1} G = \frac{-\mu}{s}$$

C'est un intégrateur de gain  $-\mu$ . On aura alors une marge de gain infini, une marge de phase de 90 degrés et une marge du module égale à un. La BVP ainsi obtenue est robuste du point de vue de la stabilité pourvu que la pulsation du signal d'entrée soit une constante connue.

Par ailleurs, comme le modèle réduit du système est observable, on peut réaliser une synthèse de la BVP dans le cas où la pulsation  $\omega^*$  est inconnue. Pour ce faire, il suffit d'incorporer un observateur dans la loi de commande avec retour d'état développée ci-dessus comme suit

$$\text{CREO} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + M\varepsilon(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases}$$

Le gain d'observation doit être déterminé conformément aux performances dynamiques requises pour l'estimation des variables d'état. Dans le cas d'une dynamique d'observation caractérisée par un mode dominant d'amortissement  $\zeta_o$  et une pulsation  $\omega_o$ , le gain d'observation doit satisfaire la propriété suivante

$$\det(sI_2 - F + MH) = s^2 + 2\zeta_o\omega_o s + \omega_o^2$$

ou d'une manière équivalente

$$s^2 + m_1 s + m_2 = s^2 + 2\zeta_o\omega_o s + \omega_o^2$$

soit

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta_o\omega_o \\ \omega_o^2 \end{bmatrix}$$

**Remarque 5.17** L'observateur considéré fournit une estimation précise conjointe de l'erreur de phase  $\varepsilon(t)$  et de la pulsation du signal d'entrée  $\omega^*(t)$ . Par ailleurs, compte tenu du résultat 5.10, on peut postuler que la dynamique de la  $\mathcal{BVP}$ , issue de la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur, est caractérisée par le mode  $\mu$  du système de commande avec retour d'état et du mode  $(\zeta_o, \omega_o)$  de l'observateur. Et si on souhaite que le mode  $\mu$  soit dominant, il suffit de spécifier le mode de l'observateur comme suit  $\omega_o \gg |\mu|$ .

Et pour un bon atterrissage dans le domaine fréquentiel, on invoquerait le résultat 5.11 pour postuler que la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{REG} \{ U(s) = \mathcal{R}(s)\mathcal{E}(s) \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}(s) = -K (sI_2 - F + GK + MH)^{-1} M$$

Et compte tenu des expressions des gains de la commande avec retour d'état et d'observation, le régulateur peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{R}(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{s(1 + \beta \tau s)}$$

avec

$$\alpha = \frac{-\mu\omega_o^2}{(-\mu + 2\omega_o\zeta_o)\gamma}$$

$$\beta = \frac{-\mu\omega_o}{(-\mu + 2\omega_o\zeta_o)(-2\mu\zeta_o + \omega_o)} < 1$$

$$\tau = \frac{-2\mu\zeta_o + \omega_o}{-\mu\omega_o}$$

On notera que le régulateur est dotée d'une action intégrale et d'une avance de phase. L'action intégrale permet de réaliser les performances requises en matière de précision pour une pulsation d'entrée constante, alors que l'avance de phase permet d'affiner les performances de la  $\mathcal{BVP}$ . Et comme le régulateur est strictement propre, la  $\mathcal{BVP}$  est naturellement insensible aux bruits de mesure inéluctables.

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre est une synthèse ingénieur sur le potentiel fondamental de l'approche d'état pour les systèmes linéaires dans un contexte idéal. Le concept de retour d'état (resp. d'injection de sortie) est présenté d'une manière progressive et soucieuse de son héritage intrinsèque, notamment la propriété de commandabilité, les modes non commandables et les zéros (resp. la propriété d'observabilité et les modes non observables) du système. Les propriétés fondamentales d'un système de commande avec retour d'état incorporant un observateur sont particulièrement mises en exergue, en l'occurrence la stabilité et les performances du système de commande sont



explicitement données par celles de du système de commande avec retour d'état et de l'observateur sous-jacents. Ces propriétés constituent l'essence d'une meilleure perception d'un observateur : un capteur logiciel réalisant un filtrage adéquat des bruits de mesure inéluctables. La synthèse modale est adoptée pour des considérations pédagogiques ; elle est utilisée pour traiter trois exercices d'illustration. Une attention particulière a été accordée au fait que toutes des lois de commande avec retour d'état incorporant un observateur peuvent se récrire sous une forme polynomiale usuelle et que la réciproque est vraie modulo un filtrage approprié de la séquence d'innovation de l'observateur. Ces éléments sont au coeur de l'ingénierie des systèmes qui a été considérablement développée tout au long des dernières décennies.

Le problème 5.5 a été essentiellement conçu pour mettre en évidence les effets des perturbations sur le comportement d'entrée-sortie d'un système de commande avec retour d'état incorporant un observateur. Ainsi, on pourrait apprécier les limitations du contexte idéal considéré tout en motivant le concept de compensation parfaite des perturbations.

## 5.5 Problèmes

On propose un ensemble de problèmes qui permettent de réaliser une évaluation active des connaissances acquises tout en offrant une opportunité pour s'appropriier les concepts de commande avec retour d'état, d'observation par une injection de sortie et de commande avec retour d'état incorporant un observateur avec éventuellement un filtrage de sa séquence d'innovation.

**Problème 5.1** Proposer une approche de synthèse d'un système de commande avec retour d'état (resp. un observateur d'état) dans le cas des systèmes commandables (resp. observables) en exploitant judicieusement les résultats disponibles sur les propriétés structurelles des systèmes, notamment l'invariance des modes d'un système par un changement de base.

**Problème 5.2** On se propose de découvrir la démarche d'Ackerman pour la détermination du gain de retour d'état des systèmes monovariabiles commandables en procédant progressivement comme suit

1) Montrer que

$$(F - GK)^k = F^k - F^{k-1}GK - \sum_{j=2}^k F^{k-j}GK (F - GK)^{j-1}$$

et en déduire que

$$P_{cree}(F) = \left( \begin{array}{cccc} G & FG & \dots & F^{n-2}G & F^{n-1}G \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j K (F - GK)^{n-1-j} \\ \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j K (F - GK)^{n-2-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^1 \alpha_j K (F - GK)^{1-j} \\ K \end{array} \right)$$

- 2) Montrer que le gain  $K$  qui permet d'assigner les modes du système de commande avec retour est donné par

$$K = ( 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 ) \mathcal{M}_c^{-1} P_{cree}(F)$$

**Problème 5.3** Considérons la classe des systèmes linéaires invariants strictement propres et observables décrits par la représentation d'état

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_{\bar{a}}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \left( F = \begin{bmatrix} F_a & F_{a\bar{a}} \\ F_{\bar{a}a} & F_{\bar{a}} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_a \\ G_{\bar{a}} \end{bmatrix} \text{ et } H = [ I_p \quad 0 ] \right)$$

où  $\{u(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \in \mathcal{R}^m$  et  $\{y(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \in \mathcal{R}^p$  représentent respectivement l'entrée et la sortie du système et  $\{x_a(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \in \mathcal{R}^p$  et  $\{x_{\bar{a}}(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \in \mathcal{R}^{n-p}$  représentent respectivement les parties accessibles et non accessibles à la mesure du vecteur d'état du système. On se propose de montrer que l'on peut toujours effectuer la synthèse d'un observateur d'ordre réduit dans la mesure où la partie  $\{x_a(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \in \mathcal{R}^p$  du vecteur d'état peut être directement déterminée à partir de la mesure de la sortie du système.

*Remarque.* On montre que l'on peut toujours trouver un changement de base conduit à la réalisation d'état  $(F, G, H)$  donnée ci-dessus pour un système linéaire invariant strictement propre et observable.

**Problème 5.4** On se propose de revoir l'interprétation polynomiale d'une commande avec retour d'état basée sur un observateur et la paramétrisation des régulateurs stabilisants dans le cas des systèmes monovariabiles pour mieux apprécier les concepts sous-jacents. Pour ce faire, on procédera progressivement comme suit.

- 1) Montrer que les expressions (5.50) et (5.51) des fonctions de transfert  $\mathcal{R}_d(s)$  et  $\mathcal{R}_n(s)$  peuvent être simplifiées comme suit

$$\mathcal{R}_d(s) = \frac{\det(sI_n - F + MH + GK)}{\det(sI_n - F + MH)} \quad (5.67)$$

et

$$\mathcal{R}_n(s) = \frac{K \text{Adj}(sI_n - F) M}{\det(sI_n - F + MH)} \quad (5.68)$$

- 2) Montrer que la loi de commande peut se récrire sous la forme

$$\frac{S_{creo}(s)}{P_{cobs}(s)} U(s) + \frac{R_{creo}(s)}{P_{cobs}(s)} Y(s) = \frac{T_{cobs}(s)}{P_{cobs}(s)} U_r(s) \quad (5.69)$$

avec

$$S_{creo}(s) = \det (sI_n - F + MH + GK) \quad (5.70)$$

$$R_{creo}(s) = K \text{ Adj} (sI_n - F) M \quad (5.71)$$

$$T_{creo}(s) = \det (sI_n - F + MH) \quad (5.72)$$

Et en déduire que le polynôme caractéristique du système de commande avec retour d'état basé sur un observateur est donné par

$$P_{ccreo}(s) = A_\sigma(s)R_d(s) + B_\sigma(s)R(s) = P_{cscree}(s) P_{cobs}(s) \quad (5.73)$$

3) Montrer que l'erreur d'observation en sortie peut se mettre sous la forme polynomiale

$$\tilde{Y}(s) = \frac{A_\sigma(s)}{P_{cobs}(s)} Y(s) - \frac{B_\sigma(s)}{P_{cobs}(s)} U(s) \quad (5.74)$$

4) Montrer que la structure de la fonction de transfert de la classe des régulateurs stabilisants est donnée par

$$\mathcal{R}_r(s) = \frac{R_n(s)}{R_d(s)} = \frac{R_{creo}(s)Q_d(s) + A_\sigma(s)Q_n(s)}{S_{creo}(s)Q_d(s) - B_\sigma(s)Q_n(s)} \quad (5.75)$$

où  $Q_d(s)$  et  $Q_n(s)$  sont respectivement les polynômes des zéros et des pôles du filtre du processus d'innovation de l'observateur.

5) En déduire que le polynôme caractéristique du système de commande est particulièrement donné par

$$P_{ccreo}(s) = A_\sigma(s)R_d(s) + B_\sigma(s)R(s) = P_{cscree}(s) P_{cobs}(s) Q_d(s) \quad (5.76)$$

6) Donner un diagramme fonctionnel d'un système de commande stabilisant et préciser les atouts des régulateurs stabilisants.

**Problème 5.5** Considérons un système parfaitement décrit par les équations d'état et de sortie

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x_\sigma(t) = F_\sigma x_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + G_p v(t) \\ y(t) = H_\sigma x_\sigma(t) + E_p v(t) \end{cases} \quad (5.77)$$

où  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma)$  est une réalisation d'état commandable et observable du système, la paire  $(G_p, E_p)$  caractérise les effets des perturbations  $\{v(t)\} \in \mathbb{R}$  sur l'état et la sortie du système. On se propose d'effectuer une analyse des performances du système de commande obtenu avec une loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur donnée par

$$\text{CRÉO} \begin{cases} \rho \hat{x}_\sigma(t) = (F_\sigma - M_\sigma H_\sigma) \hat{x}_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + M_\sigma y(t) \\ u(t) = -K_\sigma \hat{x}_\sigma(t) \end{cases} \quad (5.78)$$

où le gain de commande  $K_\sigma \in \mathbb{R}^{1 \times n_\sigma}$  et le gain d'observation  $M_\sigma \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times 1}$  sont déterminés de manière à réaliser les performances requises, en l'occurrence

$$\mathcal{V}(F_\sigma - G_\sigma K_\sigma) \subset \mathcal{D}_{sp} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(F_\sigma - M_\sigma H_\sigma) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit

- 1) Donner l'équation de l'erreur d'observation et en déduire la limite de cette erreur d'observation dans le cas des perturbations du type échelon.
- 2) Montrer que le système de commande peut être décrit par la réalisation d'état

$$\left( \left( \begin{array}{cc} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & G_\sigma K_\sigma \\ 0 & F_\sigma - M_\sigma H_\sigma \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} G_p \\ G_p - M_\sigma E_p \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} K_\sigma & K_\sigma \\ H_\sigma & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ E_p \end{array} \right) \right)$$

Et en déduire qu'il est asymptotiquement stable.

- 3) Montrer que les performances d'entrée-sortie du système de commande peuvent être décrites comme suit

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{RE}(s) \\ \mathcal{RS}(s) \end{pmatrix} V(s)$$

Que représentent les fonctions de transfert  $\mathcal{RE}(s)$  et  $\mathcal{RS}(s)$ . Préciser les conditions requises pour une compensation parfaite des perturbations du type harmonique.

### Problème 5.6

# Chapitre 6

## *Compensation parfaite des perturbations*

*Le concept de commande avec retour d'état incorporant un observateur peut être ingénieusement utilisé pour réaliser une compensation admissible des perturbations. Ce chapitre est consacré à la compensation parfaite des perturbations basée sur une bonne connaissance de leur modèle générateur. Après un aperçu concis sur la modélisation des perturbations, on formule convenablement le problème de compensation parfaite des perturbations et on présente deux méthodes de synthèse de systèmes de commande avec retour d'état incorporant un observateur qui se distinguent essentiellement par le processus de compensation des perturbations adopté.*

- *La première est une méthode directe dédiée au cas où toutes les perturbations qui affectent le fonctionnement du système peuvent être ramenées en entrée. Le processus de compensation est essentiellement basé sur une estimation précise des perturbations réalisée par un observateur approprié des variables d'état du système et du modèle générateur des perturbations. La synthèse de cet observateur est faisable pourvu que la cascade constituée du générateur des perturbations et du système soit observable. Une interprétation polynomiale du système de commande permet de recouvrer le concept du modèle interne des perturbations ; en l'occurrence les pôles marginalement stables du générateur des perturbations sont des pôles du régulateur.*
- *La seconde est une méthode indirecte basée sur une pondération fréquentielle adéquate de la sortie du système. L'estimation des perturbations n'est pas nécessaire et la précision de l'observateur d'état du système n'est pas vitale pourvu que les pôles marginalement stables du générateur des perturbations soient des pôles de la pondération considérée conformément au concept de modèle interne des perturbations. La synthèse du système de commande est faisable pourvu que la cascade constituée du système et de la pondération de la sortie soit commandable.*

*Des problèmes sont proposés pour illustrer les deux processus de compensation des perturbations pour une meilleure perception des perspectives de la commande avec retour d'état incorporant un observateur pour l'ingénierie des systèmes, notamment la commande avec retour d'état dynamique incorporant un observateur si besoin est. La synthèse est particulièrement faite à partir d'une réalisation d'état du système avec des pondérations appropriées de son comportement entrée-sortie : c'est ce qui justifie la nature dynamique du retour d'état. Les pondérations sont spécifiées dans l'esprit d'une approche systématique de compensation robuste des perturbations relevant du concept du modèle interne des perturbations ([18], [40], [82], [88], [89])*

## 6.1 Modélisation des perturbations

*Le modélisation des perturbations a été largement étudié au sein des communautés d'automatique et de traitement du signal comme en témoignent les approches rationnelles et efficaces d'estimation optimale disponibles pour le filtrage, la prédiction et la commande. Ces études ont été principalement réalisées en interprétant les perturbations comme des séquences déterministes (resp. des processus stochastiques stationnaires) engendrées à partir (resp. issus de) la réponse d'un système dynamique à une impulsion d'amplitude donnée (resp. une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies).*

**Dans un contexte déterministe,** le modèle des perturbations peut être obtenu à partir de la transformée de Laplace des perturbations que l'on peut écrire comme suit

$$\mathcal{Z}(v(t)) = V(s) = \mathcal{G}_p(s) \Gamma(s) \text{ avec } \Gamma(s) = v\Delta(s) \quad (6.1)$$

avec

$$\mathcal{G}_p(s) = \text{Diag} \{ \mathcal{G}_{p1}(s), \dots, \mathcal{G}_{p\ell}(s) \} \text{ et } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_\ell \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

où  $\mathcal{G}_{pi}(s) \in \mathcal{R}(s)$  et  $v_i \in \mathcal{R}$  pour  $i = 1, \ell$  désignent les amplitudes des entrées impulsionnelles associées aux composantes des perturbations. On distingue deux cas usuels dans la pratique industrielle, i.e. les perturbations du type échelon et les perturbations du type harmonique de pulsation  $\omega_p$  connue respectivement décrites par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_p(s) = \frac{1}{s} I_\ell \text{ et } \mathcal{G}_p(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega_p^2} I_\ell \quad (6.3)$$

ou les réalisations d'état  $(F_p, G_p, H_p, E_p)$  qui leur sont associées.

**Dans un contexte stochastique,** le modèle des perturbations est généralement élaboré à partir d'une approche de modélisation expérimentale conçue en exploitant judicieusement les contributions fondamentales disponibles sur l'identification des systèmes ([40], [41], [52], [57], [61], [67], [78]). On notera que l'on peut faire l'économie du problème de réalisation en utilisant une approche d'identification basée sur un modèle d'identification du type réalisation d'état ([52], [67]). Et dans le cas scalaire, la modélisation peut être réalisée par une analyse spectrale en supposant que la séquence des perturbations est un processus stochastique stationnaire décrit par

$$v(t) = \mathcal{G}_p(\rho) \gamma(t) \quad (6.4)$$

avec

$$\mathcal{G}_p(j\omega) = \mathcal{S} \left( \left\{ v(t) \right\} \right) \quad (6.5)$$

où  $\mathcal{G}_p(s)$  est une fonction de transfert propre dont le module sur l'axe imaginaire est égal au spectre de la séquence  $\{v(t)\}$ .

## 6.2 Formulation du problème

On se propose d'étudier le problème de compensation parfaite des perturbations pour les systèmes dont le comportement d'entrée-sortie peut être raisonnablement décrit par

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x_\sigma(t) = F_\sigma x_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + G_v v(t) \\ y(t) = H_\sigma x_\sigma(t) + E_\sigma u(t) + E_v v(t) \end{cases} \quad (6.6)$$

avec

$$\text{MGP} \begin{cases} \rho x_p(t) = F_p x_p(t) + G_p \delta(t) \\ v(t) = H_p x_p(t) + E_p \delta(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

où  $\{u(t)\} \in \mathcal{R}^m$  et  $\{y(t)\} \in \mathcal{R}^p$  sont respectivement les séquences d'entrée et de sortie du système,  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma, E_\sigma) \in \mathcal{R}^{n_\sigma \times n_\sigma} \times \mathcal{R}^{n_\sigma \times m} \times \mathcal{R}^{p \times n_\sigma} \times \mathcal{R}^{p \times m}$  désigne une réalisation d'état du système associé à son état  $\{x(t)\} \in \mathcal{R}^{n_\sigma}$ ,  $\{v(t)\} \in \mathcal{R}^\ell$  représente les perturbations qui affectent son fonctionnement,  $(G_v, E_v) \in \mathcal{R}^{n_\sigma \times \ell} \times \mathcal{R}^{p \times \ell}$  caractérise les effets des perturbations sur l'état et la sortie du système et  $(F_p, G_p, H_p, E_p) \in \mathcal{R}^{n_p \times n_p} \times \mathcal{R}^{n_p \times 1} \times \mathcal{R}^{\ell \times n_p} \times \mathcal{R}^{\ell \times 1}$  est une réalisation d'état du générateur des perturbations associé à son état  $\{x_p(t)\} \in \mathcal{R}^{n_p}$ .

La remarque suivante permet de rappeler une propriété usuelle des générateurs des perturbations et d'introduire quelques notations.

**Remarque 6.1** Le système et le modèle générateur des perturbations peuvent être décrits comme suit

$$Y(s) = \mathcal{G}_u(s) U(s) + \mathcal{G}_v(s) V(s)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_u(s) &\triangleq H_\sigma \left( sI_{n_\sigma} - F_\sigma \right)^{-1} G_\sigma + E_\sigma = \frac{1}{A_\sigma(s)} B_\sigma(s) \\ \mathcal{G}_v(s) &\triangleq H_\sigma \left( sI_{n_\sigma} - F_\sigma \right)^{-1} G_v + E_v = \frac{1}{A_\sigma(s)} B_v(s) \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction de transfert du modèle générateur des perturbations est donnée par

$$\mathcal{G}_p(s) \triangleq H_p \left( sI_{n_p} - F_p \right)^{-1} G_p + E_p = \frac{1}{D_p(s)} N_p(s)$$

On notera que le modèle générateur des perturbations est marginalement stable, i.e.  $D_p(s) \in \mathcal{R}_{su}[s]$ . Le cas usuel des perturbations du type échelon (resp. des perturbations harmoniques) de la pratique industrielle confortent cet aspect puisque

$$D_p(s) = s \quad (\text{resp. } D_p(s) = s^2 + \omega_p^2)$$

Le problème du rejet asymptotique des perturbations sera particulièrement considéré dans un contexte de régulation sans aucune perte de généralité. Il consiste à réaliser les performances suivantes

$$\text{RAP} \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} y(t) = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

*Il requiert un ensemble d'hypothèses sur le système et le modèle générateur des perturbations, en l'occurrence*

$\mathcal{H}1.$   $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma, E_\sigma)$  est minimale

$\mathcal{H}2.$   $(F_p, G_p, H_p, E_p)$  est minimale

$\mathcal{H}3.$   $\mathcal{CZ}(\mathcal{G}_u(s)) \cap \mathcal{CP}(\mathcal{G}_p(s)) = \emptyset$

$\mathcal{H}1$ ,  $\mathcal{H}2$  et  $\mathcal{H}3$  sont des hypothèses nécessaires en matière de synthèse des systèmes de commande avec retour d'état réalisant une compensation parfaite des perturbations. On montrera que  $\mathcal{H}3$  est une hypothèse impérative pour l'observabilité (resp. la commandabilité) du modèle spécifique à la méthode de synthèse adoptée, en l'occurrence une cascade constituée du modèle générateur des perturbations et du système (resp. du système et de la pondération de la sortie).

### 6.3 Méthode directe

*La méthode directe a été principalement développée à partir d'une lecture acharnée et laborieuse des meilleurs supports et ouvrages pédagogiques communément adoptés pour l'enseignement de l'automatique ([7], [15], [18], [46], [82]). Si l'on succombait au charme du concept de retour d'état, on chercherait à réaliser un rejet asymptotique des perturbations avec une loi de commande avec retour d'état donnée par*

$$\mathcal{CR}\mathcal{E}\mathcal{X} \left\{ u(t) = -K_a x_a(t) \right. \quad (6.9)$$

avec

$$K_a = \begin{pmatrix} K_\sigma & K_p \end{pmatrix} \text{ et } x_a(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

*On présente progressivement le problème de synthèse associé et les solutions de compensation des perturbations aussi bien dans le cas où les variables d'état sont mesurables que dans le cas où elles ne le seraient pas. Le modèle de synthèse doit être défini à partir du vecteur d'état  $x_a(t)$ ; on précisera sa condition d'admissibilité au moment opportun.*

#### 6.3.1 Le problème de synthèse

*Une représentation d'état adéquate pour effectuer la synthèse du système de commande avec retour d'état considéré est obtenue en éliminant tout simplement les perturbations entre les équations du système (6.6) et du générateur des perturbations (6.7). On obtient le modèle de synthèse suivant qui n'est autre qu'une réalisation d'état de la cascade constituée du générateur des perturbations et du système comme le montre la figure 6.1.*

$$\mathcal{MS}\mathcal{X} \left\{ \begin{array}{l} \rho x_a(t) = F_a x_a(t) + G_a u(t) \\ y(t) = H_a x_a(t) + E_a u(t) \end{array} \right. \quad (6.11)$$

avec

$$F_a = \begin{pmatrix} F_\sigma & G_v H_p \\ 0 & F_p \end{pmatrix}, \quad G_a = \begin{pmatrix} G_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_a = \begin{pmatrix} H_\sigma & E_v H_p \end{pmatrix} \text{ et } E_a = E_\sigma \quad (6.12)$$



Ce modèle de synthèse est sous la forme d'une décomposition selon la commandabilité. Compte tenu de l'hypothèse  $\mathcal{H}1$ , les modes commandables sont ceux du système, i.e. la paire  $(F_\sigma, G_\sigma)$ , alors que les modes du générateur des perturbations ne sont pas commandables. La paire  $(F_a, G_a)$  n'est pas stabilisable puisque les modes non commandables ne sont pas asymptotiquement stables. La synthèse du système de commande avec retour d'état ne peut être alors effectuée conformément aux méthodes usuelles, notamment on ne peut pas déterminer un gain  $K_a$  qui permet d'assigner les modes du système de commande avec retour d'état dans un domaine de stabilité et de performances  $\mathcal{D}_{sp}$ . Dans ce qui suit, on montre que l'on peut développer une méthode de synthèse spécifique au cas des modes non commandables marginalement stables. On relâcherait ainsi la condition de stabilisabilité des modèles de synthèse intrinsèque à la commande avec retour d'état.

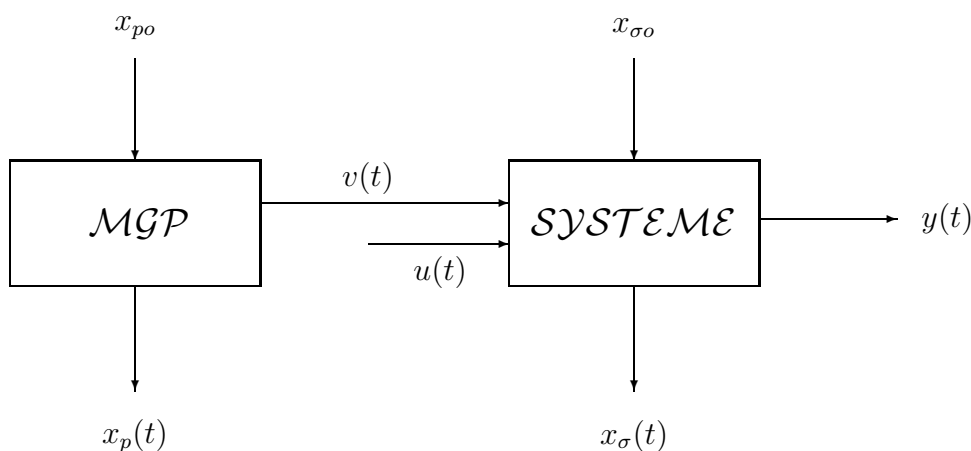


FIGURE 6.1 – Le système perturbé

### 6.3.2 Le principe de la méthode

Le système de commande constitué du modèle de synthèse (6.11)-(6.12) en contre réaction avec la loi de commande avec retour d'état (6.9)-(6.10) est décrit par

$$SC\mathcal{X} \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & G_v H_p - G_\sigma K_p \\ 0 & F_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} \\ y(t) = \begin{pmatrix} H_\sigma - E_\sigma K_\sigma & E_v H_p - E_\sigma K_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Il faut remarquer que les modes du système de commande sont constitués des modes du système de commande associé à la partie commandable, i.e. le spectre de la matrice  $F_\sigma - G_\sigma K_\sigma$  que l'on peut spécifier arbitrairement puisque la paire  $(F_\sigma, G_\sigma)$  est commandable, et des modes de la partie non commandable, i.e. le spectre de la matrice  $F_p$  qui dépend de la nature des perturbations et sur lequel on ne peut pas agir par la commande. Par ailleurs, la détermination du gain  $K_\sigma$  peut être effectuée indépendamment de celle du gain  $K_p$  puisqu'il n'a aucune influence sur la position des modes associés à la partie commandable. Cette remarque suggère une judicieuse solution en deux étapes.

- La première étape consiste à déterminer le gain  $K_p$  de manière à rendre les perturbations non observables à partir de la sortie du système de commande avec retour d'état, i.e

$$\mathcal{E}1. \quad G_v H_p - G_\sigma K_p = 0 \text{ et } E_v H_p - E_\sigma K_p = 0 \quad (6.14)$$

- La seconde étape consiste à déterminer le gain  $K_\sigma$  de manière à assigner les modes de la partie commandable dans un domaine de stabilité et de performances  $\mathcal{D}_{sp}$ , i.e.

$$\mathcal{E}2. \quad \mathcal{V}(F_\sigma - G_\sigma K_\sigma) \subset \mathcal{D}_{sp} \quad (6.15)$$

La première étape permet de découpler la partie commandable de la partie non commandable du système de commande comme le montrent ses équations d'état et de sortie.

$$SC\mathcal{X} \begin{cases} \rho x_\sigma(t) = (F_\sigma - G_\sigma K_\sigma) x_\sigma(t) \\ \rho x_p(t) = F_p x_p(t) \\ y(t) = (H_\sigma - E_\sigma K_\sigma) x_\sigma(t) \end{cases} \quad (6.16)$$

Quant à la seconde étape, elle permet de garantir la stabilité du système de commande et conclure la réalisation du rejet asymptotique des perturbations puisque

$$\mathcal{V}(F_\sigma - G_\sigma K_\sigma) \subset \mathcal{D}_{sp} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_\sigma(t) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

### 6.3.3 Une solution usuelle

Les conditions 6.14 peuvent être directement satisfaites dans le cas où toutes les perturbations qui affectent le fonctionnement du système peuvent être ramenées en entrée, soit  $(G_\sigma, E_\sigma) = (G_v, E_v)$ . En effet, le gain  $K_p = H_p$  permet de rendre l'état du système de commande insensible à toutes les variables d'état du générateur des perturbations.

Le problème de compensation asymptotique des perturbations admet donc une solution triviale dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en entrée du système tout en préservant la structure bloc diagonale de la matrice d'état du modèle de synthèse (6.11)-(6.12). On effectue pour ce faire le changement de base

$$CB\mathcal{Z} \left\{ \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_\sigma} & T_p \\ 0 & I_{n_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\sigma(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} \right. \quad (6.17)$$

$\iff$

$$CB\mathcal{Z} \left\{ \begin{pmatrix} z_\sigma(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_\sigma} & -T_p \\ 0 & I_{n_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} \right. \quad (6.18)$$

Cette transformation des variables d'état permet de récrire le modèle de synthèse sous la forme

$$MS\mathcal{Z} \begin{cases} \rho z_a(t) = F_z z_a(t) + G_z (u(t) - u_p(t)) \\ u_p(t) = -\Gamma_p z_p(t) = -\Gamma_p x_p(t) \\ y(t) = H_z z_a(t) + E_z (u(t) - u_p(t)) \end{cases} \quad (6.19)$$

avec

$$z_a(t) = \begin{pmatrix} z_\sigma(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix}$$

$$F_z = \begin{pmatrix} F_\sigma & F_\sigma T_p - T_p F_p + G_v H_p - G_\sigma \Gamma_p \\ 0 & F_p \end{pmatrix}, \quad G_z = \begin{pmatrix} G_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

$$H_z = \begin{pmatrix} H_\sigma & H_\sigma T_p + E_v H_p - E_\sigma \Gamma_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_z = E_\sigma$$

Il apparaît clairement que les perturbations peuvent être ramenées en entrée si et seulement si le système de Sylvester suivant

$$\text{SYLV} \begin{cases} H_\sigma T_p - E_\sigma \Gamma_p + E_v H_p = 0 \\ F_\sigma T_p - T_p F_p + G_v H_p - G_\sigma \Gamma_p = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

admet une solution en les matrices  $T_p \in \mathcal{R}^{n\sigma \times np}$  et  $\Gamma_p \in \mathcal{R}^{m \times np}$ . L'existence de cette solution permet d'utiliser la loi de commande avec retour d'état donnée par

$$\text{CRÉZ} \begin{cases} u(t) - u_p(t) = -\Gamma_\sigma z_\sigma(t) \end{cases} \quad (6.22)$$

ou d'une manière équivalente

$$\text{CRÉZ} \begin{cases} u(t) = -\Gamma_\sigma z_\sigma(t) - \Gamma_p z_p(t) \end{cases} \quad (6.23)$$

pour réaliser une compensation asymptotique parfaite des perturbations comme l'indiquent les équations du système de commande sous-jacent, soit

$$\text{SCZ} \begin{cases} \rho z_\sigma(t) = (F_\sigma - G_\sigma \Gamma_\sigma) z_\sigma(t) \\ \rho z_p(t) = F_p z_p(t) \\ y(t) = (H_\sigma - E_\sigma \Gamma_\sigma) z_\sigma(t) \end{cases} \quad (6.24)$$

La détermination du gain  $\Gamma_\sigma$  est possible puisque la paire  $(F_\sigma, G_\sigma)$  est commandable. Compte tenu du changement de base (6.17) qui permet de ramener les perturbations en entrée, on peut retrouver la loi de commande avec retour d'état (6.9) à partir de la loi de commande (6.23) comme suit

$$K_\sigma = \Gamma_\sigma \quad \text{et} \quad K_p = \Gamma_p - \Gamma_\sigma T_p \quad (6.25)$$

**Remarque 6.2** Le système de Sylvester n'admet pas toujours une solution en  $T_p \in \mathcal{R}^{n\sigma \times np}$  et  $\Gamma_p \in \mathcal{R}^{m \times np}$  : c'est ce qui justifie l'hypothèse d'admissibilité du modèle de synthèse  $\mathcal{H}3$ . Dans le cas des systèmes strictement propres soumis à des perturbations du type échelon, i.e.  $E_\sigma = 0$  et  $F_p = I_{np}$ , le système de Sylvester admet une solution explicite en  $K_p \in \mathcal{R}^{m \times np}$  si et seulement si le système  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma)$  n'admet aucun zéro à l'origine. Cette solution nécessite juste quelques manipulations algébriques sur le système de Sylvester que l'on peut récrire dans ce

cas comme suit

$$SYLV \begin{cases} H_\sigma T_p = -E_v H_p \\ (I_{n_\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma) T_p - G_v H_p + G_\sigma (\Gamma_p - K_\sigma T_p) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\mathcal{V} (F_\sigma - G_\sigma K_\sigma) \subset \mathcal{D}_{sp}$ , le système ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$SYLV \begin{cases} T_p = (I_{n_\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma)^{-1} (-G_\sigma K_p + G_v H_p) \\ H_\sigma T_p = H_\sigma (I_{n_\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma)^{-1} (-G_\sigma K_p + G_v H_p) = -E_v H_p \end{cases}$$

Et compte tenu du fait que le système n'a aucun zéro à l'origine, on obtient

$$K_p = (H_\sigma (I_{n_\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma)^{-1} G_\sigma)^{-1} (H_\sigma (I_{n_\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma)^{-1} G_v + E_v) H_p$$

### 6.3.4 Une solution ingénieur

Les variables d'état du système augmenté ne sont pas toujours mesurables, e.g. la connaissance des perturbations est beaucoup plus une exception qu'une règle dans la pratique, le problème de rejet asymptotique ne peut être résolu avec les lois de commande avec retour d'état (6.9) ou (6.23). On peut toutefois invoquer le principe d'équivalence certitude qui permet de remplacer les variables d'état par leurs estimées si et seulement si le modèle de synthèse (6.11)-(6.12) est détectable. Pour ce faire, on notera d'abord que si le problème (6.8) admet une solution dans le cas où toutes les variables d'état sont disponibles pour la mesure, alors le modèle de synthèse (6.19)-(6.20) peut se récrire sous la forme

$$MSZ \begin{cases} \rho z_a(t) = F_{z_a} z_a(t) + G_{z_a} u(t) \\ y(t) = H_{z_a} z_a(t) + E_{z_a} u(t) \end{cases} \quad (6.26)$$

avec

$$F_{z_a} = \begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma \Gamma_p \\ 0 & F_p \end{pmatrix}, \quad G_{z_a} = \begin{pmatrix} G_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_{z_a} = (H_\sigma \quad E_\sigma \Gamma_p) \quad \text{et} \quad E_{z_a} = E_\sigma \quad (6.27)$$

Cette forme permet d'effectuer la synthèse d'un observateur qui réaliserait une estimation consistante des variables d'état si et seulement si la paire  $(H_{z_a}, F_{z_a})$  est détectable ou d'une manière équivalente la paire  $(H_a, F_a)$  est détectable puisque les propriétés structurelles d'un système sont préservées par un changement de base.

La réalisation des performances requises peut être alors faite avec la loi de commande avec retour d'état utilisant un observateur donnée par

$$CREOZ \begin{cases} \rho \hat{z}_a(t) = F_{z_a} \hat{z}_a(t) + G_{z_a} u(t) + M_{z_a} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H_{z_a} \hat{z}_a(t) + E_{z_a} u(t) \\ u(t) = -K_a \hat{z}_a(t) \end{cases} \quad (6.28)$$

avec

$$K_{za} = \begin{pmatrix} \Gamma_\sigma & \Gamma_p \end{pmatrix} \text{ et } M_{za} = \begin{pmatrix} M_\sigma \\ M_p \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

où  $\Gamma_\sigma \in \mathcal{R}^{m \times n\sigma}$  et  $\Gamma_p \in \mathcal{R}^{m \times np}$  désignent les gains de la loi de commande avec retour d'état réalisant le  $\mathcal{RAP}$  dans le cas où les variables d'état sont mesurables et  $M_a \in \mathcal{R}^{(n\sigma+np) \times p}$  est le gain d'observation qui doit être déterminé de manière à satisfaire la propriété de stabilité asymptotique et de performances.

$$\mathcal{PSA} \quad \mathcal{V}(F_{za} - M_{za}H_{za}) \subset \mathcal{D}_{sp} \quad (6.30)$$

Cette propriété permet de réaliser une estimation consistante des variables d'état du modèle de synthèse (6.26)-(6.27), soit

$$\mathcal{ESTC} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_a(t) = 0 \text{ avec } \tilde{z}_a(t) \triangleq z_a(t) - \hat{z}_a(t) \right. \quad (6.31)$$

Le système de commande sous-jacent est alors décrit par les équations

$$\mathcal{SCREOZ} \left\{ \begin{array}{l} \rho z_a(t) = (F_{za} - G_{za}K_{za}) z_a(t) + G_{za}K_{za} \tilde{z}_a(t) \\ \rho \tilde{z}_a(t) = (F_{za} - M_{za}H_{za}) \tilde{z}_a(t) \end{array} \right. \quad (6.32)$$

Compte tenu des structures des matrices  $(F_{za} - G_{za}K_{za})$  et  $G_{za}K_{za}$ , le système de commande (6.32) peut être récrit comme suit

$$\rho \begin{pmatrix} z_\sigma(t) \\ z_p(t) \\ \tilde{z}_\sigma(t) \\ \tilde{z}_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma \Gamma_\sigma & 0 & G_\sigma \Gamma_\sigma & G_\sigma \Gamma_p \\ 0 & F_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_\sigma - M_\sigma H_\sigma & (G_\sigma - M_\sigma E_\sigma) \Gamma_p \\ 0 & 0 & -M_p H_\sigma & F_p - M_p E_\sigma \Gamma_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\sigma(t) \\ z_p(t) \\ \tilde{z}_\sigma(t) \\ \tilde{z}_p(t) \end{pmatrix}$$

Une telle décomposition montre clairement que le système de commande est asymptotiquement stable pourvu que les propriétés de stabilité (6.31) soient satisfaites. On retrouve ainsi le théorème de séparation qui représente la légitimité du principe d'équivalence certitude.

**Remarque 6.3** La condition d'admissibilité du modèle de synthèse peut être précisée à partir des conditions requises pour la synthèse du système de commande, notamment la solvabilité du système de Sylvester pour la détermination du gain du retour d'état et l'observabilité du modèle de synthèse pour la détermination du gain d'observation, i.e.

$$\left( \mathcal{SYLV} \text{ admet une solution } (T_p, \Gamma_p) \right) \text{ et } \left( (H_a, F_a) \text{ est détectable} \right)$$

Le système de Sylvester admet génériquement une solution pourvu qu'il n'y ait pas de simplification entre les zéros du système et les pôles du générateur des perturbations ([82]), on retrouve ainsi l'hypothèse  $\mathcal{H3}$ . On notera vigoureusement que les hypothèses  $\mathcal{H1}$ ,  $\mathcal{H2}$  et  $\mathcal{H3}$  permettent de conclure l'observabilité du modèle de synthèse conformément aux résultats 3.33 et 3.36.

### 6.3.5 Une interprétation polynomiale

Une interprétation importante du concept de rejet asymptotique des perturbations peut être obtenue à partir d'une analyse de la fonction de transfert du régulateur sous-jacent. En effet, la loi de commande (6.28)-(6.29) peut se mettre sous la forme simplifiée

$$\text{CREOZ} \begin{cases} \rho \hat{z}_\sigma(t) = (F_\sigma - G_\sigma \Gamma_\sigma) \hat{z}_\sigma(t) + M_\sigma (y(t) - H_{z\sigma} \hat{z}_\sigma(t)) \\ \rho \hat{z}_p(t) = F_p \hat{z}_p(t) + M_p (y(t) - H_{z\sigma} \hat{z}_\sigma(t)) \\ u(t) = -\Gamma_\sigma \hat{z}_\sigma(t) - \Gamma_p \hat{z}_p(t) \end{cases} \quad (6.33)$$

avec

$$H_{z\sigma} = H_\sigma - E_\sigma \Gamma_\sigma \quad (6.34)$$

En appliquant la transformée de Laplace à la loi de commande (6.33)-(6.34) ainsi obtenue tout en considérant que les conditions initiales sont nulles, on obtient

$$U(s) = -\Gamma_\sigma \hat{Z}_\sigma(s) - \Gamma_p \hat{Z}_p(s)$$

avec

$$\hat{Z}_\sigma(s) = (sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma \Gamma_\sigma + M_{z\sigma} H_{z\sigma})^{-1} M_\sigma Y(s)$$

$$\hat{Z}_p(s) = (sI_{np} - F_p)^{-1} M_p (I_p - H_{z\sigma} (sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma \Gamma_\sigma + M_\sigma H_{z\sigma})^{-1} M_\sigma) Y(s)$$

ou d'une manière équivalente

$$U(s) = -(\mathcal{R}_{creo}(s) + \mathcal{R}_{comp}(s)) Y(s)$$

avec

$$\mathcal{R}_{creo}(s) \triangleq \Gamma_\sigma (sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma \Gamma_\sigma + M_\sigma H_{z\sigma})^{-1} M_\sigma$$

$$\mathcal{R}_{comp}(s) \triangleq \Gamma_p (sI_{np} - F_p)^{-1} M_p (I_p - H_{z\sigma} (sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma \Gamma_\sigma + M_\sigma H_{z\sigma})^{-1} M_\sigma)$$

On notera que  $\mathcal{R}_{creo}(s)$  n'est autre que le régulateur issu de la commande avec retour d'état incorporant un observateur en l'absence des perturbations et que  $\mathcal{R}_{comp}(s)$  est la composante du régulateur qui permet de réaliser la compensation parfaite des perturbations, comme l'indique la figure 6.2. Cette composante peut être interprétée comme un filtre réalisant une estimation consistante des perturbations ramenées en entrée à partir de la sortie du système.

Rappelons que cette interprétation est intrinsèque à la méthode directe dont la viabilité dépend de la possibilité de pouvoir ramener toutes les perturbations en entrée du système et de la possibilité de concevoir un observateur réalisant une estimation conjointe précise des variables d'état du système et du générateur des perturbations.

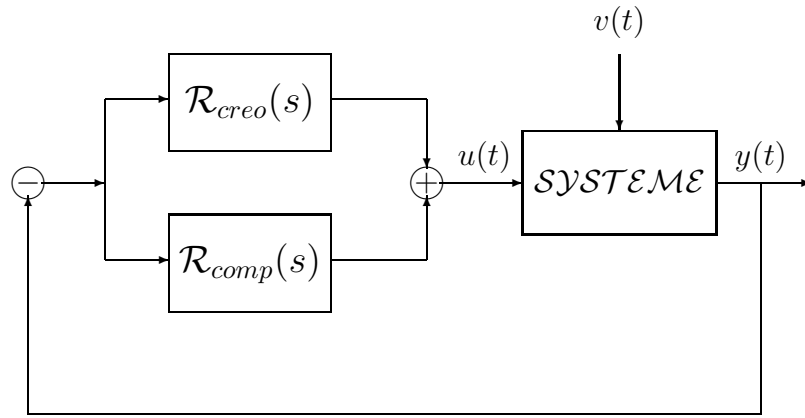


FIGURE 6.2 – Système de commande avec rejet asymptotique des perturbations

**Remarque 6.4** Après quelques manipulations algébriques triviales, on peut récrire la loi de commande sous la forme

$$S(s)D_p(s)U(s) = -R(s)Y(s)$$

avec

$$S(s) \triangleq \det(sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma\Gamma_\sigma + M_\sigma H_{z\sigma})$$

$$R(s) \triangleq D_p(s)R_1(s) + \Gamma_p \text{Adj}(sI_{np} - F_p) M_p (S(s)I_{np} - R_2(s))$$

où  $R_1(s)$  et  $R_2(s)$  sont des matrices polynomiales respectivement données par

$$R_1(s) \triangleq \Gamma_\sigma \text{Adj}(zI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma\Gamma_\sigma + M_\sigma H_{z\sigma}) M_\sigma$$

et

$$R_2(s) \triangleq H_{z\sigma} \text{Adj}(sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma\Gamma_\sigma + M_\sigma H_{z\sigma}) M_\sigma$$

Les pôles du modèle générateur des perturbations sont des pôles du régulateur : on retrouve le concept du modèle interne des perturbations qui est au coeur des méthodes de synthèse réalisant une compensation des perturbations ([82]).

**Remarque 6.5** Bien que le problème de compensation parfaite des perturbations ait été traité dans un contexte de régulation, on peut en déduire aisément que le système de commande avec retour unitaire sous-jacent permet de réaliser une précision maximale pour des séquences de référence de même nature que les perturbations.

## 6.4 Méthode indirecte

La méthode indirecte est une émanation du concept de modèle interne via une pondération appropriée de la sortie du système. La pierre d'achoppement de cette méthode est la loi de commande avec retour d'état utilisant une pondération appropriée de la sortie du système, avec un observateur d'état du système si besoin est, comme l'indiquent les figures 6.3 et 6.4.

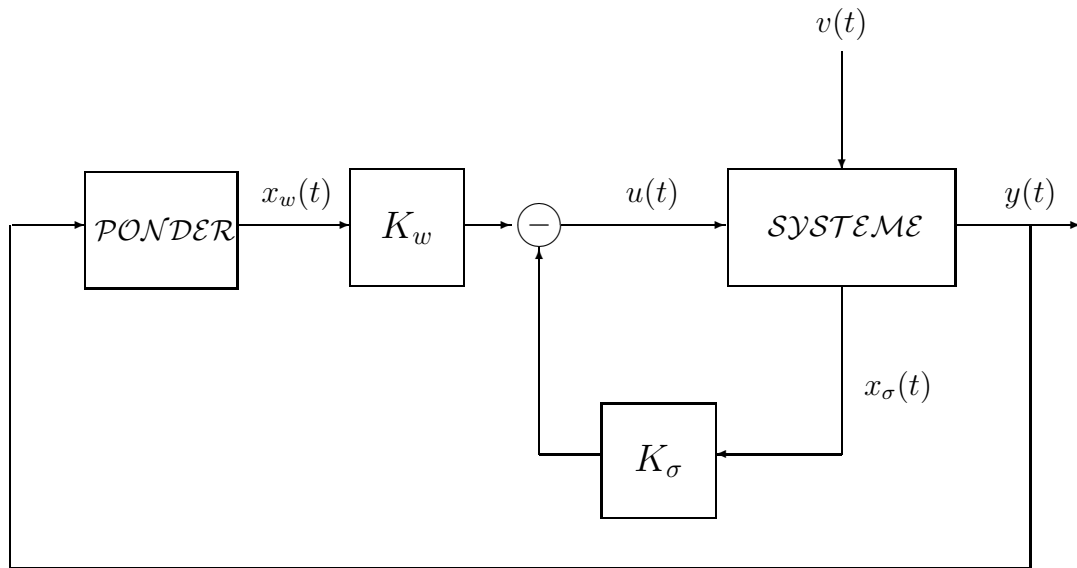


FIGURE 6.3 – Rejet asymptotique des perturbations : cas des variables d'état mesurables

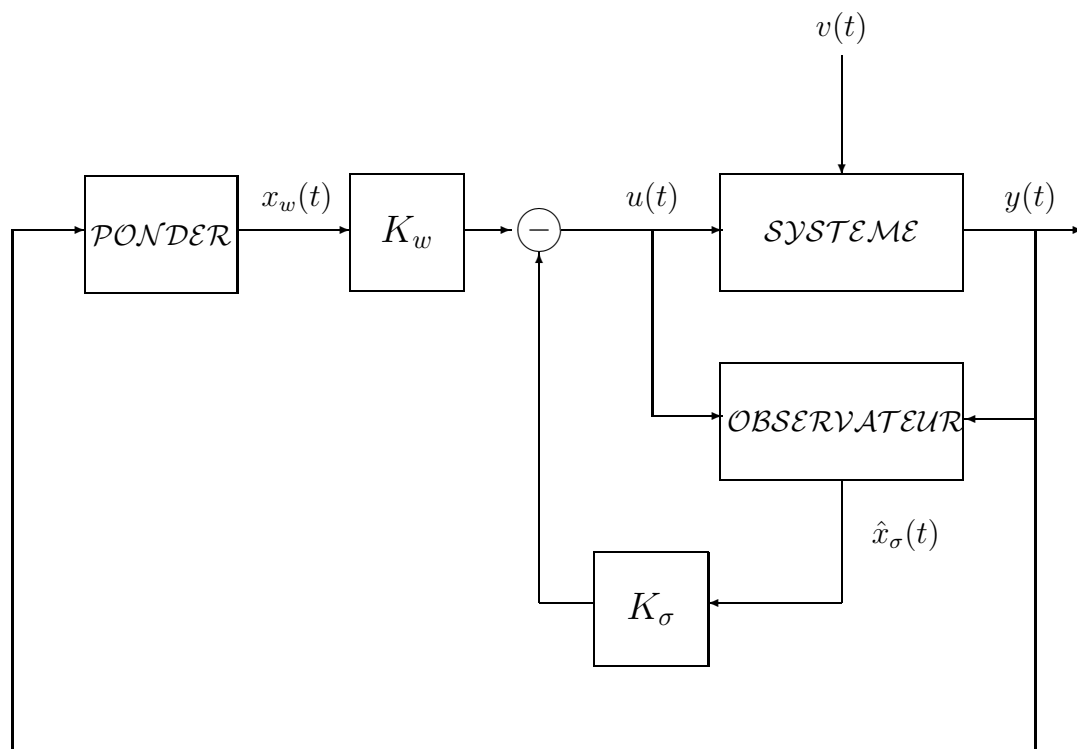


FIGURE 6.4 – Rejet asymptotique des perturbations : cas des variables d'état non mesurables



La pondération de la sortie est spécifiée conformément au concept du modèle interne des perturbations : les pôles de la pondération sont les mêmes que ceux du modèle générateur des perturbations. Elle peut être décrite par une réalisation d'état

$$\mathcal{POND} \begin{cases} \rho x_w(t) = F_w x_w(t) + G_w y(t) \\ y_w(t) = x_w(t) \end{cases} \quad (6.35)$$

La paire  $(F_w, G_w)$  est spécifiée en fonction de la nature des perturbations et des conditions requises pour la synthèse du système de commande avec retour d'état du système incorporant une pondération de la sortie, i.e. la détermination des gains  $K_\sigma \in \mathcal{R}^{m \times n\sigma}$  et  $K_w \in \mathcal{R}^{m \times n_w}$ . Le  $\mathcal{RAP}$  est réalisé pourvu que la matrice d'état de la pondération soit spécifiée de manière à satisfaire la propriété suivante

$$SPPS1 \left\{ \det(sI_{n_w} - F_w) = \det(sI_{n_p} - F_p) \right. \quad (6.36)$$

Quant à la détermination des gains de la loi de commande avec retour d'état sous-jacente, elle dépend de la propriété de commandabilité de la cascade composée du système et de la pondération de la sortie comme le montre la figure 6.5. La représentation d'état de cette cascade constitue le modèle de synthèse. On présente dans ce qui suit la méthode indirecte à partir d'une lecture agréable des enseignements de l'école d'automatique australienne ([4], [40], [65]) après une lecture laborieuse de l'ouvrage de Wonham : le maître à penser du concept de modèle interne ([82]).

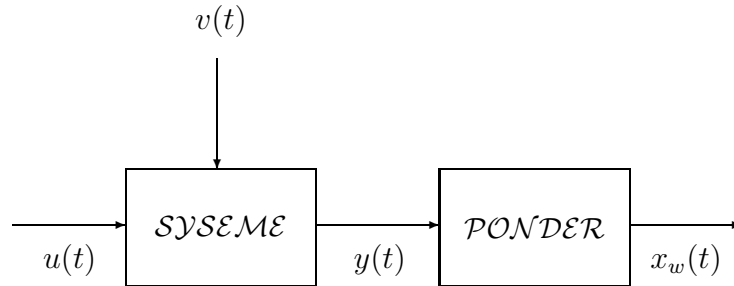


FIGURE 6.5 – Modèle de synthèse

### 6.4.1 Le modèle de synthèse

Le modèle de synthèse est celui de la cascade composée du système et de la pondération de la sortie comme le montre la figure 6.5. Il peut être facilement obtenu à partir de leurs équations d'état respectives, i.e. (6.6) et (6.35), en tenant compte de l'équation de sortie du système, soit

$$\mathcal{MS} \begin{cases} \rho x_a(t) = F_a x_a(t) + G_{au} u(t) + G_{av} v(t) \\ y(t) = H_a x_a(t) + E_v v(t) + E_\sigma u(t) \end{cases} \quad (6.37)$$

avec

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

$$F_a = \begin{pmatrix} F_\sigma & 0 \\ G_w H_\sigma & F_w \end{pmatrix}, G_{au} = \begin{pmatrix} G_\sigma \\ G_w E_\sigma \end{pmatrix}, G_{av} = \begin{pmatrix} G_v \\ G_w E_v \end{pmatrix} \text{ et } H_a = \begin{pmatrix} H_\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Ce modèle peut être utilisé pour la synthèse d'un système de commande avec retour d'état. Dans le cas d'un assignement arbitraire des modes du système de commande, la condition d'admissibilité du modèle de synthèse est

$\mathcal{H}3$ . La paire  $(F_a, G_{au})$  est commandable

Cette propriété requiert que la pondération et le système soient commandables, autrement leurs modes non commandables seraient aussi des modes non commandables de la cascade. La spécification de la pondération doit être alors faite de manière à satisfaire cette exigence de synthèse, en l'occurrence

$$SPPS2 \{ (F_w, G_w) \text{ est commandable} \} \quad (6.40)$$

Et compte tenu de l'hypothèse d'observabilité  $\mathcal{H}2$  du modèle générateur des perturbations et des conditions de synthèse (6.36) et (6.40), on peut spécifier la pondération de la sortie comme suit

$$SPS \{ (F_w, G_w, I_{nw}) = (F_p^T, H_p^T, I_{np}) \} \quad (6.41)$$

Ainsi la pondération est bien commandable et admet la même configuration des pôles que celle du modèle générateur des perturbations puisque

$$\left( (H_p, F_w) \text{ est observable} \right) \implies \left( (F_p^T, H_p^T) \text{ est commandable} \right)$$

et

$$\det \left( sI_{np} - F_p^T \right) = \det \left( \left( sI_{np} - F_p \right)^T \right) = \det \left( sI_{np} - F_p \right)$$

Rappelons que les conditions de commandabilité de la pondération de la sortie et du système sont nécessaires mais elles ne sont pas suffisantes pour la commandabilité du modèle de synthèse. En effet, la commandabilité de la cascade dépend des éventuelles simplifications entre les pôles de la pondération de la sortie et les zéros du système comme l'indiquent les résultats 3.33 et 3.36 : c'est la motivation de l'hypothèse  $\mathcal{H}3$ .

**Remarque 6.6** Le résultat fondamental sur la décomposition selon l'observabilité à partir de la sortie du système permet de conclure que les modes de la pondération de la sortie ne sont pas observables. Et comme ces modes ne sont pas asymptotiquement stables, le modèle de synthèse n'est pas détectable. C'est pourquoi, l'observation ne porte que sur le système qui est supposé observable.

## 6.4.2 Commande avec retour d'état

La loi de commande avec retour d'état incorporant une pondération de la sortie utilisée dans le système de commande de la figure 6.3 est donnée par

$$\mathcal{CR\mathcal{E}S\mathcal{F}} \left\{ u(t) = -K_a x_a(t) = - \begin{pmatrix} K_\sigma & K_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix} \right. \quad (6.42)$$

La description du système de commande correspondant est obtenue en éliminant le signal de commande entre les équations de la loi de commande avec retour d'état incorporant une pondération de la sortie (6.42) et celles du modèle de synthèse (6.37), soit

$$\mathcal{SCPS} \left\{ \begin{aligned} \rho \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & -G_\sigma K_w \\ H_p^T (H_\sigma - E_\sigma K_\sigma) & F_p^T - H_p^T E_\sigma K_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} G_p \\ H_p^T E_v \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} H_\sigma - E_\sigma K_\sigma & -E_\sigma K_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix} + E_v v(t) \end{aligned} \right. \quad (6.43)$$

Si le modèle de synthèse est commandable, alors il est possible de déterminer les gains de retour d'état  $K_\sigma$  et de retour de sortie pondérée  $K_w$  de manière à garantir la stabilité asymptotique du système de commande avec des performances adéquates, soit

$$\mathcal{SPSCRE} \quad \mathcal{V} \left( \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & -G_\sigma K_w \\ H_p^T (H_\sigma - E_\sigma K_\sigma) & F_p^T - H_p^T E_\sigma K_w \end{pmatrix} \right) \subset \mathcal{D}_{sp} \quad (6.44)$$

où  $\mathcal{D}_{sp}$  désigne un domaine de stabilité et de performances spécifiée à partir du cahier des charges. Cette synthèse peut être effectuée en adoptant une approche modale qui consiste à résoudre, en le gain  $K_a = \begin{pmatrix} K_\sigma & K_w \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times na}$ , l'équation algébrique

$$\det \left( sI_{na} - F_a + G_a K_a \right) = \prod_{i=1}^{na} (s - m_{ci}) \quad (6.45)$$

avec

$$m_{ci} \in \mathcal{D}_{sp} \text{ pour tout } i \in [1, na] \text{ et } na = n\sigma + np$$

Le résultat suivant constitue la pierre d'achoppement de la méthode indirecte, en l'occurrence la compensation parfaite des perturbations.

**Résultat 6.1** *Considérons le système de commande avec retour d'état de la figure 6.3 et supposons que le système est décrit par les équations (6.6)-(6.7) et que les hypothèses  $\mathcal{H}1$ ,  $\mathcal{H}2$  et  $\mathcal{H}3$  sont satisfaites. Alors le système de commande réalise une compensation parfaite des perturbations, conformément à l'objectif (6.8), pourvu que la spécification de la pondération de la sortie et la détermination des gains de retour d'état  $K_\sigma$  et de retour de sortie pondérée  $K_w$  soient conformes aux exigences d'une synthèse admissible, i.e. les conditions (6.36), (6.40) et (6.44).*

**Preuve.** *Compte tenu des conditions (6.36), (6.40) et (6.44), on aura un système de commande asymptotiquement stable. On peut alors en déduire aisément que la réalisation d'état  $(F_p^T, H_p^T, K_w)$  de la cascade constituée de la pondération de la sortie et du gain de retour de sortie pondérée est minimale. La fonction de transfert correspondante est alors irréductible et*

peut se récrire comme suit

$$K_w (sI_{np} - F_p^T)^{-1} H_p^T = (D_w(s)I_{nw})^{-1} N_w(s) = (D_p(s)I_p)^{-1} N_p(s) \quad (6.46)$$

Il est important de noter à ce niveau que les matrices polynomiales  $N_w(s)$  et  $D_p(s)I_{np}$  sont premières entre elles. Cette remarque est la pierre d'achoppement de la preuve. En effet, si l'on opère par  $D_p(\rho)$  sur les deux membres de l'équation d'état du système de commande (6.43) en tenant compte de la vraisemblance entre les entrées impulsionnelles et les conditions initiales, on obtient

$$D_p(\rho) \rho \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & -G_\sigma K_w \\ H_p^T (H_\sigma - E_\sigma K_\sigma) & F_p^T - H_p^T E_\sigma K_f \end{pmatrix} D_p(\rho) \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix}$$

$$D_p(\rho)y(t) = \begin{pmatrix} H_\sigma - E_\sigma K_\sigma & -E_\sigma K_w \end{pmatrix} D_p(\rho) \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \end{pmatrix}$$

La stabilité asymptotique du système de commande permet de conclure aisément que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_p(\rho)y(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} N_p(\rho)y(t) = D_p(\rho)x_w(t) = 0$$

Et comme les matrices  $N_p(\rho)$  et  $D_p(\rho)I_{np}$  sont premières entre elles, il existe deux matrices  $E_p(\rho)$  et  $F_p(\rho)$  telles que

$$D_p(\rho)E_p(\rho) + N_p(\rho)F_p(\rho) = I_{np}$$

On aura alors la propriété suivante

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_p(\rho) (D_p(\rho)y(t)) + F_p(\rho) (N_p(\rho)y(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(t)$$

qui permet de conclure

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

CQFD.

### 6.4.3 Commande avec retour de sortie

Si les variables d'état ne sont pas accessibles à la mesure, on peut utiliser un observateur comme l'indique la figure 6.4 puisque le système est observable. La loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur et une pondération de la sortie utilisée dans le système de commande de la figure 6.4 est donnée par

$$CREOPS \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}_\sigma(t) = F_\sigma \hat{x}_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + M_\sigma (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H_\sigma \hat{x}_\sigma(t) + E_\sigma u(t) \\ u(t) = -K_\sigma \hat{x}_\sigma(t) - K_w x_w(t) \end{array} \right. \quad (6.47)$$

Comme le système est observable, on peut déterminer le gain d'observation  $M_\sigma \in \mathcal{R}^{n_\sigma \times p}$  de manière à réaliser une dynamique d'observation conforme aux exigences de stabilité et des performances requises, i.e.

$$SPOBS \quad \mathcal{V}(F_\sigma - M_\sigma H_\sigma) \subset \mathcal{D}_s \quad (6.48)$$

En effet, il existe un gain d'observation  $M_\sigma \in \mathcal{R}^{n_\sigma \times p}$  qui vérifie l'équation

$$\det \left( sI_{n_\sigma} - F_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right) = \prod_{i=1}^{n_\sigma} \left( z - m_{oi} \right) \quad (6.49)$$

avec

$$m_{oi} \in \mathcal{D}_{sp} \text{ pour tout } i \in [1, n_\sigma]$$

Il faut remarquer que l'observation considérée est biaisée et que le biais est de même nature que les perturbations comme le montre l'équation de l'erreur d'observation

$$\rho \tilde{x}_\sigma(t) = (F_\sigma - M_\sigma H_\sigma) \tilde{x}_\sigma(t) + (G_v - M_\sigma E_v) v(t)$$

En substituant la loi de commande sous-jacente (6.47) dans l'équation d'état du modèle de synthèse (6.39), on obtient l'équation

$$\rho x_a(t) = F_a x_a(t) + G_{au} (-K_\sigma \hat{x}_\sigma(t) - K_w x_w(t)) + G_{av} v(t)$$

que l'on peut récrire en fonction de l'état du système et de l'erreur d'observation associée comme suit

$$\rho x_a(t) = F_a x_a(t) - G_{au} K_\sigma x_\sigma(t) - G_{au} K_w x_w(t) + G_{au} K_\sigma \tilde{x}_\sigma(t) + G_{av} v(t)$$

Le comportement d'entrée-sortie du système de commande est alors donnée par les équations d'état et de sortie données ci dessous.

$$\rho \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \\ \tilde{x}_\sigma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & -G_\sigma K_w & G_\sigma K_\sigma \\ H_p^T (H_\sigma - E_\sigma K_\sigma) & F_p^T - H_p^T E_\sigma K_w & 0 \\ 0 & 0 & F_\sigma - M_\sigma H_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \\ \tilde{x}_\sigma(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_v \\ H_p^T E_v \\ G_v - M_\sigma E_v \end{pmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} H_\sigma - E_\sigma K_\sigma & -E_\sigma K_w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_w(t) \\ \tilde{x}_\sigma(t) \end{pmatrix} + E_v v(t)$$

Et compte tenu de la structure de la matrice d'état de ce système de commande, le polynôme caractéristique correspondant est donné par

$$P_c(s) = \det \left( sI_{n_a} - F_a + G_a K_a \right) \det \left( sI_{n_\sigma} - F_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right) \quad (6.50)$$

On retrouve le théorème de séparation qui stipule que le système de commande est asymptotiquement stable si et seulement si le système avec commande avec retour d'état et l'observateur

sous-jacents sont asymptotiquement stable. Comme les gains de commande avec retour d'état et d'observation sont déterminés conformément aux performances requises, le système de commande héritera de la même propriété puisque  $P_c(s) \in \mathcal{D}_{sp}$ .

Le résultat suivant montre que l'utilisation d'un observateur ne remet pas en cause les performances du système de commande avec retour d'état sous-jacent en matière de compensation parfaite des perturbations au sens des performances (6.8).

**Résultat 6.2** Le système de commande avec retour d'état de la figure 6.4 préserve les performances réalisées par le système de commande avec retour d'état incorporant une pondération de la sortie sous-jacent, en l'occurrence une compensation parfaite des perturbations au sens des performances (6.8), pourvu que la synthèse de l'observateur sous-jacent soit effectuée conformément à la propriété 6.48.

**Preuve.** Si l'on prend la transformée en  $z$  des membres des trois équations de la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur et une pondération de la sortie (6.47) tout en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient

$$U(s) = -K_\sigma \hat{X}_\sigma(s) - K_w X_w(s)$$

avec

$$\left( sI_{np} - F_p^T \right) X_w(s) = H_p^T Y(s)$$

$$\left( sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right) \hat{X}_\sigma(s) = -G_\sigma K_w X_w(s) + M_\sigma Y(s)$$

Et donc

$$X_w(s) = \left( sI_{np} - F_p^T \right)^{-1} H_p^T Y(s)$$

$$X_\sigma(s) = \left( sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right)^{-1} M_\sigma Y(s)$$

$$+ \left( sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right)^{-1} G_\sigma K_w \left( sI_{np} - F_p^T \right)^{-1} H_p^T Y(s)$$

soit

$$U(s) = - \left( \mathcal{R}_1(s) + \mathcal{R}_2(s) + \mathcal{R}_3(s) \right) Y(s)$$

avec

$$\mathcal{R}_1(s) = K_\sigma \left( sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right)^{-1} M_\sigma$$

$$\mathcal{R}_2(s) = - K_\sigma \left( sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma \right)^{-1} G_\sigma K_w \left( sI_{np} - F_p^T \right)^{-1} H_p^T$$

$$\mathcal{R}_3(s) = K_w \left( sI_{np} - F_p^T \right)^{-1} H_p^T$$

Et compte tenu de ces expressions, on obtient

$$U(s) = -\mathcal{R}(s)Y(s)$$

avec

$$\mathcal{R}(s) = \begin{pmatrix} K_\sigma & K_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_{u\sigma}K_\sigma + M_\sigma H_\sigma & G_{u\sigma}K_w \\ 0 & sI_{n_p} - F_p^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_\sigma \\ H_p^T \end{pmatrix}$$

Le régulateur peut alors se mettre sous la forme

$$\mathcal{R}(s) = \frac{R(s)}{S(s)D_p(s)}$$

avec

$$S(s) = \det(sI_{n_p} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma)$$

$$R(s) = \begin{pmatrix} K_\sigma & K_w \end{pmatrix} \text{Adj} \begin{pmatrix} sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma & G_\sigma K_w \\ 0 & sI_{n_p} - F_p^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_\sigma \\ H_p^T \end{pmatrix}$$

Il apparaît clairement que la dynamique des perturbations est bien incorporée dans le régulateur conformément au concept du modèle interne pour la compensation des perturbations. Le système de commande réalise les performances requises d'une manière robuste : la compensation asymptotique des perturbations est satisfaite indépendamment des erreurs de modélisation pourvu que la stabilité du système de commande soit préservée.

*CQFD.*

**Remarque 6.7** Bien que le problème de compensation parfaite des perturbations ait été traité dans un contexte de régulation, on peut en déduire aisément que le système de commande avec retour unitaire sous-jacent permet de réaliser une précision maximale pour des séquences de référence de même nature que les perturbations.

## 6.5 Le retour d'état dynamique

Les deux méthodes de synthèse considérées ont conduit au même résultat : le rejet asymptotique des perturbations est faisable pourvu que les pôles du modèle générateur des perturbations soient des pôles du régulateur. Un tel aspect peut être obtenu directement en procédant à une pondération adéquate du comportement d'entrée-sortie du système comme le montre la figure 6.6.

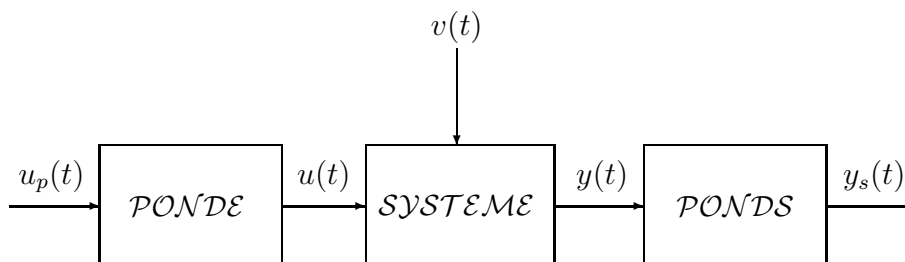


FIGURE 6.6 – Pondération du comportement d'entrée-sortie

On distingue une pondération en entrée et une pondération en sortie dont la spécification est faite de manière à réaliser un compromis admissible performances-robustesse ([42], [?], [88], [89]). La synthèse du système de commande est effectuée à partir du modèle correspondant au comportement entrée-sortie pondéré, soit celui du système dynamique constitué successivement de la pondération en entrée, du système et de la pondération en sortie, comme l'indique la figure 6.6, que l'on peut respectivement décrire par les représentations d'état suivantes

$$\text{PONDE} \begin{cases} \rho x_e(t) = F_e x_e(t) + G_e u_p(t) \\ u(t) = H_e x_e(t) + E_e u_p(t) \end{cases}$$

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x_\sigma(t) = F_\sigma x_\sigma(t) + G_\sigma u(t) \\ y(t) = H_\sigma x_\sigma(t) \end{cases}$$

et

$$\text{PONDS} \begin{cases} \rho x_s(t) = F_s x_s(t) + G_s y(t) \\ y_p(t) = H_s x_s(t) + E_s y(t) \end{cases}$$

Ce modèle de synthèse peut être alors décrit par les équations d'état et de sortie

$$\text{MODS} \begin{cases} \rho x_a(t) = F_a x_a(t) + G_a u_w(t) \\ y_p(t) = H_a x_a(t) \end{cases} \quad (6.51)$$

où  $(F_a, G_a, H_a)$  désigne la réalisation d'état du modèle de synthèse correspondante au vecteur d'état augmenté  $x_a(t)$ , soit

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_e(t) \\ x_s(t) \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

$$F_a = \begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma H_e & 0 \\ 0 & F_e & 0 \\ G_s H_\sigma & 0 & F_s \end{pmatrix}, \quad G_a = \begin{pmatrix} G_\sigma E_e \\ G_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_a = (E_s H_\sigma \quad 0 \quad H_s) \quad (6.53)$$

La synthèse est faisable pourvu que la réalisation  $(F_a, G_a, H_a)$  soit stabilisable et détectable. Cette synthèse est naturellement faite à partir de la loi de commande avec retour d'état

$$u_p(t) = -K_a x_a(t) = (K_\sigma \quad K_e \quad K_s) \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_e(t) \\ x_s(t) \end{pmatrix}$$

qui conduit au système de commande avec retour d'état de figure 6.7. Ce dernier peut être naturellement décrit par la représentation d'état d'ordre  $n_a = n_\sigma + n_e + n_s$  donnée par

$$\text{SCRE} \begin{cases} \rho x_a(t) = (F_a - G_a K_a) x_a(t) \\ y_p(t) = H_a x_a(t) \end{cases}$$



On notera que le système de commande avec retour d'état réalise les performances dynamiques requises si le gain de commande  $K_a$  est déterminée de manière à satisfaire la propriété  $\mathcal{V}(F_a - G_a K_a) \subset \mathcal{D}_{sp}$ .

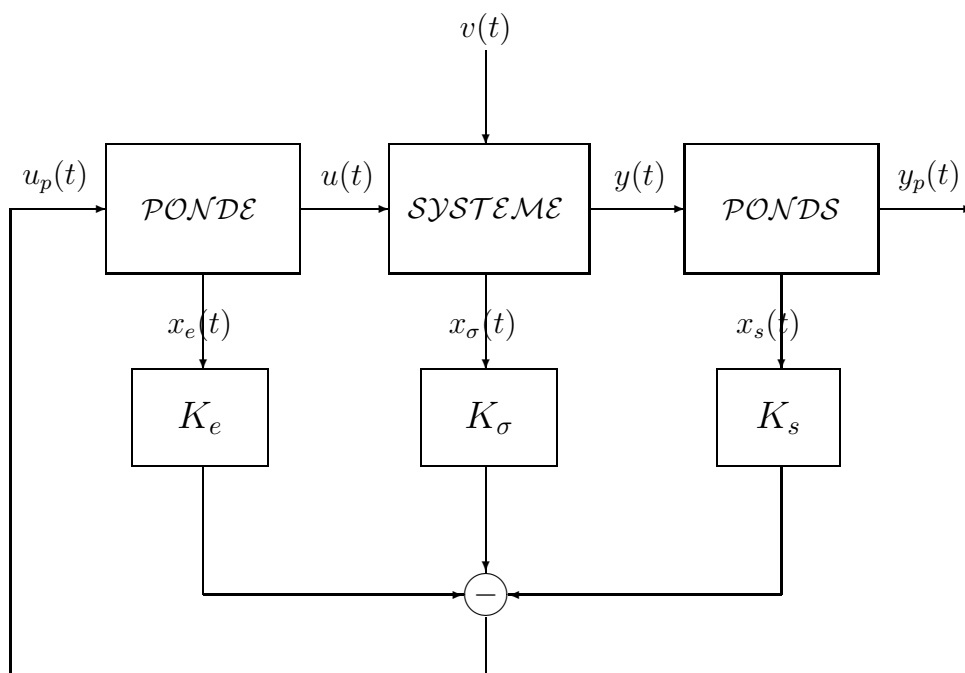


FIGURE 6.7 – Système de commande avec retour d'état dynamique

Les deux remarques suivantes soulignent le caractère dynamique du retour d'état considéré et sa mise en oeuvre si les variables d'état ne sont pas mesurables.

**Remarque 6.8** La commande effective du système est un retour dynamique sur l'état du système donné par

$$U(s) = -K(s)X_\sigma(s)$$

avec

$$K(s) = (H_e - E_e K_e) (sI_{n_e} - F_e + G_e K_e)^{-1} (G_e K_\sigma + G_e K_s (sI_{n_s} - F_s)^{-1} G_s H_\sigma) \\ + E_e (K_s (sI_{n_s} - F_s)^{-1} G_s H_\sigma + K_\sigma)$$

Le choix des pondérations d'entrée et de sortie doit se faire de manière à réaliser un modelage adéquat de la fonction de transfert en boucle ouverte afin de garantir une bonne robustesse en stabilité du système de commande avec une compensation parfaite des perturbations au sens des performances (6.8).

**Remarque 6.9** Si les variables d'état du modèle de synthèse (6.51)-(6.53) ne sont pas accessibles à la mesure, on peut utiliser une loi de commande basée sur un observateur si et seulement si la paire  $(H_a, F_a)$  est détectable, soit

$$\text{CRÉO} \begin{cases} \rho x_s(t) = F_s x_s(t) + G_s y(t) \\ \rho \hat{x}_a(t) = (F_a - M_a M_a) \hat{x}_a(t) + G_a u_p(t) + M_a (E_s y(t) + H_s x_s(t)) \\ u_p(t) = -K_a \hat{x}_a(t) \end{cases}$$

où  $M_a \in \mathcal{R}^{n_a \times p}$  est le gain d'observation que l'on détermine de manière à réaliser la stabilité et les performances de l'observateur, en l'occurrence

$$\mathcal{V}(F_a - M_a H_a) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

On montre aisément que la fonction de transfert du régulateur est donnée par

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{F}_s(s) \mathcal{R}_a(s) \mathcal{R}_e(s)$$

où  $\mathcal{R}_a(s)$  désigne la matrice de transfert du régulateur conçu à partir du modèle de synthèse (6.51)-(6.53). La figure 6.8 montre le système de commande correspondant. On réalise aisément qu'il incorpore bien les dynamiques des pondérations d'entrée-sortie considérés et peut ainsi garantir un rejet de toutes les perturbations dont les dynamiques sont partiellement contenues dans celles des pondérations.

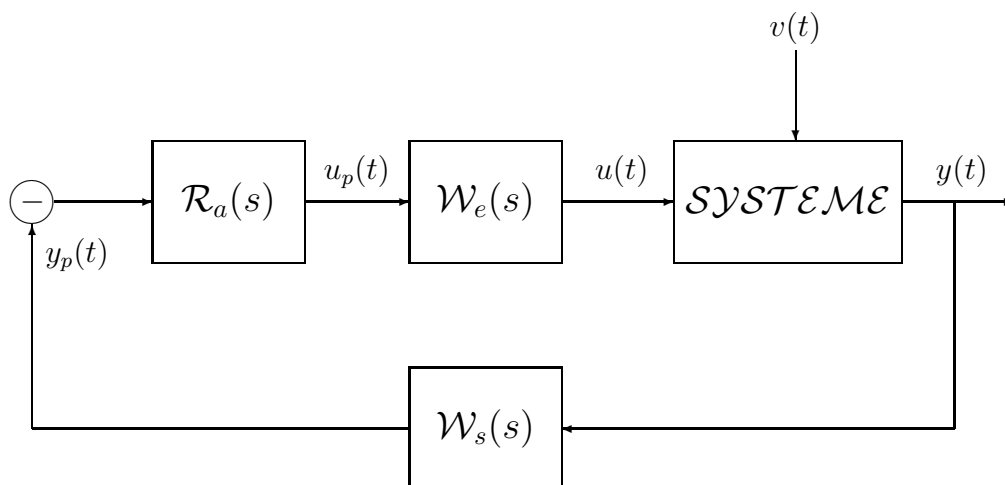


FIGURE 6.8 – Système de commande avec pondérations fréquentielles

La loi de commande avec retour d'état dynamique donnée par la figure 6.7 requiert que la pondération en entrée soit inversible. Cette condition peut être au travers une mise en oeuvre appropriée comme l'indique la figure 6.9. Par ailleurs la loi de commande avec retour d'état dynamique incorporant un observateur réalisant une estimation conjointe des variables d'état du système et des pondérations nécessite que la cascade constituée du système et des pondérations soit détectable. Une telle condition peut être relâchée si le processus d'estimation ne concerne sur les variables d'état du système comme l'indique la figure 6.10.

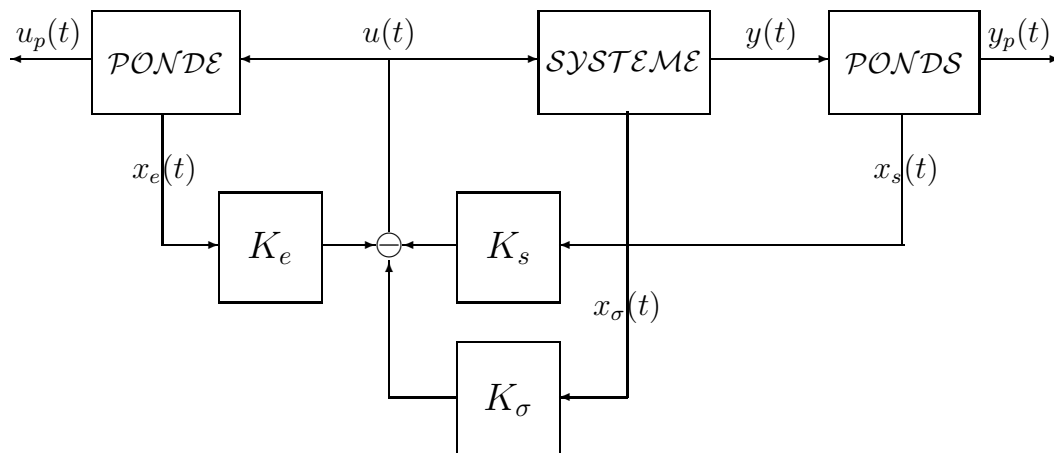


FIGURE 6.9 – Système de commande avec retour d'état dynamique

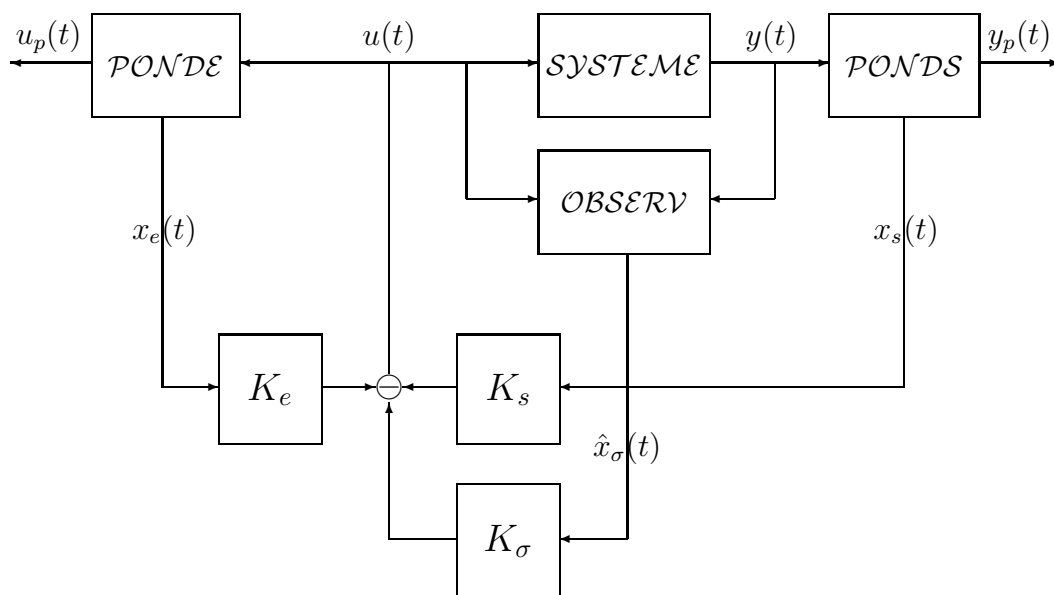


FIGURE 6.10 – Système de commande avec retour d'état dynamique incorporant un observateur

## 6.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au problème de la compensation parfaite des perturbations dont le modèle générateur est connu en exploitant judicieusement les concepts de commande avec retour d'état incorporant un observateur et du modèle interne. Deux méthodes ont été présentées pour ce faire modulo un focus sur le retour d'état dynamique. La première est principalement basée sur une observation précise des perturbations ramenées en entrée alors que la seconde utilise une pondération de la sortie sous la bénédiction du concept de modèle interne des perturbations. Ceci a permis de relâcher les exigences de précision en matière d'observation dans le contexte de la commande des systèmes et abolir ainsi le conservatisme des idées reçues. Le retour d'état dynamique a été présenté dans l'esprit d'une synthèse robuste. En effet, la compensation parfaite des perturbations réalisée est robuste par rapport aux inéluctables erreurs de modélisation.

## 6.7 Problèmes

Les problèmes suivants permettent de s'appropriier des possibilités offertes par les concepts de commande avec retour d'état et d'observation par injection de la sortie pour conception de systèmes de commande réalisant une compensation parfaite des perturbations et/ou une estimation conjointes des variables d'état du système et du générateur des perturbations. On se focalisera sur le cas des systèmes monovariables pour des considérations pédagogiques. Le cas des systèmes multivariables sera amplement traité dans le cadre d'un ensemble de bureaux d'études conçus pour développer un savoir faire en la matière sous l'amicale bénédiction de Simulink.

**Problème 6.1** On se propose d'étudier un problème générique des systèmes d'instrumentation avancée, en l'occurrence le problème d'estimation conjointe des variables d'état d'un système et de son entrée en supposant que les modèles du système et du générateur d'entrée sont connus, notamment des réalisations d'état minimale  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma, E_\sigma)$  et  $(F_e, G_e, H_e, E_e)$  de dimensions respectives  $n_\sigma$  et  $n_e$ . Le système peut être alors représenté comme le montre la figure 6.11 où  $\mathcal{SYS}$  et  $\mathcal{MG\mathcal{E}}$  désignent respectivement le système et le modèle générateur de son entrée  $\{u(t)\}$  à partir d'une impulsion d'amplitude inconnue  $\{\delta_v(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désigne la mesure de la sortie du système.

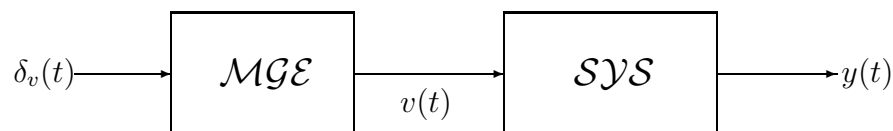


FIGURE 6.11 – Représentation du système à entrée inconnue

On suggère d'effectuer cette étude dans le cas des systèmes carrés, i.e.  $(u(t), y(t)) \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m$ , d'une manière progressive comme suit.

- 1) Montrer que la cascade composée du système et du modèle générateur de son entrée peut être décrite par la réalisation d'état

$$\mathcal{REC} \left\{ F = \begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma H_e \\ 0 & F_e \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} G_\sigma E_e \\ G_e \end{pmatrix}, H = (H_\sigma \quad E_\sigma H_e) \text{ et } E = E_\sigma E_e \right.$$

- 2) Montrer que la cascade est observable si et seulement si la configuration des pôles du modèle générateur d'entrée et la configuration des zéros du système sont disjointes, i.e

$$\left( (H, F) \text{ est observable} \right) \iff \left( \mathcal{CP}(\mathcal{MGE}) \cap \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) = \emptyset \right)$$

- 3) Proposer un observateur permettant de réaliser une estimation précise conjointe des variables d'état du système et de son entrée en précisant la condition requise pour ce faire.

- 4) Traiter le cas suivant

$$G_\sigma(s) = \frac{\omega_\sigma^2}{s^2 + 2\zeta_\sigma\omega_\sigma s + \omega_\sigma^2} \text{ et } u(t) = a_e \sin(\omega_e t) \alpha(t)$$

où  $a_e$  désigne l'amplitude du signal qui est supposée inconnue.

**Problème 6.2** Considérons le système asservi de la figure 6.12 où le système est décrit par une réalisation d'état minimale  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma)$  associé au vecteur d'état  $x_\sigma(t)$  et n'admet aucun zéro situé sur l'axe imaginaire. Proposer une pondération qui permet de réaliser une poursuite asymptotique parfaite des séquences de référence harmoniques d'amplitude arbitraire  $r^*$ , e.g.  $y^*(t) = r^* \sin(\omega t + \varphi)$ . On précisera la structure du régulateur qui permet de réaliser une précision maximale et toutes les conditions requises pour ce faire.

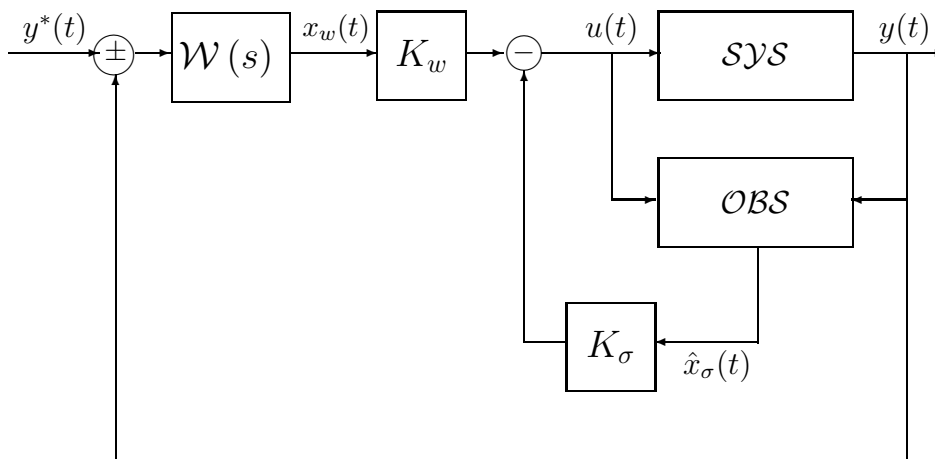


FIGURE 6.12 – Asservissement réalisant une précision maximale

**Problème 6.3** La figure 6.13 montre le diagramme fonctionnel d'un asservissement de position d'une antenne parabolique qui se distingue par un système composé d'une antenne parabolique, d'un moteur à courant continu et d'un capteur. Le moteur à courant continu permet d'orienter l'antenne par l'intermédiaire d'un engrenage. Le capteur est un transformateur différentiel à réductance variable de type rotatif de gain unitaire qui permet de mesurer la position angulaire de l'antenne.  $\{u(t)\}$  et  $\{\tau(t)\}$  désignent respectivement la tension d'induit du moteur et le couple délivré par le moteur;  $\{\theta(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désignent respectivement la position angulaire de l'antenne et sa mesure et  $\{v(t)\}$  représente les perturbations ramenées en entrée du système, notamment l'effet du vent.

On se propose de déterminer un régulateur qui permet de conférer à l'asservissement une compensation parfaite des perturbations avec des performances dynamiques caractérisées par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_r$ . Pour ce faire, on adoptera une synthèse modale en supposant que

$\mathcal{H}1$ . Le système considéré peut être raisonnablement décrit par l'équation différentielle

$$J\rho^2 y(t) + f\rho y(t) = u(t) + v(t)$$

où  $J$  et  $f$  sont respectivement le moment d'inertie et le coefficient de frottement visqueux de l'ensemble moteur-engrenage-antenne

$\mathcal{H}2$ . Les séquences des perturbations et des points de consigne sont du type échelon

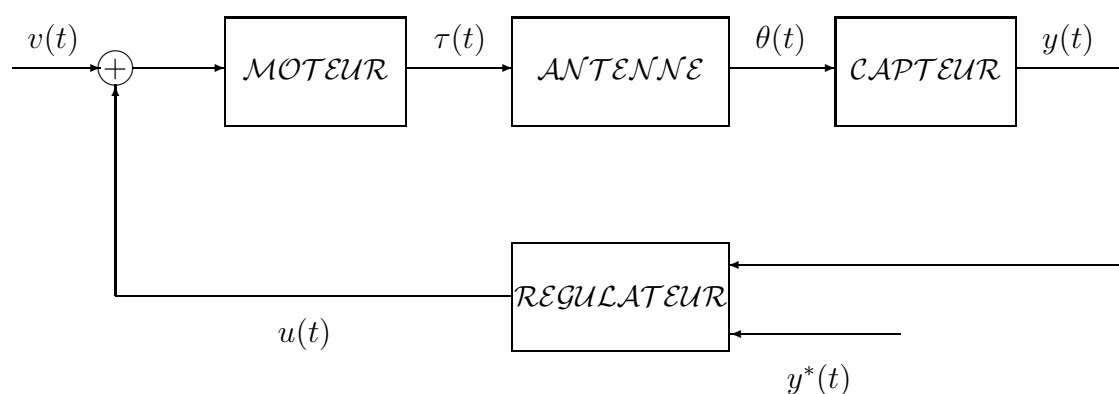


FIGURE 6.13 – Asservissement de position d'une antenne parabolique

On suggère d'étudier le problème dans un contexte de régulation et de montrer que le régulateur obtenu peut être aisément utilisé pour traiter le problème d'asservissement de position considéré. Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit.

1) Montrer que le système peut être décrit par la représentation d'état suivante

$$\mathcal{MSAP} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (6.54)$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

$$F = \begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (H_\sigma \quad 0) \quad (6.56)$$

où  $(H_\sigma, H_\sigma, H_\sigma)$  est une réalisation d'état du système en absence des perturbations.

2) Supposons que la séquence de points de consigne est identiquement nulle, montrer que la synthèse du système de commande considéré peut être effectuée à partir de loi de commande

$$\mathcal{REG} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + y(t) \\ u(t) = -K \hat{x}(t) \end{cases} \quad (6.57)$$

avec

$$K_a = \begin{pmatrix} K_\sigma & K_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_a = \begin{pmatrix} M_\sigma \\ M_p \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

où  $K_a \in \mathcal{R}^{1 \times 3}$  et  $M_a \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$  désignent respectivement les gains de commande avec retour d'état et d'observation qui seront déterminés à partir d'une synthèse modale dont on précisera les conditions de faisabilité.

- 3) Montrer que la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur considérée (6.57)-(6.58) peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{REG} \{ U(s) = -(\mathcal{R}_{creo}(s) + \mathcal{R}_{comp}(s)) Y(s) \} \quad (6.59)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{creo}(s) &= K_\sigma (sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma)^{-1} M_\sigma \\ \mathcal{R}_{comp}(s) &= \frac{1}{s} K_p M_p (1 - H_\sigma (sI_{n\sigma} - F_\sigma + G_\sigma K_\sigma + M_\sigma H_\sigma)^{-1} M_\sigma) \end{aligned} \quad (6.60)$$

- 4) Supposons que la séquence de points de consigne n'est pas identiquement nulle, montrer que l'asservissement considéré réaliserait une poursuite parfaite modulo une modification appropriée que l'on précisera dans le cas d'une dynamique de poursuite caractérisée par une mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_p$ .

**Problème 6.4** On se propose de concevoir un asservissement de niveau d'un système hydraulique dont le schéma fonctionnel est donné par la figure 6.14. Le système hydraulique est constitué de deux cuves identiques  $CUV1$  et  $CUV2$ , la première se déversant dans la seconde, munies chacune d'une vanne et d'une pompe qui fonctionnent avec une commande manuelle à distance, soit l'ensemble  $\mathcal{VAN}1$ ,  $\mathcal{VAN}2$ ,  $\mathcal{POM}1$  et  $\mathcal{POM}2$ . La vanne permet d'effectuer un remplissage de la cuve alors que la pompe permet de procéder à une vidange de la cuve si besoin est. L'électrovanne  $\mathcal{EVA}$  permet de fournir le débit d'eau à l'entrée de la première cuve, alors que le capteur  $\mathcal{CAP}$  permet d'effectuer une mesure du niveau dans la seconde cuve. L'électrovanne est principalement constituée d'un asservissement de débit conçu à partir d'une cascade de systèmes composée d'un amplificateur de puissance, d'un moteur, d'une vanne et d'un capteur de débit. Cet asservissement est supposé être bien conçu pour que l'on puisse le considérer comme un amplificateur de puissance de gain statique unitaire par rapport à la bande passante désirée de l'asservissement du niveau. On supposera aussi que le capteur peut être raisonnablement approximés par un amplificateur de gain statique unitaire compte tenu de la bande passante désirée de l'asservissement du niveau. Les séquences  $\{u(t)\}$  et  $\{q(t)\}$  désignent respectivement la tension de commande de l'électrovanne et le débit d'eau qu'elle fournit effectivement, alors que les séquences  $\{h(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désignent le niveau d'eau dans la seconde cuve et sa mesure.

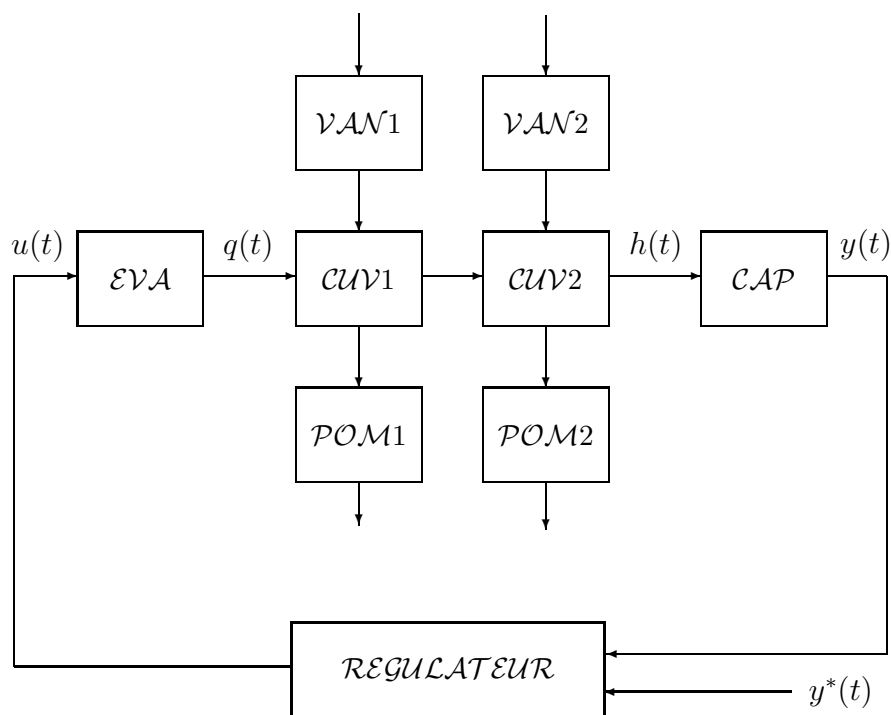


FIGURE 6.14 – Système hydraulique

Les performances requises consistent à maintenir le niveau d'eau dans la seconde cuve dans un voisinage d'une séquence de référence  $\{y^*(t)\}$  indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du système hydraulique. Les sources des perturbations des niveaux d'eau dans les cuves sont les vannes de remplissage ainsi que les pompes de vidange, elles peuvent être considérées dans le pire cas comme une perturbation d'état du type échelon d'amplitude inconnue. La séquence de référence  $\{y^*(t)\}$  est produite par un modèle générateur comme suit

$$y^*(t) = \mathcal{G}^*(\rho) u^*(t)$$

où  $\{u^*(t)\}$  est un échelon d'amplitude donnée et  $\mathcal{G}^*(z^{-1})$  est la fonction de transfert du modèle générateur. Ce dernier est particulièrement utilisé pour modéliser la dynamique de poursuite de l'asservissement par rapport à sa dynamique de régulation. Outre la stabilité asymptotique du système de commande, on cherche à réaliser une précision maximale avec une dynamique dominante caractérisée par deux modes d'amortissement unitaire et de pulsations propres respectives  $\omega_c$  et  $\omega_o$  et une bonne insensibilité par rapport aux bruits inévitables de mesure.

Montrer que la conception de l'asservissement de position considéré sera réalisée en adoptant une approche d'état avec synthèse modale. On motivera les choix de structure du système de commande et la spécification des paramètres de synthèse.

**Problème 6.5** Le diagramme fonctionnel de la figure 6.15 représente un asservissement classique de l'angle de tangage d'un véhicule spatial. L'actionneur est constitué par un asservissement dédié à l'angle de braquage de la tuyère de tangage. La boucle de retour est constituée d'une centrale inertielle, qui mesure l'angle de tangage (position du véhicule spatial), et d'un gyromètre dont la sortie est proportionnelle à la dérivée de l'angle de tangage par rapport au



temps (vitesse angulaire du véhicule spatial). Le bloc de pilotage détermine la commande à appliquer à la tuyère de tangage en fonction de l'erreur de position actuelle. Il est généralement réalisé avec un régulateur  $PID$  conçu à partir d'une approche fréquentielle qui relève beaucoup plus de l'art que de l'analytique. Les séquences  $\{u(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désignent respectivement le signal de commande de l'angle de braquage de la tuyère de tangage et l'angle de tangage du véhicule spatial. Quant aux séquences  $\{v_a(t)\}$  et  $\{v_\sigma(t)\}$ , elles représentent les perturbations qui affectent respectivement le fonctionnement de l'actionneur et du véhicule spatial et sont du type échelon modulo un filtrage.

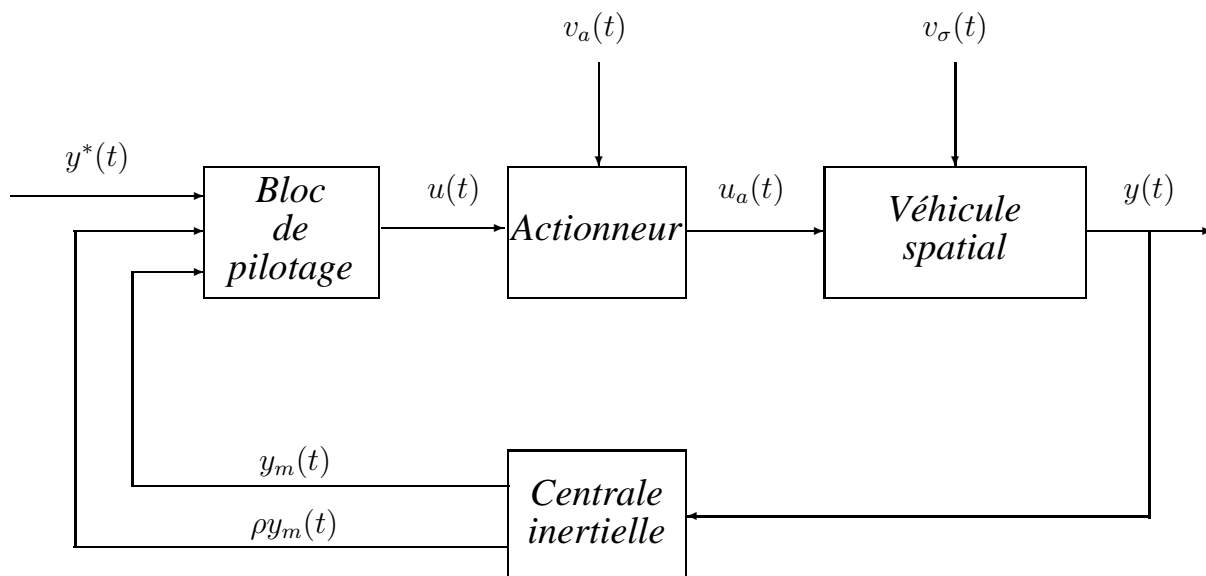


FIGURE 6.15 – Pilotage automatique d'un véhicule spatial

On notera que le système à commander correspondant est constitué de l'actionneur, i.e. la tuyère de tangage asservie, du véhicule spatial et des capteurs, i.e. la centrale inertielle et du gyromètre, comme l'indique la figure 6.16 où  $\{v(t)\}$  désigne l'ensemble des perturbations qui affectent le fonctionnement du système.

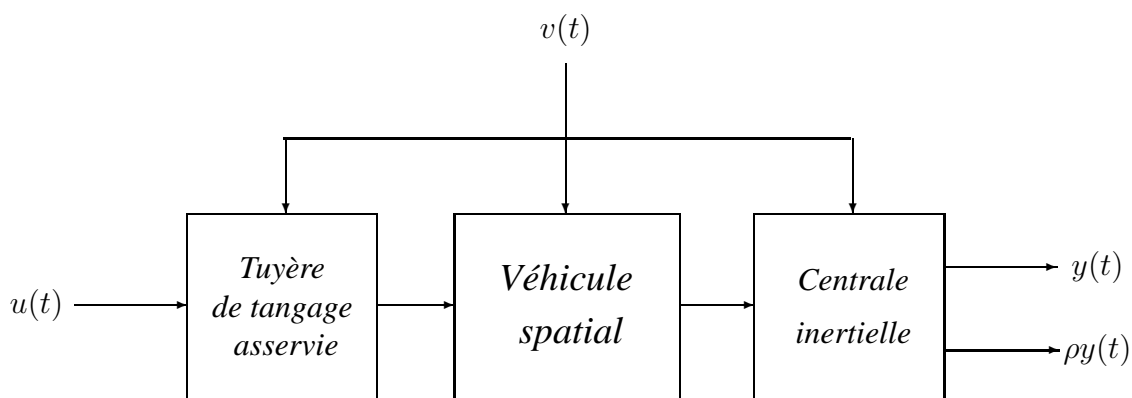


FIGURE 6.16 – Le système à commander

On se propose de repenser ce pilotage automatique à la lumière des possibilités offertes par l'approche d'état en supposant que l'actionneur et la centrale inertielle peuvent être représentés par des amplificateurs de gain unitaire, que le gyromètre est parfaitement décrit par une

action dérivée de gain unitaire et que le comportement dynamique du véhicule spatial peut être raisonnablement approximé par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\alpha\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

où  $\alpha$  et  $\omega$  sont des paramètres qui représentent l'efficacité du pilotage et l'efficacité aérodynamique. Ces paramètres sont déterminés à partir des caractéristiques géométriques et aérodynamiques du véhicule spatial.

Pour ce faire, on procédera progressivement en étudiant le système de commande décrit par la figure 6.17 qui se distingue par une commande avec retour d'état incorporant une action intégrale et un observateur. L'action intégrale est essentiellement motivée par les performances requises en précision dans le cas des séquences de points de consigne et des perturbations du type échelon. Quant à l'observateur, il permet de réaliser une estimation admissible de la position et de la vitesse de tangage à partir de la mesure de la position de tangage réalisant ainsi une économie d'un capteur de vitesse. Il est important de remarquer que le système de commande avec retour d'état incorporant une action intégrale décrit par la figure 6.18 n'est autre que le système de commande avec retour d'état sous-jacent du système de commande considéré.

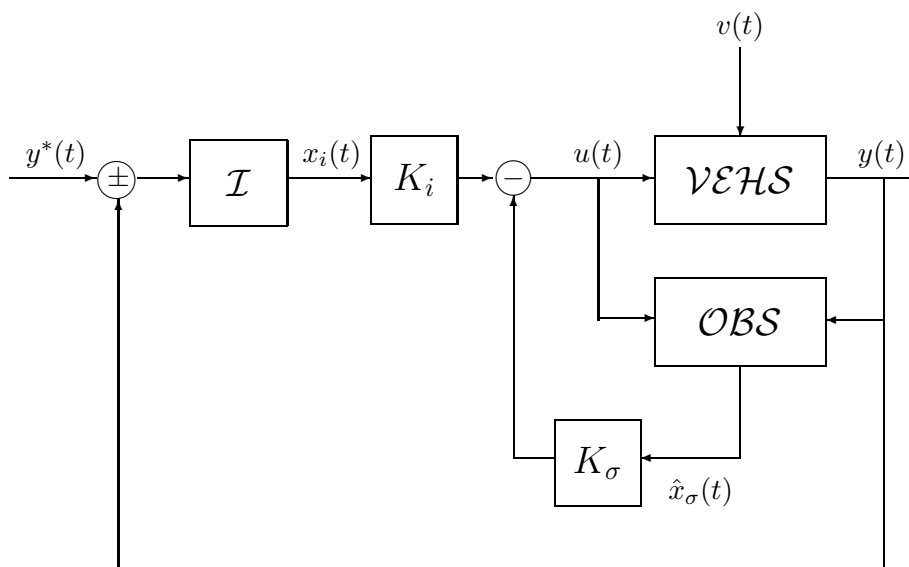


FIGURE 6.17 – Pilote automatique sans capteur de vitesse

On suggère d'adopter une synthèse modale pour la détermination des gains de commande avec retour d'état et de l'observateur et de focaliser sur des performances dynamiques en régulations (resp. en poursuite) caractérisées par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_r$  (resp.  $\omega_p$ ).

1) Montrer que le système peut être décrit par la représentation d'état suivante

$$\text{VEHS} \begin{cases} \rho x_\sigma(t) = F_\sigma x_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + \Gamma_\sigma v(t) \\ y(t) = H_\sigma x_\sigma(t) + E_\sigma v(t) \end{cases}$$

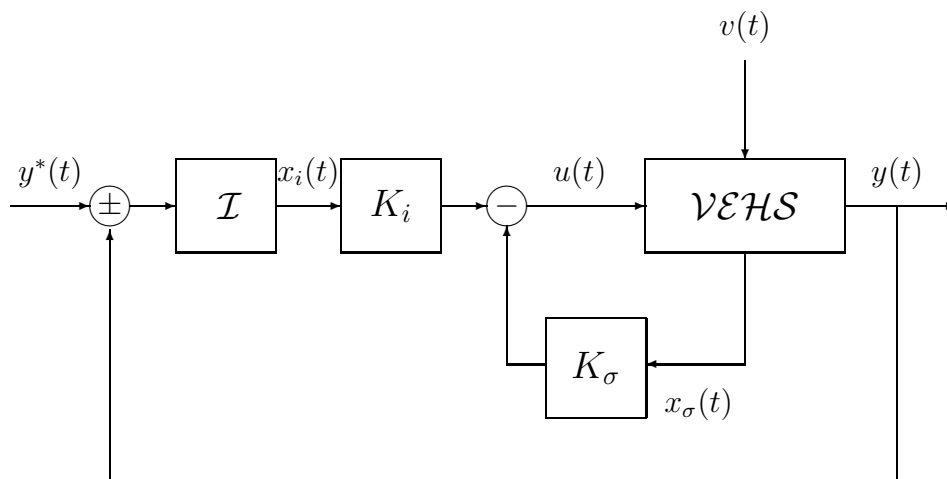


FIGURE 6.18 – Pilotage automatique avec capteur de vitesse

avec

$$x_{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{1}{\omega} \rho y(t) \end{pmatrix}$$

$$F_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, G_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha\omega \end{pmatrix}, H_{\sigma} = (1 \ 0),$$

$$\Gamma_{\sigma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \text{ et } E_{\sigma} = \nu$$

On précisera plus particulièrement la nature des variables d'état du système et de l'hypothèse faite sur les perturbations et on étudiera la stabilité.

Etudier la stabilité, la commandabilité et l'observabilité du système ?

2) Montrer que l'action intégrale peut être associée au système comme suit

$$\text{MODS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + \Gamma_p v(t) + \Gamma_r y^*(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ev(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{\sigma}(t) \\ x_i(t) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_{\sigma} & 0 \\ -H_{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} G_{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix}, H = (H_{\sigma} \ 0)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\sigma} \\ -E_{\sigma} \end{pmatrix}, \Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E = E_{\sigma}$$

Etudier la stabilité, la commandabilité, l'observabilité et la détectabilité d'un tel modèle.

3) *Etudier le système de commande de la figure 6.18, compte tenu des performances dynamiques dynamiques requises, comme suit*

- *Donner une réalisation d'état du système de commande*
- *Déterminer les gains  $K_\sigma$  et  $K_i$  qui permettent de conférer au système de commande avec retour d'état incorporant une action intégrale les performances dynamiques requises.*
- *Montrer que le pilote automatique réalise bien une erreur statique nulle pour des séquences de références du type échelon.*

4) *Etudier le système de commande de la figure 6.17 en utilisant un observateur décrit par*

$$\text{OBS } \{ \rho \hat{x}_\sigma(t) = (F_\sigma - M_\sigma H_\sigma) \hat{x}_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + M_\sigma y(t)$$

*où  $M_\sigma$  désigne le gain d'observation. Pour une meilleur perception des choses, on propose de procéder comme sut*

- *Montrer que l'observateur est biaisé et déterminer  $M_\sigma$  de manière à réaliser une dynamique d'observation caractérisée par un amortissement unitaire et une pulsation propre  $\omega_o \leq \omega_c$ .*
- *Donner une réalisation d'état du système de commande et étudier sa stabilité.*
- *Montrer que le système de commande réalise bien une erreur statique nulle pour une séquence de référence du type échelon.*
- *Montrer que la loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur peut se mettre sous la forme usuelle*

$$\rho S(\rho)u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t)$$

*On précisera les expressions des polynômes  $S(\rho)$ ,  $R(\rho)$  et  $T(\rho)$ .*

5) *Proposer un système de pilotage réalisant les performances désirées tout en réalisant une estimation des perturbations pour des considérations de diagnostic.*

# Chapitre 7

## Asservissements

La figure 7.1 montre un diagramme fonctionnel d'un système asservi qui résulte naturellement d'une interconnection du type rétroaction de deux systèmes dynamiques qui ne sont autres que le système et le régulateur.  $\{u(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  désignent respectivement les séquences d'entrée et de sortie du système,  $\{y_m(t)\}$  désigne la séquence de sortie mesurée du système,  $\{v(t)\}$  et  $\{\eta(t)\}$  représentent respectivement les perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système et le bruit de mesure inéluctable et  $\{y^*(t)\}$  est la séquence de référence. L'ultime motivation d'un asservissement est de

*maintenir la séquence de sortie du système dans un voisinage d'une séquence de référence indépendamment des perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure inéluctables, soit  $\{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / (\{v(t)\}, \{\eta(t)\})$*

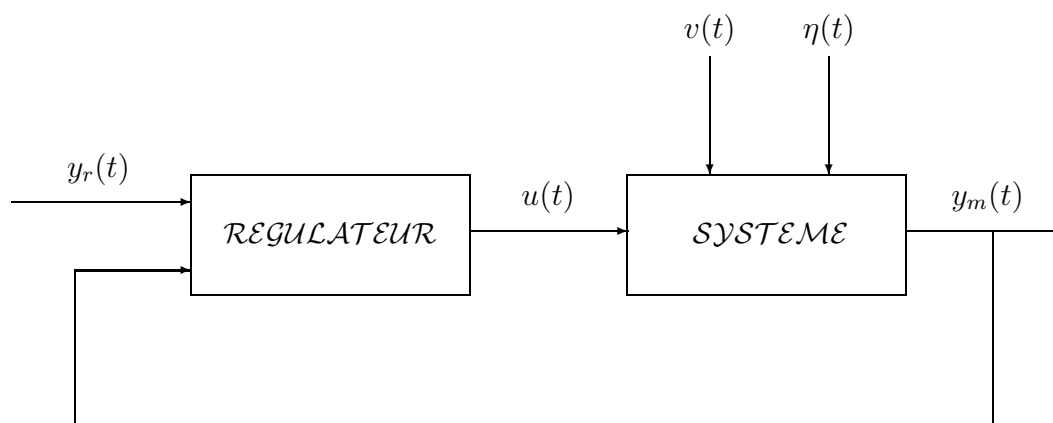


FIGURE 7.1 – Diagramme fonctionnel d'un système asservi

*Cette motivation est particulièrement décrite par un ensemble de spécifications admissible par rapport aux propriétés essentielles d'un asservissement et aux exigences de simplicité pour sa mise en oeuvre. Les propriétés fondamentales d'un asservissement découle naturellement de l'essence du génie de rétroaction, en l'occurrence la stabilisation, une bonne insensibilité aux bruits de mesure inéluctables, une compensation des perturbations (resp. une précision) admissible avec une dynamique dominante spécifique et une robustesse raisonnable par rapport aux erreurs de modélisation inéluctables. Quant aux exigences de simplicité, elles sont essentiellement réalisées à partir des ressources technologiques disponibles.*

*Ce chapitre est essentiellement consacré à une approche fréquentielle pour l'analyse des asservissements à partir d'une base appropriée de quantificateurs de performances nominales et de robustesse en stabilité ([4], [57], [77], [89]). Cette approche est présentée d'une manière progressive après deux focus concis et précis sur les normes des systèmes et la stabilité des systèmes asservis. Une attention particulière est accordée à la problématique d'admissibilité physique des systèmes à rétroaction, aux erreurs de modélisation non structurées et au modelage des fonctions de sensibilité usuelles des asservissements.*

## 7.1 Normes des systèmes

*Les normes des systèmes communément utilisées dans la théorie des systèmes sont les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Ces normes ont été définies à partir de la norme  $\mathcal{L}_2$  des signaux que l'on peut rencontrer dans l'ingénierie des systèmes, notamment des séquences vectorielles réelles  $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^s$  dont la norme  $\mathcal{L}_2$  associée est particulièrement définie par*

$$\|f\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)f(t)dt$$

*On distingue deux ensembles de séquences vectorielles réelles  $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^s$  de norme finie selon la configuration des pôles de leurs transformées de Laplace et dont les composantes sont des fractions rationnelles à coefficients réels, soit  $\mathcal{F}(s) \in \mathbb{C}^s$ .*

- *L'ensemble  $\mathcal{L}_2^s$  des fonctions complexes  $\mathcal{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^s$  de carré sommable sur l'axe imaginaire.*
- *L'ensemble  $\mathcal{H}_2^s$  des fonctions complexes  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^s$  analytiques à l'extérieur du domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  et de carré sommable sur l'axe imaginaire.*

*On notera que les ensembles  $\mathcal{L}_2^s$  et  $\mathcal{H}_2^s$  sont des espaces vectoriels de Hilbert dont la norme associée est définie par*

$$\|F\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega)F(j\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

*où  $F(j\omega)$  désigne la transformée de Fourier de la séquence  $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Dans l'ensemble  $\mathcal{L}_2^s$ , cette norme peut être exprimée dans le domaine temporel via le théorème de Parseval comme suit*

$$\|F\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega)F(j\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)f(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

*La norme  $\mathcal{H}_2$  a été naturellement étendue aux systèmes à partir d'une représentation du type fonction de transfert, soit  $Y(s) = \mathcal{G}(s)U(s)$  avec  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  pour définir les deux normes usuelles des systèmes.*

- La norme  $\mathcal{H}_2$  définie par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2 \triangleq \sup_{\sigma>0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{G}^*(\sigma + j\omega)\mathcal{G}(\sigma + j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

On montre aisément que

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

- La norme  $\mathcal{H}_\infty$  définie par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\Re(s)>0} \sigma_{\max} (\mathcal{G}(s))$$

On montre aisément que

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max} (\mathcal{G}(j\omega))$$

ce qui n'est autre que la norme induite définie pour toute entrée bornée comme suit

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|\mathcal{G}(\rho)u(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$$

puisque  $y(t) = \mathcal{G}(\rho)u(t)$

On notera que les systèmes qui ont une norme  $\mathcal{H}_2$  finie sont décrits par des fonctions de transfert stables et strictement propres, alors que les systèmes qui ont une norme  $\mathcal{H}_\infty$  finie sont décrits par des fonctions de transfert stables et propres. On peut alors définir les espaces usuels suivants communément utilisés dans la théorie des systèmes.

- $\mathcal{RL}_2$  est l'ensemble des fonctions de transfert strictement propres sans aucun pôle sur l'axe imaginaire.
- $\mathcal{RH}_2$  est l'ensemble des fonctions de transfert strictement propres et stables.
- $\mathcal{RL}_\infty$  est l'ensemble des fonctions de transfert propres sans aucun pôle sur l'axe imaginaire.
- $\mathcal{RH}_\infty$  est l'ensemble des fonctions de transfert propres et stables.

La norme  $\mathcal{H}_2$  peut être interprétée comme la puissance de la sortie du système en réponse à un bruit blanc gaussien de puissance unitaire comme le montre le résultat suivant.

**Résultat 7.1** Considérons un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}(s)$ . Alors la puissance de la réponse du système à un bruit blanc gaussien de puissance unitaire est donnée par

$$\mathcal{E} \{y^T(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) d\omega = \|\mathcal{G}(s)\|_2^2$$

**Preuve.** Rappelons d'abord que la réponse du système à un bruit blanc gaussien de puissance unitaire est donnée par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \text{ avec } \mathcal{E} \{u(t)u^T(t-\tau)\} = I_m\delta(t-\tau)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{y^T(t)y(t)\} &= \mathcal{E} \left\{ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right)^T \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{\tau})u(t-\bar{\tau})d\bar{\tau} \right) \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} (u^T(t-\tau)g^T(\tau)g(\bar{\tau})u(t-\bar{\tau})) d\bar{\tau} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (u(t-\bar{\tau})u^T(t-\tau)g^T(\tau)g(\bar{\tau})) d\bar{\tau} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{E} \{u(t-\bar{\tau})u^T(t-\tau)\} g^T(\tau)g(\bar{\tau})) d\bar{\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (g^T(\tau)g(\bar{\tau})) \delta(\tau-\bar{\tau})d\bar{\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (g^T(\tau)g(\tau)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (g(\tau)g^T(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) d\omega \end{aligned} \quad \mathcal{CQFD}$$

Par ailleurs, on montre aisément que

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathcal{G}(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

La minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  correspond ainsi à la minimisation de la somme des carrés de toutes les valeurs singulières sur toutes les fréquences, alors que la minimisation d'une norme  $\mathcal{H}_\infty$  correspond à la minimisation du maximum de la plus grande valeur singulière pour une fréquence particulière pour laquelle l'amplification est maximale.

La norme  $\mathcal{H}_2$  d'un système peut être déterminée directement à partir de sa réalisation d'état comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat 7.2** Soit  $(F, G, H, E)$  une réalisation d'état de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{RH}_2$ , alors sa norme  $\mathcal{H}_2$  est donnée par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2^2 = \text{trace} (G^T W_o G) = \text{trace} (H W_c H^T)$$

où  $W_o$  et  $W_c$  désignent les grammiens d'observabilité et de commandabilité du système respectivement données par les équations de Lyapunov

$$F^T W_o + W_o F + H^T H = 0$$

et

$$F W_c + W_c F^T + G G^T = 0$$



**Preuve.** Compte tenu du fait que les grammians de commandabilité et d'observabilité du système sont respectivement donnés par

$$W_o = \int_0^t e^{F^T t} H^T H e^{F t} dt \quad \text{et} \quad W_c = \int_0^t e^{F t} G G^T e^{F^T t} dt$$

et que sa réponse impulsionnelle est  $g(t) = H e^{F t} G$ , on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(s)\|_2^2 &= \text{trace} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^*(j\omega) \mathcal{G}(j\omega) d\omega \right) \\ &= \text{trace} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g^T(\tau) d\tau \right) \\ &= \text{trace} \left( H \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{F\tau} G G^T e^{F^T\tau} d\tau \right) H^T \right) \\ &= \text{trace} (H W_c H^T) \end{aligned}$$

Et comme  $\text{trace} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g^T(\tau) d\tau \right) = \text{trace} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g^T(\tau) g(\tau) d\tau \right)$ , on peut en déduire que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(s)\|_2^2 &= \text{trace} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g^T(\tau) g(\tau) d\tau \right) \\ &= \text{trace} \left( G^T \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{F^T\tau} H^T H e^{F\tau} d\tau \right) G \right) \\ &= \text{trace} (G^T W_o G) \end{aligned}$$

*CQFD*

Contrairement à la norme  $\mathcal{H}_2$ , on ne peut pas déterminer analytiquement la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système. Néanmoins, on peut tester si la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système est inférieure ou égale à une borne donnée à partir du résultat suivant

**Résultat 7.3** Considérons un système décrit par une fonction de transfert  $\mathcal{G}(p) \in \mathbb{R}^{p \times m}(p)$ , alors on a

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty < \gamma \iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(-s)\mathcal{G}(s))^{-1} \in \mathcal{RL}_\infty$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(s)\|_\infty < \gamma &\iff \sigma_i(\mathcal{G}(j\omega)) < \gamma \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n] \\ &\iff \lambda_i(\mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) < \gamma^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n] \\ &\iff \lambda_i(\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n] \\ &\iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \\ &\iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(-s)\mathcal{G}(s)) \text{ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire} \\ &\iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(-s)\mathcal{G}(s))^{-1} \in \mathcal{RL}_\infty \end{aligned}$$

*CQFD*

**Remarque 7.1** On peut toujours déterminer numériquement la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système à partir de la séquence  $\{\sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega))\}_{\omega \geq 0}$ , modulo le risque de manquer le vrai maximum. Le résultat suivant permet de développer un algorithme relativement approprié pour le calcul de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système.

**Résultat 7.4** Considérons la matrice Hamiltonienne

$$\mathcal{H}(\gamma) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & G \\ H^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma I_p & E \\ E^T & \gamma I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -G^T \end{pmatrix}$$

associée à une réalisation  $(F, G, H, E)$  d'ordre  $n$ . Alors les propositions suivantes sont vraies.

$\mathcal{P}1$ . Pour tout  $\gamma > \sigma_{\max}(E)$  on a  $\|\mathcal{G}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si  $\mathcal{H}(\gamma)$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

$\mathcal{P}2$ . Si  $\mathcal{H}(\gamma)$  admet une valeur propre  $j\omega$  sur l'axe imaginaire pour  $\gamma > \sigma_{\max}(E)$ , alors  $\sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega)) = \gamma$ .

où  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  n'est autre que la fonction de transfert du système.

Cette caractérisation spectrale suggère un algorithme de dichotomie pour calculer  $\|\mathcal{G}(s)\|_\infty$  qui consiste à partir d'un encadrement,  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  avec  $\gamma_{\min} \geq \sigma_{\max}(E)$ , relativement grand que l'on affine d'une manière itérative comme suit

$\mathcal{E}1$ . On calcule le spectre de  $\mathcal{H}(\gamma)$  pour  $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{\min} + \gamma_{\max})$

$\mathcal{E}2$ . Si  $\mathcal{H}(\gamma)$  n'admet aucune valeur propre sur l'axe imaginaire, alors on pose  $\gamma_{\min} = \gamma$ , sinon on pose  $\gamma_{\max} = \gamma$ .

$\mathcal{E}3$ . Revenir à l'étape  $\mathcal{E}1$  tant que le résultat n'est pas jugé satisfaisant.

Le résultat suivant permet d'étendre le concept de réponse harmonique aux systèmes multivariables via le concept de valeurs singulières à partir des résultats 2.8 et 2.9.

**Résultat 7.5** Considérons un système décrit par sa fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ , alors la propriété suivante est vraie pour toute entrée non nulle

$$\sigma_{\min}(\mathcal{G}(j\omega)) \leq \frac{\|\mathcal{G}(j\omega)U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega)) \text{ pour } \omega \in \mathbb{R}$$

Ces inégalités montrent clairement que la plupart des propriétés qui concernent le gain pour les systèmes monovariables peuvent s'étendre aux systèmes multivariables en considérant les valeurs singulières minimale et maximale de leur réponse harmonique. En effet, il est possible de considérer des représentations fréquentielles des valeurs singulières de la réponse harmonique du système dans la mesure où elles sont des fonctions réelles positives de la pulsation. Il apparaît clairement que le gain du système est relativement petit ( resp. grand ) aux pulsations où  $\sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega))$  ( resp.  $\sigma_{\min}(\mathcal{G}(j\omega))$  ) est relativement petite ( resp. grande ). On notera toutefois que ces inégalités ne fournissent aucune information explicite sur la phase du système.

## 7.2 Admissibilité physique.

En dépit de la diversité des configurations des systèmes à rétroaction, l'analyse des systèmes asservis est généralement faite à partir de la configuration standard donnée par la figure 7.2 qui se distingue par un retour unitaire, des perturbations en entrée et en sortie et un bruit de mesure respectivement désignés par  $\{v_u(t)\}$ ,  $\{v_y(t)\}$  et  $\{\eta(t)\}$ . On notera que  $\{u_\sigma(t)\}$  et  $\{y_\sigma(t)\}$  représentent respectivement les séquences effectives d'entrée et de sortie du système.

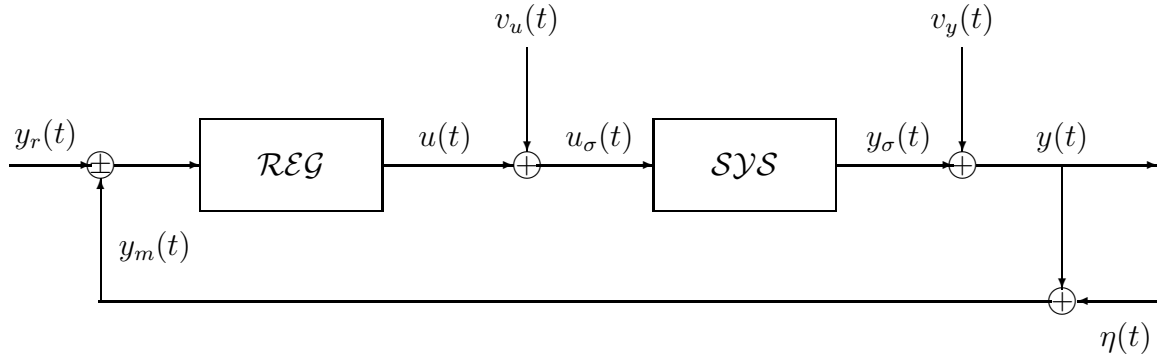


FIGURE 7.2 – Diagramme fonctionnel d'un asservissement standard

Supposons que le système et le régulateur sont respectivement décrits par les fonctions de transfert  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{R}(s)$  et posons  $\mathcal{E}(s) \triangleq \mathcal{L}(\{\eta(t)\})$ , alors le système asservi standard est décrit par les équations

$$\text{SAS} \left\{ \begin{array}{l} (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)) Y(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) (Y^*(s) - \mathcal{E}(s)) + \mathcal{G}(s)V_u(s) + V_y(s) \\ (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)) U(s) = \mathcal{R}(s) (Y^*(s) - V_y(s) - \mathcal{E}(s)) + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)V_u(s) \\ (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)) U_\sigma(s) = \mathcal{R}(s) (Y^*(s) - V_y(s) - \mathcal{E}(s)) + V_u(s) \\ (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)) E(s) = (Y^*(s) - V_y(s)) - \mathcal{G}(s)V_u(s) + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\mathcal{E}(s) \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Une question naturelle que l'on pourrait se poser avant de continuer à développer ces équations est de savoir si toutes les fonctions de transfert du système asservi existent et sont propres. Une telle question constitue l'essence de l'admissibilité physique du système à rétroaction et n'est pas propre à la réalisation physique du système et du régulateur comme le montre l'exemple suivant

$$\mathcal{G}(s) = \frac{-s+2}{s+3} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(s) = 1$$

qui se distingue par des fonctions de transfert non propres reliant l'entrée à la séquence de référence, au bruit de mesure et aux perturbations en sortie et en entrée respectivement données par

$$-\frac{s-2}{5}, \frac{s+3}{5}, -\frac{s-2}{5} \quad \text{et} \quad -\frac{s-2}{5}$$

Elle peut être étudiée à partir de la configuration donnée par la figure 7.3 où les séquences d'entrée  $\{w_1(t)\}$  et  $\{w_2(t)\}$  permettent de regrouper toutes les entrées exogènes du système de commande, alors que les séquences de sortie  $\{e_1(t)\}$  et  $\{e_2(t)\}$  permettent de regrouper toutes les entrées du système et du régulateur.

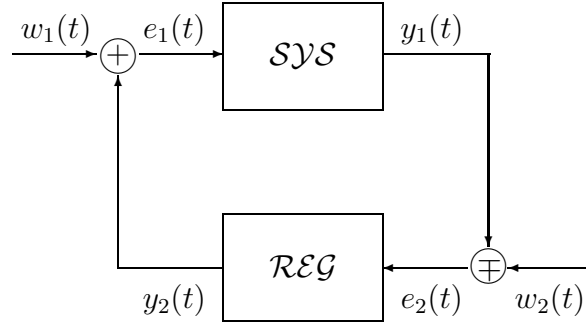


FIGURE 7.3 – Configuration standard d'un système de rétroaction

Il apparaît clairement que ce système à rétroaction est admissible si et seulement si toutes les fonctions de transfert qui relient ses sorties à ses entrées existent et sont propres comme le montre le résultat suivant.

**Résultat 7.6** Posons  $\mathcal{G}_\infty \triangleq \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{R}_\infty \triangleq \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{R}(s)$ , le système à rétroaction de la figure 7.3 est physiquement admissible si et seulement si la matrice  $I_m + \mathcal{R}_\infty \mathcal{G}_\infty$  est inversible.

**Preuve.** Le système à rétroaction standard est décrit par les équations suivantes

$$\begin{pmatrix} I_m & -\mathcal{R}(s) \\ \mathcal{G}(s) & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{pmatrix}$$

Il est donc physiquement admissible si et seulement la matrice

$$\begin{pmatrix} I_m & -\mathcal{R}(s) \\ \mathcal{G}(s) & I_p \end{pmatrix}$$

est inversible et que son inverse est propre. Et en vertu des développements du paragraphe 2.5 sur l'inversion des systèmes, on peut conclure que ceci est bien le cas si et seulement si la matrice  $\begin{pmatrix} I_m & -\mathcal{R}_\infty \\ \mathcal{G}_\infty & I_p \end{pmatrix}$  est inversible ou d'une manière équivalente la matrice  $I_m + \mathcal{R}_\infty \mathcal{G}_\infty$  est une matrice inversible compte tenu du résultat A.3.

CQFD

**Remarque 7.2** Si le système et le régulateur sont décrits par deux réalisations d'état, minimales ou stables et détectables, respectivement données par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_\sigma & G_\sigma \\ \hline H_\sigma & E_\sigma \end{array} \right) \text{ et } \mathcal{R}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_r & G_r \\ \hline H_r & E_r \end{array} \right)$$

alors, la condition d'admissibilité d'un système de commande en boucle fermée peut être ainsi exprimée d'une manière relativement commode, soit

$$\begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix} \text{ est inversible } \iff I_m + E_\sigma E_r \text{ est inversible}$$

On en déduit naturellement que les systèmes de commande sont physiquement admissibles puisque les fonctions de transfert des systèmes sont généralement strictement propres, i.e.  $E_\sigma = 0$ .

### 7.3 Stabilité interne.

L'analyse de la stabilité interne d'un système de commande peut être effectuée à partir de celle du système à rétroaction de la figure 7.3 en supposant qu'il est physiquement admissible. Cette hypothèse permet de déterminer aisément sa fonction de transfert comme suit

$$\mathcal{G}_{we}(s) \triangleq \begin{pmatrix} I_m & -\mathcal{R}(s) \\ \mathcal{G}(s) & I_p \end{pmatrix}^{-1} \quad (7.2)$$

soit

$$\mathcal{G}_{we}(s) = \begin{pmatrix} (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} & -\mathcal{R}(s)(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \\ \mathcal{G}(s)(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} & I_p - \mathcal{G}(s)(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}\mathcal{R}(s) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$$= \begin{pmatrix} I_m - \mathcal{R}(s)(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\mathcal{G}(s) & -\mathcal{R}(s)(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \\ (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\mathcal{G}(s) & (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Par ailleurs, le système de rétroaction peut être décrit à partir des réalisations d'état (7.2) du système et du régulateur comme suit

$$\rho \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\sigma & 0 \\ 0 & F_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_\sigma & 0 \\ 0 & G_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_\sigma & 0 \\ 0 & H_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\sigma & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_r \\ -H_\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

La dernière équation résulte naturellement de la relation triviale entre les variables d'entrée-sortie

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

Et comme le système de rétroaction est supposé être physiquement admissible, on peut déterminer aisément une représentation d'état à partir du vecteur d'état constitué des variables d'état du système et du régulateur, soit

$$SAS \begin{cases} \rho x_{sas}(t) = F_{sas}x_{sas}(t) + G_{sas}u_{sas}(t) \\ y_{sas}(t) = H_{sas}x_\sigma(t) + E_{sas}u_{sas}(t) \end{cases} \quad (7.5)$$

avec

$$x_{sas}(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

$$u_{sas}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } y_{sas}(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

$$F_{sas} = \begin{pmatrix} F_\sigma & 0 \\ 0 & F_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_\sigma & 0 \\ 0 & G_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & H_r \\ -H_\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$G_{sas} = \begin{pmatrix} G_\sigma & 0 \\ 0 & G_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix}^{-1} \quad (7.9)$$

$$H_{sas} = \begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & H_r \\ -H_\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$E_{sas} = \begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix}^{-1} \quad (7.11)$$

La fonction de transfert du système à rétroaction peut être alors déterminée à partir de sa réalisation d'état  $(F_{sas}, G_{sas}, H_{sas}, E_{sas})$  comme suit

$$\mathcal{G}_{we}(s) = \mathcal{G}_{sas}(s) = H_{sas} (zI_{nsas} - F_{sas})^{-1} G_{sas} + E_{sas} \quad (7.12)$$

À la lumière du résultat de stabilité interne, on peut postuler que le système à rétroaction de la figure 7.3 est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses modes sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, i.e.  $\mathcal{V}(F_{sas}) \subset \mathcal{D}_{sa}$ .

Le résultat suivant caractérise la stabilité interne du système à rétroaction à partir de sa fonction de transfert.

**Résultat 7.7** *Considérons le système à rétroaction de la figure 7.3 et supposons qu'il est physiquement admissible. Alors il est asymptotiquement stable si et seulement si sa fonction de transfert  $\mathcal{G}_{we}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ .*

**Preuve.** Rappelons d'abord que comme le système à rétroaction standard est physiquement admissible, alors la propriété suivante est satisfaite

$$\text{La matrice } \begin{pmatrix} I_m & -E_r \\ E_\sigma & I_p \end{pmatrix} \left( \text{resp. } \begin{pmatrix} I_m & -\mathcal{R}(s) \\ \mathcal{G}(s) & I_p \end{pmatrix} \right) \text{ est inversible}$$

Montrons que la condition est nécessaire. Pour ce faire, supposons que le système à rétroaction standard est asymptotiquement stable, alors on a

$$\mathcal{V}(F_{sas}) \in \mathcal{D}_{sa} \iff \mathcal{G}_{sas}(s) \in \mathcal{RH}_\infty \iff \mathcal{G}_{ew}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$$

Montrons que la condition est suffisante. Pour ce faire, supposons que  $\mathcal{G}_{we}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , alors  $\mathcal{G}_{sas}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  modulo un choix judicieux des réalisations d'état du système et du régulateur,

qui sont utilisées pour élaborer la réalisation d'état du système à rétroaction standard, en l'occurrence des réalisations d'état stabilisables et détectables. Ainsi, on peut conclure que tous les modes du système à rétroaction standard sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique ; i.e.  $\mathcal{V}(F_{sas})$ . Et donc le système à rétroaction standard est asymptotiquement stable.

*CQFD*

**Remarque 7.3** Il est important de noter que le système à rétroaction est asymptotiquement stable si et seulement si ses quatre fonctions de transfert appartiennent à  $\mathcal{RH}_\infty$ . A titre illustratif, considérons le cas où le système et le régulateur sont décrits par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(s) = -\frac{1}{s-1}$$

On peut déterminer aisément la fonction de transfert du système à rétroaction, soit

$$\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & -\frac{s+1}{(s-1)(s+2)} \\ \frac{s-1}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

La condition requise par la stabilité de ce système n'est pas vérifiée puisque la fonction de transfert reliant  $\{e_1(t)\}$  à  $\{w_2(t)\}$  n'est pas stable.

**Remarque 7.4** La stabilité interne des systèmes interconnectés, e.g. les asservissements, est une propriété vitale : elle garantit que toutes les variables internes du système sont bornées pourvu que tous les signaux externes injectés dans le système soient bornés.

Le résultat suivant montre que la stabilité interne peut être vérifiée relativement simplement dans certains cas spécifiques.

**Résultat 7.8** Considérons le système à rétroaction de la figure 7.3. Alors, les propositions suivantes sur sa stabilité interne sont vraies

- $\mathcal{P}1$ . Si  $\mathcal{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , alors le système à rétroaction est asymptotiquement stable si et seulement si il est physiquement admissible et  $\mathcal{G}(s) (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ .
- $\mathcal{P}2$ . Si  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , alors le système à rétroaction est asymptotiquement stable si et seulement si il est physiquement admissible et  $\mathcal{R}(s) (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ .
- $\mathcal{P}3$ . Si  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $\mathcal{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , alors le système à rétroaction est asymptotiquement stable si et seulement si  $(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ .

La preuve de ce résultat peut être aisément établie. A titre indicatif, pour montrer que la condition de la proposition  $\mathcal{P}1$  est suffisante, il suffit d'utiliser le fait que

$$(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} = I_p - (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$$

Le résultat suivant précise les conditions de stabilité interne dans des cas relativement généraux

**Résultat 7.9** *Le système à rétroaction de la figure 7.3 est asymptotiquement stable si et seulement si il est physiquement admissible et que les deux conditions suivantes sont vraies*

- C1. *Le nombre de pôles instables de la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$  est égal à la somme des nombres de pôles instables des fonctions de transfert  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{R}(s)$ .*
- C2. *Les zéros de la fonction de transfert  $\det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))$  sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, i.e.  $(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ .*

**Preuve.** *Supposons que le système et le régulateur sont décrits par deux réalisations d'état, minimales ou stabilisables et détectables  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma, E_\sigma)$  et  $(F_r, G_r, H_r, E_r)$ , alors les fonctions de transfert  $\mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$  et  $(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}$  sont décrites par les réalisations d'état suivantes*

$$\mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} F_\sigma & G_\sigma H_r & G_\sigma E_\sigma \\ 0 & F_r & G_r \\ \hline H_\sigma & E_\sigma H_r & E_\sigma E_r \end{array} \right)$$

et

$$(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} F_{os} & G_{os} \\ \hline H_{os} & E_{os} \end{array} \right)$$

avec

$$F_{os} = \left( \begin{array}{cc} F_\sigma & G_\sigma H_r \\ 0 & F_r \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} G_\sigma E_r \\ G_r \end{array} \right) (I - E_\sigma E_r)^{-1} \left( \begin{array}{cc} H_\sigma & E_\sigma H_r \end{array} \right)$$

$$G_{os} = \left( \begin{array}{c} G_\sigma E_r \\ G_r \end{array} \right) (I - E_\sigma E_r)^{-1}$$

$$H_{os} = (I - E_\sigma E_r)^{-1} \left( \begin{array}{cc} H_\sigma & E_\sigma H_r \end{array} \right)$$

$$E_{os} = (I - E_\sigma E_r)^{-1}$$

*On peut montrer aisément que les matrices d'état  $F_{sas}$  et  $F_{os}$  sont égales et en déduire que si le système à rétroaction standard est asymptotiquement stable, i.e.  $\mathcal{V}(F_{sas}) \subset \mathcal{D}_{sa}$ , alors  $\mathcal{V}(F_{os}) \subset \mathcal{D}_{sa}$  et donc  $(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ . Par ailleurs, si la condition C2 est vraie, alors on a  $(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$  et donc le système de commande standard est asymptotiquement stable si et seulement si la réalisation d'état  $(F_{os}, G_{os}, H_{os}, E_{os})$  est stabilisable et détectable. Cet argumentaire repose sur le fait que  $(F_{os}, G_{os}, H_{os}, E_{os})$  est stabilisable et détectable si et seulement si la réalisation*

$$\left( \left( \begin{array}{cc} F_\sigma & G_\sigma H_r \\ 0 & F_r \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} G_\sigma E_r \\ G_r \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} H_\sigma & E_\sigma H_r \end{array} \right) \right)$$

*est stabilisable et détectable. Et comme les réalisations d'état du système et du régulateur sont stabilisables et détectables, cette propriété est vraie pourvu que la condition C2 soit vraie.*

*CQFD*



Ce dernier résultat permet d'étendre naturellement le théorème de Nyquist des systèmes monovariabiles ([66]) aux systèmes multivariabiles modulo un bilan des pôles et des zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte et de l'égalité de différence de retour en sortie associée au système à rétroaction standard.

**Résultat 7.10** *Le système à rétroaction standard (figure 7.3) est asymptotiquement stable si et seulement si il est physiquement admissible, qu'il n'y a aucune simplification entre les pôles instables du système (resp. du régulateur) et les zéros instables du régulateur (resp. du système) et que le lieu de Nyquist de  $\det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))$  entoure l'origine, dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles instables du système et régulateur.*

**Preuve.** Notons d'abord que si  $\mathcal{G}(s) \triangleq B_\sigma(s)A_\sigma^{-1}(s)$  (resp.  $\mathcal{R}(s) \triangleq B_r(s)A_r^{-1}(s)$ ) est une factorisation polynomiale première à droite du système (resp. du régulateur), alors on a

$$\mathcal{G}_{we}(s) = \begin{pmatrix} A_\sigma(s) & 0 \\ 0 & A_r(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\sigma(s) & -B_r(s) \\ B_\sigma(s) & A_r(s) \end{pmatrix}^{-1} \quad (7.13)$$

et

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(s) & -B_r(s) \\ B_\sigma(s) & A_r(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ \mathcal{G}(s) & I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\sigma(s) & -B_r(s) \\ 0 & A_r(s) \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Ainsi, on peut montrer aisément que que la description (7.13) est une factorisation polynomiale première à droite du système à rétroaction standard et en déduire, en vertu de la factorisation (7.14), que son polynôme des pôles (resp. des zéros) est donné par

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \det(A_\sigma(s)) \det(A_r(s)) \det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)) \\ &\text{(resp. } \Psi(s) = \det(A_\sigma(s)) \det(A_r(s)) \text{)} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Par ailleurs, soit  $\mathcal{D}_{icn}$  le domaine d'instabilité formé par l'intérieur du contour de Nyquist et  $n_\sigma$  (resp.  $n_r$ ) le nombre de zéros de  $\det(A_\sigma(s))$  (resp.  $\det(A_r(s))$ ) situés dans  $\mathcal{D}_{icn}$ . Compte tenu que la description (7.13) est une factorisation première, les zéros de  $\det(A_\sigma(s))$  et de  $\det(A_r(s))$  situés dans  $\mathcal{D}_{icn}$  ne peuvent être des zéros de  $\Phi(s)$  situés dans  $\mathcal{D}_{icn}$ . Et donc tout zéro de  $\Phi(s)$  situé dans  $\mathcal{D}_{icn}$  est manifestement un zéro de  $\det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))$  situé dans  $\mathcal{D}_{icn}$  et tout pôle de  $\det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))$  situé dans  $\mathcal{D}_{icn}$  est un zéro de  $\det(A_\sigma(s))$  ou  $\det(A_r(s))$  situé dans  $\mathcal{D}_{icn}$  puisque  $\Phi(s)$  est un polynôme. Ainsi, le système à rétroaction standard n'admet aucun pôle situé dans  $\mathcal{D}_{icn}$  si et seulement si  $\det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))$  admet  $n_\sigma + n_r$  pôles dans  $\mathcal{D}_{icn}$  et tous ses zéros sont situés dans  $\mathcal{D}_{sa}$ . Et en vertu du critère de Nyquist de  $\det(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))$ , on peut conclure naturellement que le système à rétroaction standard n'admet aucun pôle dans  $\mathcal{D}_{icn}$  si et seulement si le lieu de Nyquist entoure l'origine, dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles instables du système et régulateur.

*CQFD*

## 7.4 Performances nominales.

Reprenons le système à rétroaction standard de la figure 7.2 que l'on peut représenter comme l'indique la figure et supposons que la condition d'admissibilité physique est satisfaite, les matrices  $I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$  et  $I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)$  sont inversibles. Alors les équations (7.1) peuvent se

mettre sous la forme

$$\left. \begin{aligned}
 & Y(s) = (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) (Y^*(s) - \mathcal{E}(s)) \\
 & \quad + (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \mathcal{G}(s)V_u(s) + (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} V_y(s) \\
 U(s) &= (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} \mathcal{R}(s) (Y^*(s) - V_y(s) - \mathcal{E}(s)) \\
 & \quad + (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)V_u(s) \\
 U_\sigma(s) &= \mathcal{R}(s) (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} (Y^*(s) - V_y(s) - \mathcal{E}(s)) \\
 & \quad + (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} V_u(s) \\
 E(s) &= (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} (Y^*(s) - V_y(s)) - \mathcal{G}(s) (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} V_u(s) \\
 & \quad + (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1} \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\mathcal{E}(s)
 \end{aligned} \right\} \text{SCS} \quad (7.16)$$



FIGURE 7.4 – Système de commande

### 7.4.1 Interprétation systémique

Le système à rétroaction est complètement caractérisé par ses fonctions de transfert en boucle ouverte, ses fonctions de différence de retour et ses fonctions de sensibilité usuelles respectivement définies comme suit.

- La fonction de transfert en boucle ouverte en entrée (resp. en sortie) est donnée par

$$\mathcal{G}_{oe}(s) \triangleq \mathcal{R}(s) \mathcal{G}(s) \quad \left( \text{resp. } \mathcal{G}_{os}(s) \triangleq \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) \right)$$

C'est la fonction de transfert obtenue en ouvrant la boucle du système de commande en entrée ( resp. en sortie). On notera que ces fonctions de transfert sont identiques dans le cas des systèmes monovariables, soit

$$\mathcal{G}_o(s) \triangleq \mathcal{R}(s) \mathcal{G}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$$

- La fonction de différence de retour en entrée (resp. en sortie) est donnée par

$$\mathcal{D}_{re}(s) \triangleq I_m + \mathcal{G}_{oe}(s) \quad \left( \text{resp. } \mathcal{D}_{rs}(s) \triangleq I_p + \mathcal{G}_{os}(s) \right)$$

C'est la fonction de transfert reliant la différence entre l'entrée et la sortie à l'entrée de la boucle ouverte en entrée (resp. en sortie) considérée. On notera que ces fonctions de transfert sont identiques dans le cas des systèmes monovariables, soit  $\mathcal{D}_r(s) \triangleq 1 + \mathcal{G}_o(s)$ .

- Les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande définies par les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire en sortie (resp. en entrée) données par

$$\mathcal{S}_s(s) \triangleq (I_p + \mathcal{G}_{os}(s))^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_s(s) \triangleq (I_p + \mathcal{G}_{os}(s))^{-1} \mathcal{G}_{os}(s)$$

et

$$\left( \text{resp. } \mathcal{S}_e(s) \triangleq (I_m + \mathcal{G}_{oe}(s))^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_e(s) \triangleq (I_m + \mathcal{G}_{oe}(s))^{-1} \mathcal{G}_{oe}(s) \right)$$

et les produits de la fonction de transfert du régulateur (resp. du système) par les fonctions de sensibilité, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) &\triangleq \mathcal{R}(s)\mathcal{S}_s(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}\mathcal{R}_e(s) \triangleq \mathcal{S}_e(s)\mathcal{R}(s) \\ \left( \text{resp. } \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s) &\triangleq \mathcal{G}(s)\mathcal{S}_e(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}\mathcal{G}_s(s) \triangleq \mathcal{S}_s(s)\mathcal{G}(s) \right) \end{aligned}$$

Ces fonctions de sensibilité sont reliées entre elles par les relations algébriques

$$\mathcal{S}_s(s) + \mathcal{T}_s(s) = I_p \quad \forall \in \mathbb{C} \quad (\text{resp. } \mathcal{S}_e(s) + \mathcal{T}_e(s) = I_m \quad \forall \in \mathbb{C})$$

$$\mathcal{T}_s(s) = \mathcal{G}_{os}(s) (I_p + \mathcal{G}_{os}(s))^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_e(s) = \mathcal{G}_{oe}(s) (I_m + \mathcal{G}_{oe}(s))^{-1}$$

$$\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) = \mathcal{S}\mathcal{R}_e(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s) = \mathcal{S}\mathcal{G}_s(s)$$

Et compte tenu de ces définitions de fonctions de sensibilité usuelles, les équations (7.16) du comportement d'entrée-sortie du système de commande standard peuvent se récrire comme suit

$$Y_{sas}(s) = \mathcal{G}_{sas}(s) U_{sas}(s) \quad (7.17)$$

où les séquences  $\{u_{sas}(t)\}$  et  $\{y_{sas}(t)\}$  sont respectivement constituées par ses diverses composantes d'entrée et de sortie comme suit

$$u_{sas}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ v_e(t) \\ v_s(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_{sas}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \\ u_\sigma(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

et  $\mathcal{G}_{sas}(s)$  n'est autre que la fonction de transfert correspondante

$$\mathcal{G}_{sas}(s) \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sr}(s) & \mathcal{G}_{spe}(s) & \mathcal{G}_{sps}(s) & \mathcal{G}_{sb}(s) \\ \mathcal{G}_{srr}(s) & \mathcal{G}_{srpe}(s) & \mathcal{G}_{srps}(s) & \mathcal{G}_{srb}(s) \\ \mathcal{G}_{es}(s) & \mathcal{G}_{epe}(s) & \mathcal{G}_{eps}(s) & \mathcal{G}_{eb}(s) \\ \mathcal{S}_{err}(s) & \mathcal{G}_{erpe}(s) & -\mathcal{S}_{erps}(s) & \mathcal{T}_{erb}(s) \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{T}_s(s) & \mathcal{S}\mathcal{G}_s(s) & \mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{T}_s(s) \\ \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{T}_s(s) & -\mathcal{T}_e(s) & -\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) \\ \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) & \mathcal{S}_e(s) & -\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) \\ \mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{S}\mathcal{G}_s(s) & -\mathcal{S}_s(s) & \mathcal{T}_s(s) \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

Cette équation peut être représentée comme l'indiquent les figures 7.5 et 7.8 qui mettent en exergue l'ensemble des fonctions de transfert qui caractérisent complètement le système asservi, notamment les effets de la séquence de référence, des perturbations et des bruits de mesure sur l'entrée et la sortie du système.

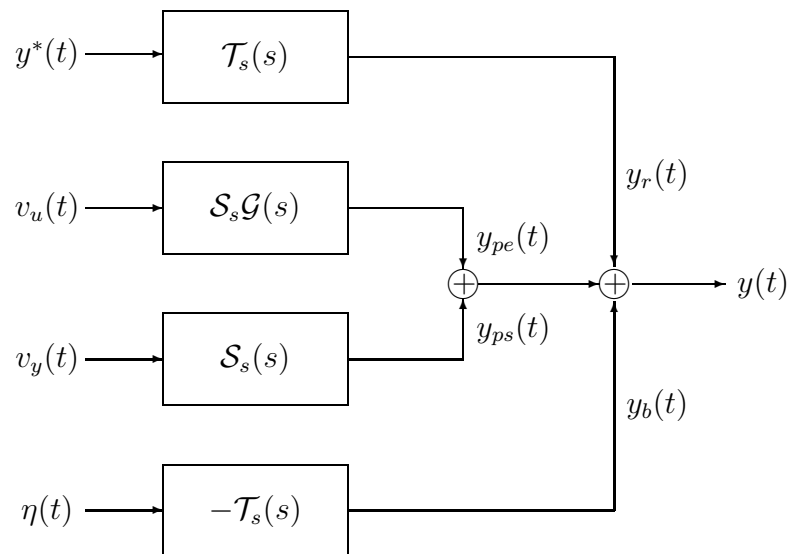


FIGURE 7.5 – Performances nominales en sortie du système

Les fonctions de sensibilité usuelles constituent ainsi des quantificateurs fréquentiels de performances nominales comme l'indiquent les faits suivants.

- La dynamique de poursuite du système asservi est définie à partir de la fonction de transfert

$$\mathcal{G}_{sr} : \{r(t)\} \mapsto \{y_r(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{sr}(s) = \mathcal{T}_s(s)$$

- La dynamique de régulation est définie à partir les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_{spe} : \{v_e(t)\} \mapsto \{y_{pe}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{spe}(s) = \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$$

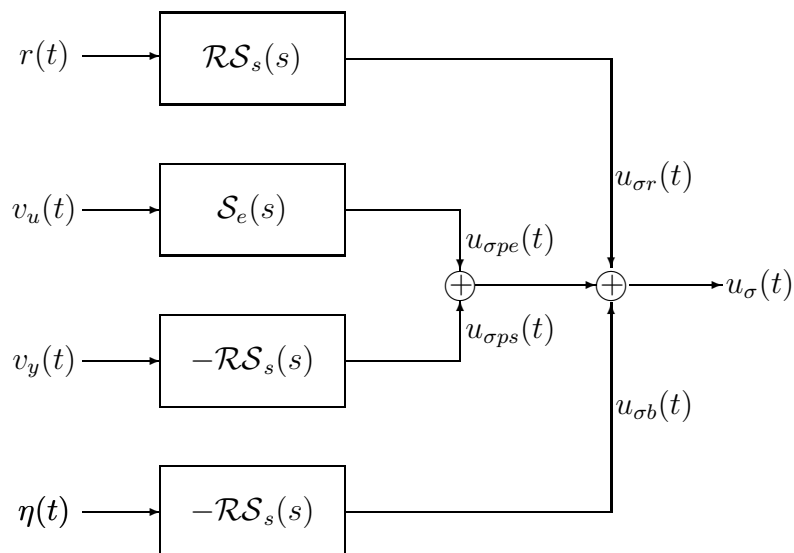


FIGURE 7.6 – Performances nominales en entrée du système

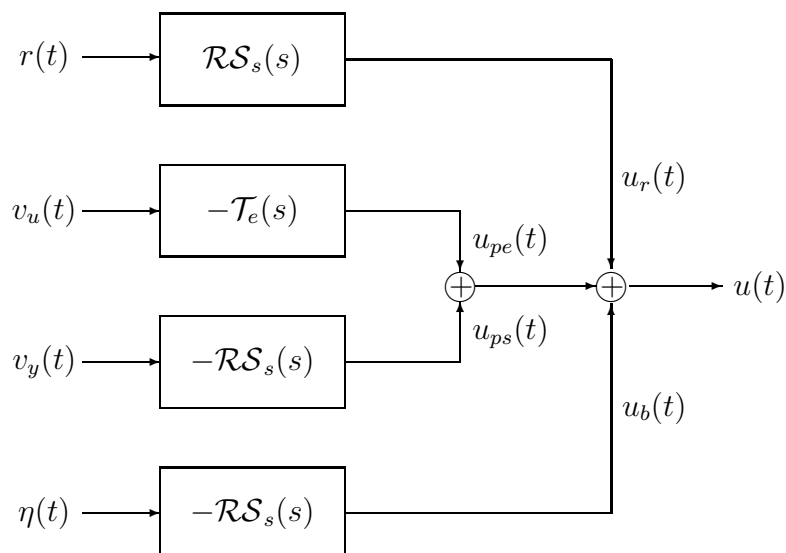


FIGURE 7.7 – Performances nominales en sortie du régulateur

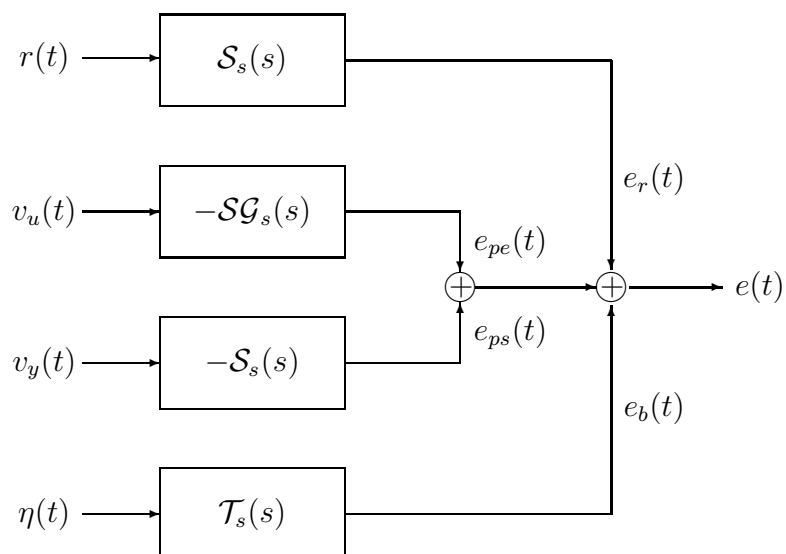


FIGURE 7.8 – Performances nominales en poursuite

et

$$\mathcal{G}_{sps} : \{v_s(t)\} \mapsto \{y_{ps}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{sps}(s) = \mathcal{S}_s(s)$$

- La sensibilité par rapport aux bruits de mesure est définie à partir des fonctions de transfert

$$\mathcal{G}_{sb} : \{\eta(t)\} \mapsto \{y_b(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{sb}(s) = -\mathcal{T}_s(s)$$

et

$$\mathcal{G}_{eb} : \{\eta(t)\} \mapsto \{u_{\sigma b}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{eb}(s) = -\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$$

- Les fonctions de transfert qui relient l'entrée du système à la séquence de référence et aux perturbations

$$\mathcal{G}_{er} : \{r(t)\} \mapsto \{u_{\sigma r}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{er}(s) = \mathcal{S}\mathcal{R}_e(s),$$

$$\mathcal{G}_{epe} : \{v_e(t)\} \mapsto \{u_{\sigma pe}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{epe}(s) = \mathcal{S}_e(s)$$

et

$$\mathcal{G}_{eb} : \{\eta(t)\} \mapsto \{u_{\sigma b}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{eb}(s) = -\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$$

- Les fonctions de transfert qui relient l'erreur de poursuite à la séquence de référence, aux perturbations et aux bruits de mesure

$$\mathcal{G}_{err} : \{r(t)\} \mapsto \{e_r(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{err}(s) = \mathcal{S}_s(s),$$

$$\mathcal{G}_{erpe} : \{v_e(t)\} \mapsto \{e_{pe}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{erpe}(s) = -\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s),$$

$$\mathcal{G}_{erps} : \{v_s(t)\} \mapsto \{e_{ps}(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{erps}(s) = -\mathcal{S}_s(s)$$

et

$$\mathcal{G}_{erb} : \{\eta(t)\} \mapsto \{e_b(t)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{erb}(s) = \mathcal{T}_s(s)$$

## 7.4.2 Recommandations usuelles

Ce bilan des transferts du système de commande nous amène naturellement aux recommandations suivantes indépendamment des approches de synthèse.

- $\mathcal{R}1$ . Une bonne réduction des effets des perturbations en sortie (resp. en entrée) sur la sortie du système requiert que la fonction de sensibilité usuelle  $\mathcal{S}_s(s)$  (resp.  $\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$ ) soit relativement petite, i.e.  $\sigma_{\max}(\mathcal{S}_s(s)) \leq \gamma_s$  (resp.  $\sigma_{\max}(\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)) \leq \gamma_e$ ).
- $\mathcal{R}2$ . Une bonne réduction des effets des perturbations en sortie (resp. en entrée) sur l'entrée du système requiert que la fonction de sensibilité usuelle  $\mathcal{S}_e(s)$  (resp.  $\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$ ) soit relativement petite, i.e.  $\sigma_{\max}(\mathcal{S}_e(s)) \leq \gamma_s$  (resp.  $\sigma_{\max}(\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)) \leq \gamma_e$ ).
- $\mathcal{R}3$ . Une bonne réduction des effets des bruits de mesure sur la sortie (resp. l'entrée) du système requiert que la fonction de sensibilité usuelle  $\mathcal{T}_s(s)$  (resp.  $\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$ ) soit relativement petite, i.e.  $\sigma_{\max}(\mathcal{T}_s(s)) \leq \gamma_s$  (resp.  $\sigma_{\max}(\mathcal{R}\mathcal{S}_e(s)) \leq \gamma_e$ ).

*La réduction des effets des perturbations et l'insensibilité aux bruits de mesure ne sont pas des objectifs antagonistes, comme on pourrait la penser à partir d'une interprétation naïve de la relation entre la fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire, puisque les spectres des perturbations et des bruits de mesure ne concernent pas les mêmes zones de fréquences. En effet, les spectres des perturbations sont dominants en basses fréquences, alors que les spectres des bruits de mesure sont dominants en hautes fréquences.*

*Les trois résultats suivants constituent l'essence d'une meilleure perception des performances nominales d'un système de commande compte tenu de la différence fondamentale entre les spectres des perturbations et des bruits de mesure. Le premier résultat met en évidence la relation entre la fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire.*

**Résultat 7.11** *Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire ne peuvent pas être petites simultanément comme le montrent les propriétés suivantes*

$$|\sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) - 1| \leq \sigma_{max}(\mathcal{T}(s)) \leq \sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) + 1$$

$$|\sigma_{max}(\mathcal{T}(s)) - 1| \leq \sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) \leq \sigma_{max}(\mathcal{T}(s)) + 1$$

$$|\sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) - \sigma_{max}(\mathcal{T}(s))| \leq 1$$

**La preuve** *de ce résultat peut être aisément faite à partir des propriétés des résultats ??, ??, ?? et ?? sur les valeurs singulières d'une matrice.*

**Remarque 7.5** *Le résultat 7.11 stipule que si la fonction de sensibilité est relativement petite (resp. grande) sur une zone de fréquence donnée, alors la fonction de sensibilité complémentaire est relativement grande (resp. petite) sur cette zone de fréquences. On peut toutefois négocier un compromis raisonnable entre une fonction de sensibilité et une fonction de sensibilité complémentaire relativement petites sur des zones de fréquences disjointes, en l'occurrence les basses et hautes fréquences.*

*Le second résultat montre que la petitesse des fonctions de sensibilité (resp. de sensibilité complémentaire) peut être exprimée d'une manière équivalente à partir des fonction de transfert en boucle ouverte associées.*

**Résultat 7.12** *Considérons un système de commande décrit par les équations 7.16 et supposons qu'il est asymptotiquement stable. Alors les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires vérifient les propriétés suivantes.*

$$\bar{\sigma}(\mathcal{S}_s(s)) \ll 1 \iff \underline{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) \gg 1$$

$$\bar{\sigma}(\mathcal{S}_e(s)) \ll 1 \iff \underline{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) \gg 1$$

et

$$\bar{\sigma}(\mathcal{T}_s(s)) \ll 1 \iff \bar{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) \ll 1$$

$$\bar{\sigma}(\mathcal{T}_e(s)) \ll 1 \iff \bar{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) \ll 1$$

**Preuve.** Notons d'abord que les fonctions de transfert en boucle ouverte vérifient les propriétés

$$\underline{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) - 1 \leq \underline{\sigma}(I_p + \mathcal{G}_{os}(s)) \leq \underline{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) + 1$$

$$\underline{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) - 1 \leq \underline{\sigma}(I_m + \mathcal{G}_{oe}(s)) \leq \underline{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) + 1$$

qui permettent d'en déduire que

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) + 1} \leq \bar{\sigma}(\mathcal{S}_o(s)) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(I_p + \mathcal{G}_{os}(s))} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) - 1} \quad \text{si } \underline{\sigma}(\mathcal{G}_{os}(s)) > 1$$

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) + 1} \leq \bar{\sigma}(\mathcal{S}_e(s)) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(I_m + \mathcal{G}_{oe}(s))} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) - 1} \quad \text{si } \underline{\sigma}(\mathcal{G}_{oe}(s)) > 1$$

On retrouve ainsi les propriétés du résultat relatives aux fonctions de sensibilité. Le cas des fonctions de sensibilité complémentaires peut être traité de en utilisant une démarche similaire à celle adoptée pour les fonctions de sensibilité.

CQFD

Le troisième résultat donne des approximations de l'évaluation de la fonction de transfert du système de commande en basses et en hautes fréquences.

**Résultat 7.13** Considérons un système de commande décrit par les équations 7.16 et supposons qu'il est asymptotiquement stable. Alors l'évaluation de sa fonction de transfert sur l'axe imaginaire vérifie les deux propriétés suivantes.

P1. Supposons que  $(\sigma_{max}(\mathcal{G}_{os}(j\omega)) \gg 1$  et  $\sigma_{max}(\mathcal{G}_{oe}(j\omega)) \gg 1)$  pour  $\omega \geq \omega_h$ , alors on a

$$\mathcal{G}_{sas}(j\omega) \approx \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{os}(j\omega) & \mathcal{G}(j\omega) & I_m & -\mathcal{G}_{os}(j\omega) \\ \mathcal{R}(j\omega) & -\mathcal{G}_{oe}(j\omega) & -\mathcal{R}(j\omega) & -\mathcal{R}(j\omega) \\ \mathcal{R}(j\omega) & -I_m & -\mathcal{R}(j\omega) & -\mathcal{R}(j\omega) \\ I_p & -\mathcal{G}(j\omega) & -I_p & \mathcal{G}_{os}(j\omega) \end{pmatrix}$$

P2. Supposons que  $(\sigma_{min}(\mathcal{G}_{os}(j\omega)) \gg 1$  et  $\sigma_{min}(\mathcal{G}_{oe}(j\omega)) \gg 1)$  pour  $0 < \omega \leq \omega_b$  et que  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{R}(s)$  sont inversibles sur l'axe imaginaire, alors on a

$$\mathcal{G}_{sas}(j\omega) \approx \begin{pmatrix} I_p & \mathcal{R}^{-1}(j\omega) & \mathcal{G}_{os}^{-1}(j\omega) & -I_p \\ \mathcal{G}^{-1}(j\omega) & -I_m & -\mathcal{G}^{-1}(j\omega) & -\mathcal{G}^{-1}(j\omega) \\ \mathcal{G}^{-1}(j\omega) & -\mathcal{G}_{oe}^{-1}(j\omega) & -\mathcal{G}^{-1}(j\omega) & -\mathcal{G}^{-1}(j\omega) \\ \mathcal{G}_{os}^{-1}(j\omega) & -\mathcal{R}^{-1}(j\omega) & -\mathcal{G}_o^{-1}(j\omega) & I_p \end{pmatrix}$$

**La preuve** de ce résultat est triviale compte tenu du résultat 7.12 modulo des approximations usuelles et les hypothèses requises sur les fonctions de transfert du système et du régulateur.

Les résultats 7.12 et 7.13 conduisent naturellement aux trois postulats suivants sur le rejet des perturbations et l'insensibilité aux bruits de mesure.



*P1. Un système de commande réalisant une bonne performances sur une zone de fréquences  $(0, \omega_\ell)$  réalise un rejet des perturbations sur la sortie du système requiert que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte en sortie soit relativement large sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en sortie du système sont importantes et que le gain du régulateur soit relativement élevé sur sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en entrée du système sont importantes, soit*

$$\sigma_{\min}(\mathcal{G}_{os}(s)) \gg 1 \text{ et } \sigma_{\min}(\mathcal{R}(s)) \gg 1$$

*P2. Un système de commande réalisant une bonne performances sur une zone de fréquences  $(0, \omega_\ell)$  réalise un rejet des perturbations sur l'entrée du système requiert que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte en entrée soit relativement large sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en entrée du système sont importantes et que le gain du système soit relativement élevé sur sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en sortie du système sont importantes, soit*

$$\sigma_{\min}(\mathcal{G}_{oe}(s)) \gg 1 \text{ et } \sigma_{\min}(\mathcal{R}(s)) \gg 1$$

*P3. Un système de commande est insensible aux bruits de mesures sur une zone de fréquences  $(\omega_h, \infty)$  requiert que les gains des fonctions de transfert en boucle ouverte soient relativement petits et que le gain du régulateur ait une valeur raisonnable sur toute la bande de fréquences considéré, soit*

$$\sigma_{\max}(\mathcal{G}_{os}(s)) \ll 1, \sigma_{\max}(\mathcal{G}_{oe}(s)) \ll 1 \text{ et } \sigma_{\max}(\mathcal{R}(s)) \leq \gamma$$

où le scalaire  $\gamma$  n'est pas grand et  $\omega_\ell$  et  $\omega_h$  sont des fréquences spécifiques qui dépendent du problème de commande considéré et des connaissances disponibles sur les perturbations, les bruts de mesure et les erreurs de modélisation. La figure 10.11 montre les exigences usuelles des systèmes de commande.

Ces postulats permettent de mettre en évidence les exigences d'une synthèse d'un système de commande réalisant une bonne compensation des perturbations et/ou d'une poursuite précise de séquences de référence avec une insensibilité aux bruits de mesure inéluctables sur la fonction de transfert en boucle ouverte.

## 7.5 Robustesse en stabilité.

Les modèles de commande ne sont qu'une approximation qui, aussi raisonnable qu'elle puisse être, ne pourrait décrire parfaitement la dynamique du système et l'influence de son environnement. Ce fait conduit naturellement à distinguer le système de commande réel du système de commande nominal qui lui est associé. Le premier est constitué par le système en rétroaction avec le régulateur comme l'indique la figure 7.10. Le système de commande nominal est obtenu à partir du système de commande réel en supposant que le système est parfaitement décrit par le modèle de commande comme l'indique la figure 7.11. Une bonne modélisation du système est donc impérative pour garantir une vraisemblance des performances du système de commande

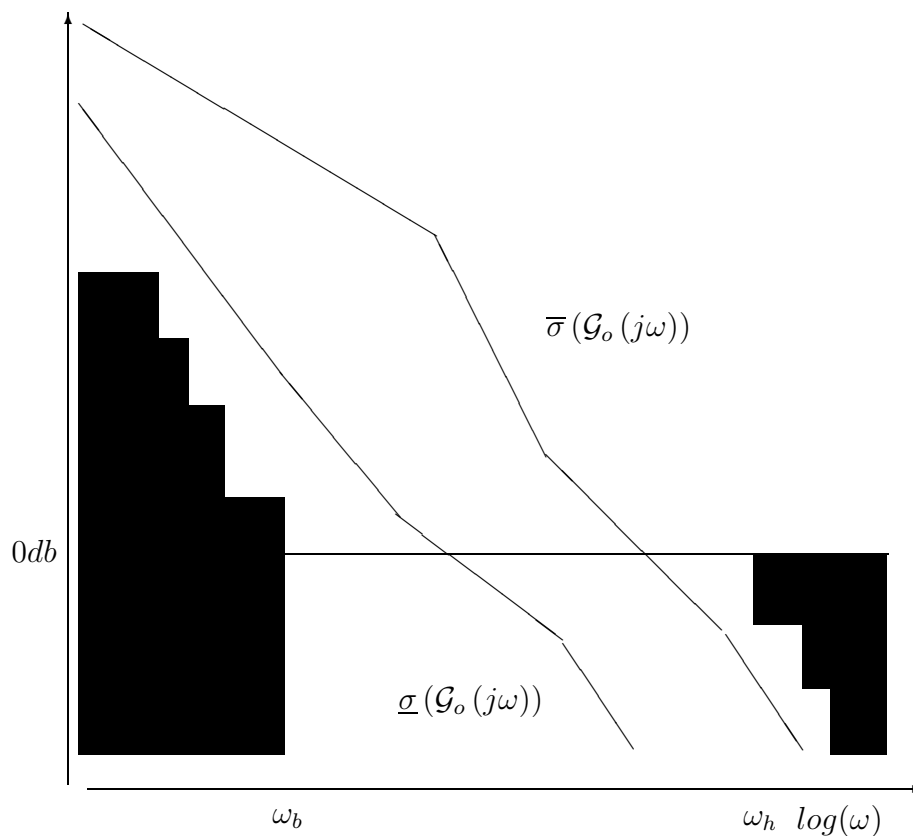


FIGURE 7.9 – Gain en boucle ouverte désiré

avec les performances requises.

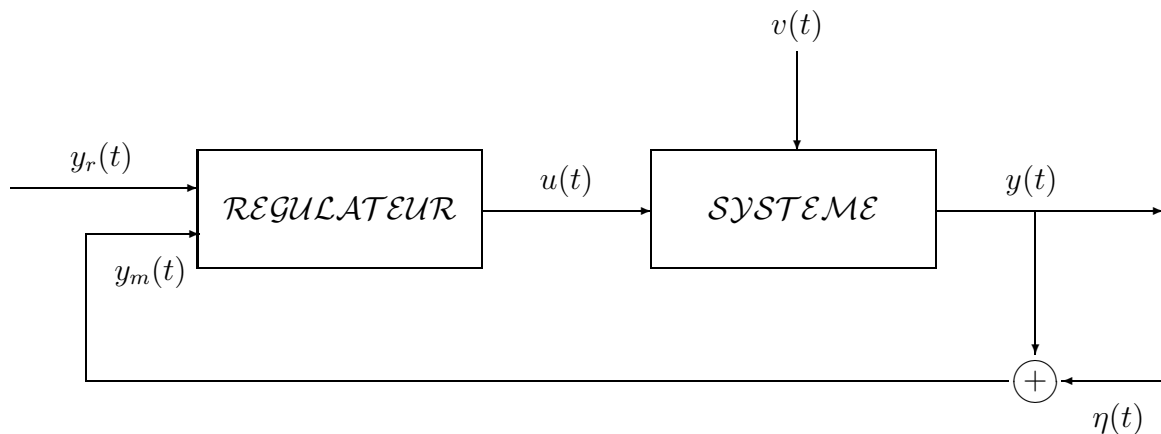


FIGURE 7.10 – Système de commande

*L'élaboration des modèles de commande linéaire des systèmes est généralement effectuée à partir d'une approche d'identification appropriée en trois phases.*

- *Une phase de définition de la classe des modèles linéaires compte tenu de la finalité du problème de modélisation. Cette phase constitue la toile du processus de modélisation que l'on imagine et réalise en exploitant judicieusement les connaissances préalables sur les processus physiques mis en jeu dans le système et les spécificités des méthodes*

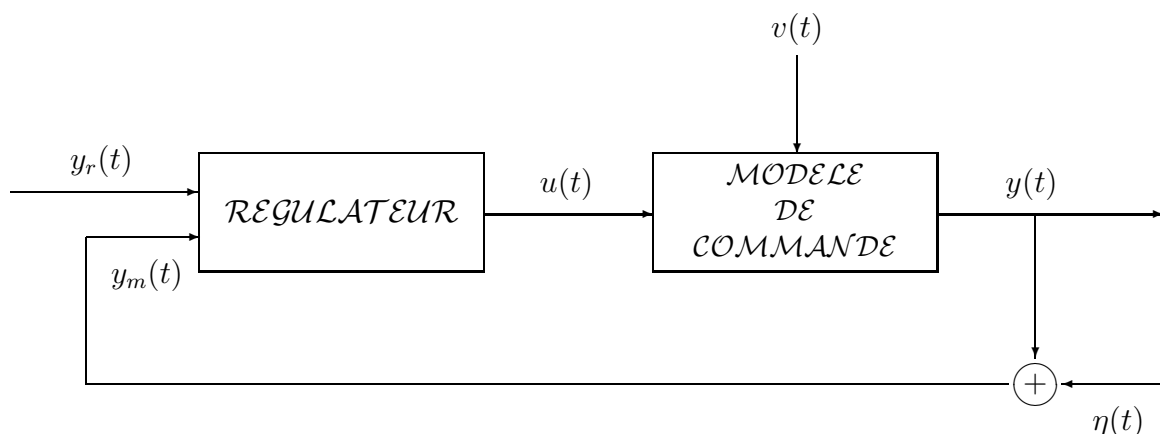


FIGURE 7.11 – Système de commande nominal

de synthèse adoptées. Un savoir faire en matière de traitement du signal est requis pour réaliser un traitement des données cohérent par rapport aux méthodes d'identification disponibles et affiner la définition de la classe des modèles si besoin est.

- Une phase de détermination des paramètres du modèle du système à partir des méthodes d'identification appropriées pour la classe des modèles considérée. Une attention particulière est réservée au choix du critère d'identification qui requiert éventuellement un planning d'expériences spécifiques. Cette phase est généralement aisément réalisée compte tenu du potentiel d'identification des systèmes disponibles aussi bien dans les environnements *Silab* et *Matlab*.
- Une phase de validation du modèle selon un planning expérimental adéquat. On commence d'abord par une validation par rapport aux connaissances préalables qui ont été particulièrement utilisées lors des étapes précédentes ou établies lors du traitement des données, i.e. les réponses impulsionnelle et harmonique. On procède ensuite à une validation par rapport aux propriétés de qualité de la méthode d'identification adoptée à partir d'une analyse de corrélation ou une analyse spectrale. Et enfin, on réalise une validation par rapport aux performances requises en imaginant des scénarios de test de robustesse et des performances dynamiques.

On peut ainsi obtenir une famille de modèles linéaires caractérisée par un modèle nominal et ses incertitudes que l'on peut désigner comme suit

$$\mathcal{F}_m \triangleq \{(\mathcal{G}(s), \Delta\mathcal{G}(s)) / \Delta\mathcal{G}(s) = W_g(s)\Delta(s)W_d(s) \text{ avec } \Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty\}$$

où  $W_g(s)$  et  $W_d(s)$  sont des fonctions de transfert propres et stables connues qui incorporent une information pertinente sur la dépendance fréquentielle et directionnelle de la fonction de transfert  $\Delta(s)$ . Le modèle d'incertitude

$$\Delta\mathcal{G}(s) = W_g(s)\Delta(s)W_d(s) \text{ avec } \Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$$

est relativement bien approprié aux erreurs de modélisation dites non-structurées par opposition aux erreurs de modélisation structurées qui portent sur les paramètres du modèle de commande ([42], [89]). La représentation des incertitudes du modèle de commande peut revêtir plusieurs formes comme l'indiquent les figures 7.12 à 7.17. On distingue les formes additives

directes et inverses, les formes multiplicatives directes et inverses à l'entrée et à la sortie du système. Le choix d'une forme ou d'une autre dépend de la connaissance du système et des propriétés du système de commande que l'on souhaite mettre en évidence. Les formes additives sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur toute la bande de fréquences. Les formes multiplicatives directes sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur les actionneurs et les capteurs, alors que les formes multiplicatives inverses sont généralement utilisées pour représenter les variations des paramètres du modèle de commande.

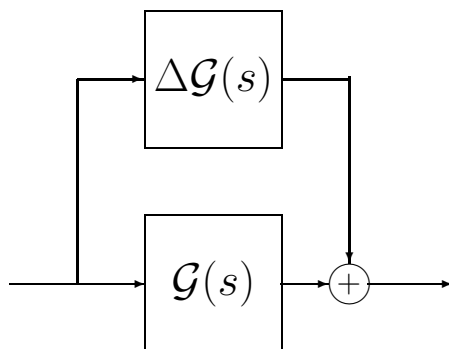


FIGURE 7.12 – Système de commande : forme additive directe

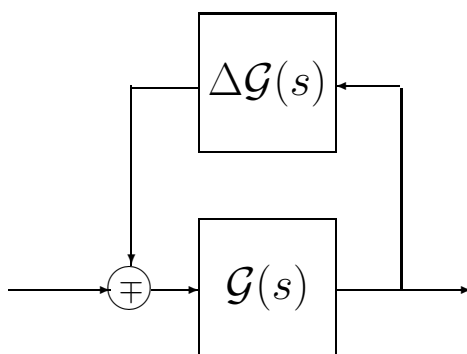


FIGURE 7.13 – Système de commande : forme additive inverse

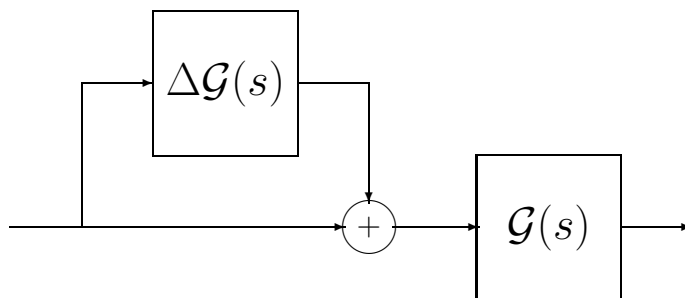


FIGURE 7.14 – Système de commande : forme multiplicative directe en entrée

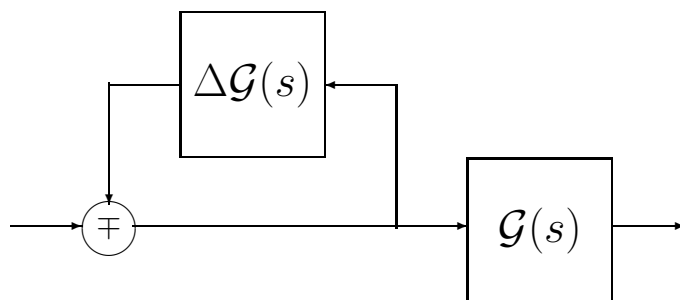


FIGURE 7.15 – Système de commande : forme multiplicative inverse en entrée

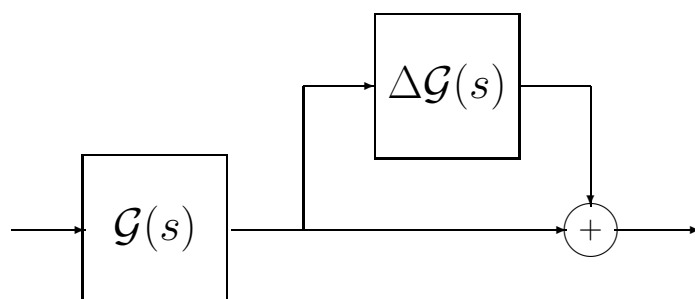


FIGURE 7.16 – Système de commande : forme multiplicative directe en sortie

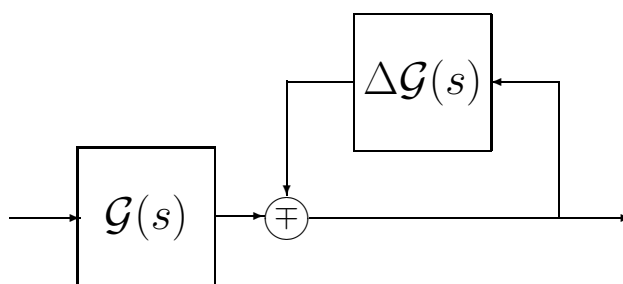


FIGURE 7.17 – Système de commande : forme multiplicative inverse en sortie

On peut montrer aisément que les systèmes de commande correspondants aux diverses formes d'incertitude peuvent se mettre sous la forme d'une rétroaction standard de l'incertitude  $\Delta\mathcal{G}(s)$  (resp.  $\Delta(s)$ ) avec la fonction de transfert  $\Sigma(s)$  (resp.  $\Sigma_w(s)$ ) comme l'indique la figure 7.18. On notera que la séquence de référence, les perturbations de charge et les bruits de mesure ont été volontairement occultés puisqu'ils n'ont aucune influence sur la stabilité. La fonction de transfert  $\Sigma(s)$  n'est autre que la fonction de sensibilité du système de commande compatible avec le type d'incertitude considéré comme le montre la table 7.1.

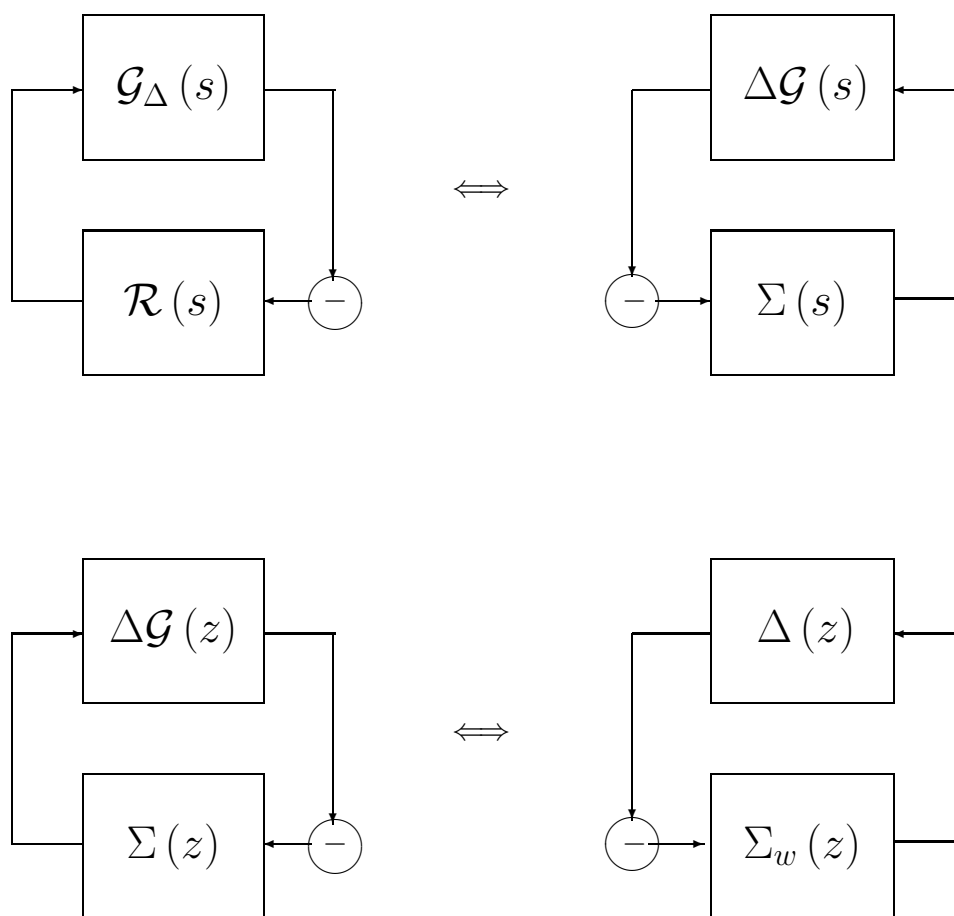


FIGURE 7.18 – Système à rétroaction standard pour la robustesse en stabilité

Le résultat fondamental suivant est communément utilisé dans les études de robustesse des systèmes linéaires asservis sous l'appellation du théorème du petit gain ([53], [89]). Il précise la classe des erreurs de modélisation admissibles en supposant que les incertitudes du modèle de commande  $\Delta(s)$  sont des fonctions de transfert propres et stables et fournit la valeur maximale admissible sur leur module.

**Résultat 7.14** Le système avec rétroaction de la figure 7.18 est stable pour toute fonction de transfert  $\Delta(s)$  propre, stable et telle que

Forme d'incertitude	Fonction de sensibilité $\Sigma(s)$
Forme additive directe	$\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) = \mathcal{S}_e\mathcal{R}(s)$
Forme additive inverse	$\mathcal{S}_s\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$
Forme multiplicative directe en entrée	$\mathcal{T}_e(s)$
Forme multiplicative directe en sortie	$\mathcal{T}_s(s)$
Forme multiplicative inverse en entrée	$\mathcal{S}_e(s)$
Forme multiplicative inverse en sortie	$\mathcal{S}_s(s)$

TABLE 7.1 – Quantificateurs de robustesse en stabilité

$$\sigma_{max}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

si et seulement la fonction de transfert  $\Sigma_w(s)$  est propre, stable et telle que

$$\sigma_{max}(\Sigma_w(j\omega)) \stackrel{\Delta}{=} \sigma_{max}(W_d(j\omega)\Sigma(j\omega)W_g(j\omega)) < 1 \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

**La preuve** de ce résultat est disponible dans tous les supports pédagogiques dédiés à stabilité et la commande robuste ([53], [89]).

**Remarque 7.6** La détermination de la fonction de transfert  $\Sigma(z)$  est effectuée modulo de simples manipulations algébriques. Pour illustrer cette simplicité, considérons le cas d'une incertitude additive directe où le système de commande réel peut être représenté comme le montre la figure 7.19. On aura alors

$$(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))U_i(s) = -\mathcal{R}(s)Y_i(s)$$

soit

$$U_i(s) = -(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}\mathcal{R}(s)Y_i(s) = \mathcal{R}(s)(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}Y_i(s)$$

Le système de commande réel peut être alors représenté comme le montre la figure 7.18 où la fonction de transfert  $\Sigma(z)$  est donnée par

$$\Sigma(s) = \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) = \mathcal{S}_s\mathcal{R}(s)$$

Compte tenu de la table 7.1, les résultats 7.12 et 7.13 nous amènent naturellement aux recommandations suivantes sur la robustesse en stabilité par rapport aux différentes formes d'erreurs de modélisation.

**R1.** Une bonne robustesse par rapport aux erreurs de modélisation que l'on peut représenter sous une forme multiplicative inverse en sortie (resp. sous une forme additive inverse) requiert que la fonction de sensibilité usuelle  $\mathcal{S}_s(s)$  (resp.  $\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$ ) soit relativement petite, i.e.

$$\sigma_{max}(W_d(s)\mathcal{S}_s(s)W_\sigma(s)) \leq 1 \text{ (resp. } \sigma_{max}(W_d(s)\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)W_\sigma(s)) \leq 1)$$

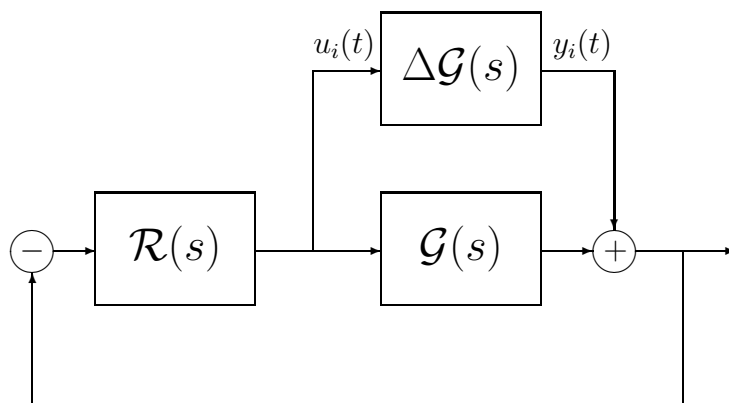


FIGURE 7.19 – Système de commande dans le cas d’une forme additive directe

R2. Une bonne robustesse par rapport aux erreurs de modélisation que l’on peut représenter sous une forme multiplicative directe en entrée (resp. sous une forme additive directe) requiert que la fonction de sensibilité usuelle  $\mathcal{S}_e(s)$  (resp.  $\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$ ) soit relativement petite, i.e.

$$\sigma_{\max}(W_d(s)\mathcal{S}_e(s)W_\sigma(s)) \leq 1 \quad (\text{resp. } \sigma_{\max}(W_d(s)\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)W_\sigma(s)) \leq 1)$$

R3. Une bonne robustesse par rapport aux erreurs de modélisation que l’on peut représenter sous une forme multiplicative directe en sortie (resp. sous une forme multiplicative directe en entrée) requiert que la fonction de sensibilité usuelle  $\mathcal{T}_s(s)$  (resp.  $\mathcal{T}_e(s)$ ) soit relativement petite, i.e.

$$\sigma_{\max}(W_d(s)\mathcal{T}_s(s)W_\sigma(s)) \leq 1 \quad (\text{resp. } \sigma_{\max}(W_d(s)\mathcal{T}_e(s)W_\sigma(s)) \leq 1)$$

## 7.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au concept de rétroaction des systèmes linéaires multivariables avec un souci permanent : apprécier d’une manière rationnelle et efficace la gestion du compromis entre les performances et la robustesse en stabilité. Les propriétés fondamentales du concept de rétroaction sont présentées d’une manière progressive et compréhensible après un focus sur les normes des systèmes qui sont communément utilisées pour l’analyse des performances nominales et de robustesse en stabilité des systèmes asservis.

- La notion d’admissibilité physique du système à rétroaction a été introduite au travers de la question essentielle : qu’est ce qu’un problème de rétroaction bien posé. Des conditions équivalentes d’admissibilité physique d’un système de rétroaction ont été données en fonction de l’approche adoptée, i.e. une approche d’état ou une approche polynomiale.
- La stabilité interne a été dûment étudiée à partir d’un ensemble de résultats fondamentaux qui ont été présentés d’une manière concise et précise. Des remarques pertinentes ont été faites pour mieux apprécier la problématique de stabilité interne des systèmes linéaires multivariables à rétroaction.



- Les performances nominales des systèmes à rétroaction ont été définies à partir de leur dynamique de poursuite et de l'ensemble des fonctions de sensibilité usuelles qui leur sont associées. La dynamique de poursuite (resp. les fonctions de sensibilité usuelles) d'un système asservi constitue (resp. constituent) l'essence de ses performances en poursuite (resp. en régulation par rapport aux perturbations et aux bruits de mesure). Le qualificatif nominal est justifié par le contexte de modélisation idéal dans lequel ces performances ont été définies, i.e. le système est parfaitement décrit par le modèle de commande.
- Le problème de robustesse en stabilité est particulièrement étudiée dans le cas où le système est décrit par une famille de modèles définie par un modèle nominal et une incertitude non structurée décrite par une fonction de transfert propre et stable. Il a été établi que les fonctions de sensibilité usuelles sont des quantificateurs de robustesse en stabilité.

## 7.7 Problèmes.

Les problèmes proposés ci après permettent de mieux appréhender le concept de normes des systèmes.

**Problème 7.1** En utilisant la décomposition en valeurs singulières d'une fonction de transfert, i.e.

$$G(s) = U(s)\Sigma(s)V^*(s)$$

montrer que

$$\text{trace}(G^*(s)G(s)) = \text{trace}(\Sigma^*(s)\Sigma(s))$$

**Problème 7.2** Donner les équations d'un système de commande dans le cas d'un régulateur à deux degrés de libertés, soit

$$U(s) = \mathcal{R}_r(s)Y^*(s) - \mathcal{R}_p(s)Y(s) \quad (7.21)$$

où  $\mathcal{R}_r(s)$  (resp.  $\mathcal{R}_p(s)$ ) désigne le composante du régulateur) en régulation (rep. en poursuite).

**Problème 7.3** Retrouvez les fonctions de transfert  $\Sigma(s)$  de la table 7.1 en fonction des différentes représentations des incertitudes du modèle de commande adoptées pour l'étude de robustesse en stabilité.

**Problème 7.4** On se propose d'effectuer une analyse ingénieur des performances nominales des systèmes de commande avec modèle interne que l'on peut représenter comme l'indique la figure 7.20.

Le système est décrit par

$$\text{SYS} \{ Y(s) = \mathcal{G}_u(s)U(s) + \mathcal{G}_v(s)V(t)$$

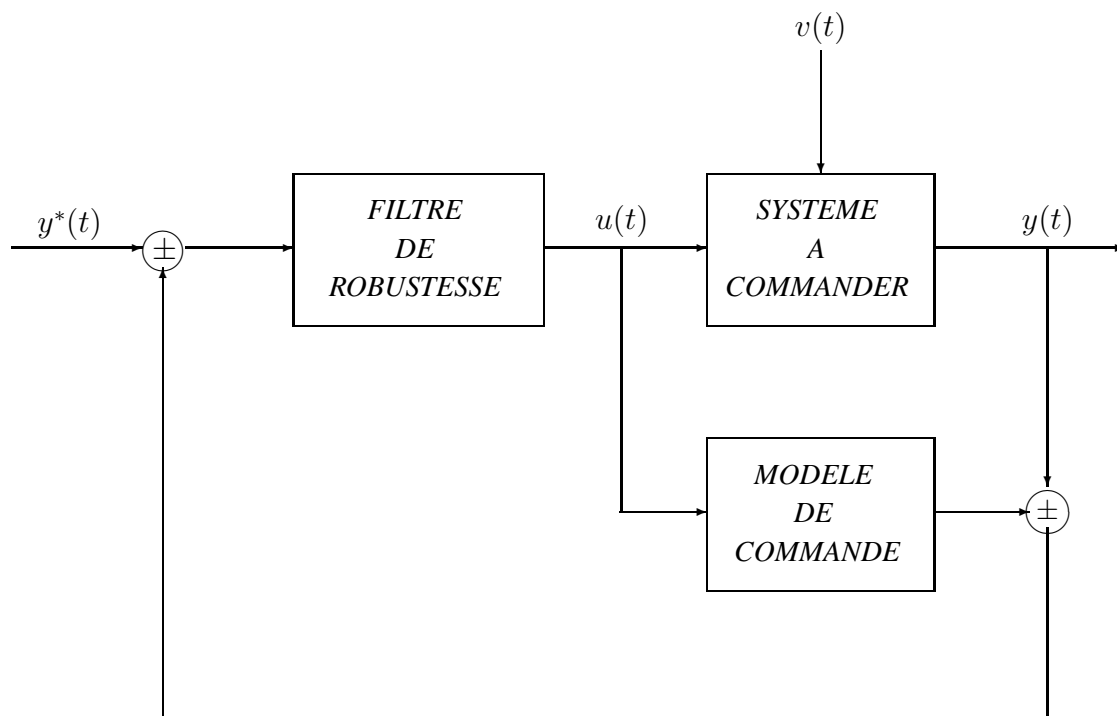


FIGURE 7.20 – Système de commande avec modèle interne

où  $\mathcal{G}_u(s)$  (resp.  $\mathcal{G}_v(s)$ ) désigne la fonction de transfert reliant l'entrée du système (resp. les perturbations) à la sortie du système, alors que le filtre de robustification est décrit par les fonction de transfert  $\mathcal{F}(s)$  avec  $\mathcal{F}(0)\mathcal{G}_u(0) = I_m$ .

On peut ainsi apprécier les propriétés fondamentales qui constituent l'essence de la popularité de la commande avec modèle interne tout en mettant en évidence ses limitations du point de vue de son applicabilité. Pour ce faire, on suggère de procéder comme suit.

- 1) Donner la loi de commande avec modèle interne et en déduire la fonction de transfert du régulateur.
- 2) Donner les équations du comportement d'entrée-sortie du système de commande avec modèle interne et en déduire les conditions de stabilité et les dynamiques de poursuite et de régulation sous-jacentes. On précisera la dynamique de régulation dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en sortie : une hypothèse usuelle pour les fans de la commande avec modèle.
- 3) Préciser la classe perturbations que l'on peut rejeter parfaitement ainsi que la classe des séquences de référence que l'on peut poursuivre parfaitement.
- 4) Donner les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande avec modèle interne et préciser comment spécifier la filtre de robustification pour réduire la sensibilité du système de commande aux bruits de mesure inéluctables.
- 5) Etablir un bilan ingénieur sur la commande avec modèle interne à partir des résultats fondamentaux que vous avez obtenu tout au long de cette analyse.

# Chapitre 8

## Commande linéaire quadratique

La commande optimale est une prouesse du développement des mathématiques pour les sciences de l'ingénieur à partir des principes du maximum et de programmation dynamique respectivement issus des travaux de recherche réalisés au sein des célèbres écoles de Pontriaguine et Bellman ([9], [69]). Cette culture a été judicieusement exploitée par Kalman pour initier une école d'estimation et de commande optimales pour les systèmes linéaires qui se distinguent par un problème d'optimisation quadratique dans un contexte stochastique approprié ([48], [49], [50], [51]). Depuis l'école de Kalman s'est vigoureusement développée au sein de la communauté d'automatique autour de la commande linéaire quadratique ( $\mathcal{LQ}$ ), de l'estimation linéaire à variance minimale ( $\mathcal{VM}$ ) et de la commande linéaire quadratique gaussienne ( $\mathcal{LQG}$ ) qui consiste en une loi de commande  $\mathcal{LQ}$  incorporant un estimateur d'état à  $\mathcal{VM}$  sous la bénédiction du principe d'équivalence certitude ([4], [8], [11], [42], [55], [72]). Ce potentiel fondamental constitue l'essence de l'ingénierie de commande  $\mathcal{LQG}$  qui a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications industrielles ([18]). On notera que la lettre  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{LQG}$  est essentiellement motivée par la nature stochastique des imperfections de modélisation, i.e. les perturbations d'état et les bruits de mesure.

Dans ce chapitre, on se propose de présenter les bases fondamentales de la commande  $\mathcal{LQ}$  en adoptant une approche déterministe qui consiste à occulter les imperfections de modélisation pour des considérations purement pédagogiques, i.e. en préservant les performances requises modulo une synthèse d'un système de commande insensible aux imperfections de modélisation. La structure du modèle des systèmes considérés est alors simplifiée comme suit sans aucune perte de généralité

$$\mathcal{MSLQD} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (8.1)$$

La commande  $\mathcal{LQ}$  (resp. commande linéaire quadratique déterministe ( $\mathcal{LQD}$ )) consiste à minimiser au sens d'un horizon glissant, pour la classe des systèmes (8.1), le critère quadratique suivant

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \quad (8.2)$$

où  $Q_c = Q_c^T \triangleq H_c^T H_c \geq 0$  et  $R_c = R_c^T > 0$  sont respectivement des matrices de pondération de l'état et de la commande en supposant que les variables d'état sont mesurables (resp. ne sont pas mesurables). La synthèse d'un système de commande  $\mathcal{LQD}$  requiert donc une estimation précise des variables d'état du système par un observateur  $\mathcal{LQ}$  conçu en vertu de la dualité à partir d'une synthèse  $\mathcal{LQ}$ .

La présentation de la commande  $\mathcal{LQD}$  sera faite d'une manière progressive en quatre temps avec une attention particulière aux aspects de synthèse pertinents pour l'ingénierie des systèmes. Le premier temps est consacré à la commande  $\mathcal{LQ}$  avec un focus sur les propriétés remarquables du système de commande sous-jacent. Le deuxième temps est réservé à la commande  $\mathcal{LQD}$  avec une attention particulière à l'observateur  $\mathcal{LQ}$  et la reformulation du problème de commande sous la forme d'une synthèse  $\mathcal{H}_2$ . Le troisième temps est dédié au problème de recouvrement du transfert de la boucle ( $\mathcal{RTB}$ ) ouverte du système de commande  $\mathcal{LQ}$  en entrée (resp. de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  en sortie) du système qui constitue l'essence de la robustesse intrinsèque à la synthèse  $\mathcal{LQ}$ . Ceci nous amène naturellement à la commande  $\mathcal{LQD}/\mathcal{RTB}$ . Le quatrième temps est consacré aux aspects de synthèse de la commande  $\mathcal{LQD}$ , notamment l'affinement des performances dynamiques et de la robustesse avec une digression sur la spécification des paramètres de synthèse.

## 8.1 Commande $\mathcal{LQ}$

L'étude du problème de commande  $\mathcal{LQ}$  est d'abord faite dans le cas d'un horizon fini avec des remarques pertinentes sur sa faisabilité pour la commande des systèmes. Le résultat fondamental correspondant est ensuite étendu au cas d'un horizon infini à partir d'une étude du comportement asymptotique de la loi de commande à horizon fini. Une analyse vigoureuse du système de commande  $\mathcal{LQ}$  est enfin effectuée pour exhiber ses propriétés vitales pour l'ingénierie des systèmes.

### 8.1.1 Commande $\mathcal{LQ}$ à horizon fini

Le problème de commande  $\mathcal{LQ}$  a été étudié à partir du comportement asymptotique de la loi de commande  $u : \tau \in [t, t+T] \rightarrow u(\tau) \in \mathbb{R}^m$  qui minimise, pour le système (8.1) en supposant que toutes les variables d'état sont mesurables, le critère quadratique à horizon infini

$$J(\{u(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}) = x^T(t+T)P_f x(t+T) + \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \quad (8.3)$$

où  $P_f = P_f^T \geq 0$  est une pondération sur l'état final. Le résultat fondamental suivant donne la solution de ce problème de commande  $\mathcal{LQ}$  tout en précisant la valeur optimale du critère.

**Résultat 8.1** La séquence de commande  $\{u(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}$  qui minimise le critère quadratique (8.3), pour le système (8.1) en supposant que toutes les variables d'état sont mesurable, est donnée par la loi de commande

$$u(\tau) = -K(\tau)x(\tau) \quad (8.4)$$

avec

$$K(\tau) = R_c^{-1}G^T P(\tau) \quad (8.5)$$

$$-\rho P(\tau) = P(t)F + F^T P(\tau) - P(\tau)GR_c^{-1}G^T P(\tau) + Q_c \text{ avec } P(T) = P_f \quad (8.6)$$

Quant au minimum du critère quadratique obtenu avec une telle loi de commande, il vaut

$$J(\{u(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}) = x^T(t)P(t)x(t) \quad (8.7)$$

**Preuve.** La preuve est généralement effectuée en invoquant le principe du maximum ou le principe de programmation dynamique ([9], [69]). Pour des considérations de simplicité, on effectuera plutôt une justification élégante. Pour ce faire, on notera d'abord que l'équation (8.6) est une  $\mathcal{EDR}$  et que la séquence matricielle  $\{P(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}$  est bien définie pour tout  $[t, t+T] \subset \mathbb{R}^+$  ([10], [13]). Ensuite, on notera que

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \frac{d}{d\tau} (x^T(\tau)P(\tau)x(\tau)) d\tau &= \int_t^{t+T} \left( (Fx(\tau) + Gu(\tau))^T P(\tau)x(\tau) + x^T(\tau)\rho P(\tau)x(\tau) \right. \\ &\quad \left. + x^T(\tau)P(\tau)(Fx(\tau) + Gu(\tau)) \right) d\tau \\ &= x^T(t+T)P(t+T)x(t+T) - x^T(t)P(t)x(t) \\ &= J(\{u(\tau)\}_{t \in [t, t+T]}) - x^T(t)P(t)x(t) \\ &\quad - \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Et comme  $P(t+T) = P_f$ , on aura

$$\begin{aligned} J(\{u(\tau)\}_{t \in [t, t+T]}) &= x^T(t)P(t)x(t) \\ &\quad + \int_t^{t+T} \left( \begin{pmatrix} u(\tau) \\ x(\tau) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_c & G^T P(\tau) \\ P(\tau)G & P(\tau)G R_c^{-1} G^T P(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ x(\tau) \end{pmatrix} \right) d\tau \\ &= x^T(t)P(t)x(t) \\ &\quad + \int_t^{t+T} (u(\tau) + R_c^{-1}G^T P(\tau)x(\tau))^T R_c (u(\tau) + R_c^{-1}G^T P(\tau)x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

La minimisation du critère 8.7 est donc bien obtenue avec la séquence de commande donnée par les équations (8.4)-(8.6).

*CQFD*

Les remarques suivantes permettent de conforter le résultat fondamental de la commande  $\mathcal{LQ}$  tout en précisant quelques expressions usuelles de la séquence matricielle  $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}^{n \times n}}$ .

**Remarque 8.1** La commande  $\mathcal{LQ}$  à horizon fini est généralement utilisée au sens d'un horizon fuyant. A chaque instant  $\tau$ , on détermine la commande  $u(\tau)$  à partir de la séquence  $\{u(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}$  qui minimise le critère quadratique (8.3). On aura alors une commande avec retour d'état stationnaire

$$u(t) = -Kx(t) \text{ avec } K = R_c^{-1}G^T P$$

où la matrice  $P$  n'est autre que la solution de l'EDR (8.6) à l'instant  $t$ , pour le système (8.1) en supposant que toutes les variables d'état sont mesurables, avec  $P(t+T) = Q_f$ , i.e. la matrice  $P(t)$ .

**Remarque 8.2** Le problème de commande optimale aurait pu être directement développé pour les systèmes linéaires variants dans le temps (2.101) pourvu qu'ils soient uniformément commandables. La loi de commande correspondante est alors donnée par

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

$$K(t) = R_c^{-1}G^T(t)P(t)$$

$$-\rho P(t) = P(t)F(t) + F^T(t)P(t) - P(t)G(t)R_c^{-1}G^T(t)P(t) + Q_c$$

avec  $P(0) = P_o = P_o^T$ . Cette remarque est particulièrement vitale pour la conception des algorithmes de commande adaptative issus d'une combinaison d'une synthèse  $\mathcal{LQ}$  et d'un algorithme d'adaptation paramétrique approprié ([45]).

### 8.1.2 Commande $\mathcal{LQ}$ à horizon infini

Rappelons que le problème de commande  $\mathcal{LQ}$  à horizon infini consiste à minimiser le critère quadratique (8.2) pour le système (8.1) en supposant que toutes les variables d'état sont mesurables. Le résultat fondamental suivant montre que ce problème peut être résolu en étudiant la convergence des solutions de l'EDR (8.8), i.e. le comportement asymptotique de la séquence matricielle  $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ , comme le montre le résultat fondamental suivant

**Résultat 8.2** Considérons le problème de commande  $\mathcal{LQ}$  à horizon infini et supposons que la réalisation  $(F, G, H_c)$  est stabilisable et détectable, alors il admet une solution donnée par la loi de commande avec retour d'état stationnaire

$$u(t) = -Kx(t) \quad (8.8)$$

$$K = R_c^{-1}G^T P F \quad (8.9)$$

$$P F + F^T P - P G R_c^{-1} G^T P + Q_c \quad (8.10)$$

Par ailleurs, le système de commande avec retour d'état correspondant est asymptotiquement stable, i.e.

$$\mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_{sa} \quad (8.11)$$

et le coût optimal associé est nul avec

$$\int_0^\infty (x^T(t)Q_c x(t) + u^T(t)R_c u(t)) dt = x^T(0)P x(0) \quad (8.12)$$

**Preuve.** Notons d'abord que si la séquence matricielle  $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  converge, alors on aura  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P$  où  $P$  n'est autre qu'une solution de l' $\mathcal{EAR}$  (8.10). Et compte tenu du résultat C.11, on peut conclure que  $P$  est une matrice symétrique définie positive et stabilisante pourvu que l' $\mathcal{EDR}$  (8.6) soit initialisée par une matrice symétrique définie positive  $P_0$ . Par ailleurs, l' $\mathcal{EAR}$  (8.10) peut se récrire sous la forme

$$(F - GK)^T P + P(F - GK) = -(Q_c + K^T R_c K) \quad (8.13)$$

qui n'est autre que l'équation de Lyapunov associé au système de commande  $\mathcal{LQ}$  et qui permet d'exprimer aisément le critère quadratique (8.2) comme suit

$$\begin{aligned} TJ(u(t)) &= \int_t^{t+T} \left( x^T(\tau) Q_c x(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau) \right) d\tau \\ &= \int_t^{t+T} \left( x^T(\tau) (Q_c + K^T R_c K) x(\tau) \right) d\tau \\ &= - \int_t^{t+T} \frac{d}{d\tau} \left( x^T(\tau) P x(\tau) \right) d\tau \\ &= x^T(t) P x(t) - x^T(t+T) P x(t+T) \end{aligned}$$

On en déduit alors naturellement que le coût optimal est bien nul et qu'il vérifie bien la propriété (8.12) en vertu de la stabilité du système de commande  $\mathcal{LQ}$ .

*CQFD*

**Remarque 8.3** Si la réalisation  $(F, G, H_c)$  est stabilisable et détectable, alors on peut montrer aisément que la fonction

$$V : x(t) \in \mathcal{R}^n \rightarrow V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \in \mathcal{R}^+$$

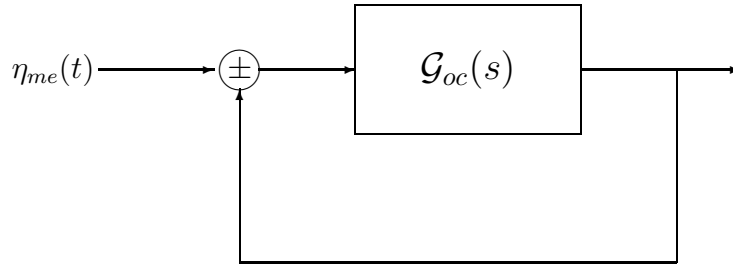
vérifie toute les propriétés d'une fonction de Lyapunov pour le système de commande  $\mathcal{LQ}$ . Pour ce faire, on notera que l'équation algébrique de Riccati peut se récrire sous la forme

$$(F - GK)^T P (F - GK) - P = -(Q_c + K^T R_c K)$$

qui n'est autre que l'équation de Lyapunov associé au système de commande  $\mathcal{LQ}$  puisqu'elle admet une solution symétrique, définie positive et stabilisante unique.

### 8.1.3 Propriétés fondamentales.

Les systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  peuvent être représentés par le système à rétroaction de la figure 8.1 où  $\mathcal{G}_{oc}(s)$  est la fonction de transfert en boucle ouverte en entrée du système, soit  $\mathcal{G}_{oc}(s) = K(sI_n - F)^{-1} G$ , et  $\{\eta_{me}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  représente toutes les imperfections de modélisation que l'on peut ramener en entrée du système.

FIGURE 8.1 – Système de commande  $\mathcal{LQ}$ 

Le résultat fondamental suivant met en exergue les propriétés remarquables d'un système de commande avec retour d'état intrinsèques à une synthèse  $\mathcal{LQ}$ .

**Résultat 8.3** Considérons le système de commande  $\mathcal{LQ}$  composé du système (8.1) en boucle fermée avec la loi de commande  $\mathcal{LQ}$  (8.8)-(8.10) et posons  $\mathcal{M}_{oc}(s) = H_c (sI_n - F)^{-1} G$ . Alors les propriétés suivantes sont vérifiées pourvu que la réalisation d'état  $(F, G, H_c)$  soit stabilisable et détectable

$\mathcal{P}1$ . L'égalité de différence de retour

$$(I_m + \mathcal{G}_{oc}(-s))^T R_c (I_m + \mathcal{G}_{oc}(s)) = R_c + (\mathcal{M}_{oc}(-s))^T (\mathcal{M}_{oc}(s)) \quad (8.14)$$

est vérifiée pour tout  $s \in \mathcal{C}$ .

$\mathcal{P}2$ . La fonction de sensibilité du système de commande vérifie la relation suivante

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_c(j\omega)) \leq \frac{\lambda_{max}(R_c)}{\lambda_{min}(R_c)} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R} \quad (8.15)$$

$\mathcal{P}3$ . La configuration modale du système de commande peut être obtenue à partir de l'équation

$$\frac{P_{cclq}(-s)P_{cclq}(s)}{P_{csys}(-s)P_{csys}(s)} = \frac{1}{\det(R_c)} \det\left(R_c + (\mathcal{M}_{oc}(-s))^T (\mathcal{M}_{oc}(s))\right) \quad (8.16)$$

avec

$$P_{cclq}(s) = \det(sI_n - F + GK) \text{ et } P_{csys}(s) = \det(sI_n - F) \quad (8.17)$$

$\mathcal{P}4$ . La fonction de transfert en boucle ouverte en entrée  $\mathcal{G}_{oc}(s)$  admet un retard minimal et ses zéros sont nécessairement situés dans le domaine de stabilité, soit

$$KG \neq 0 \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{oc}(s)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

**Preuve.** La propriété  $\mathcal{P}1$  est obtenue à partir d'un ensemble de manipulations algébriques adéquates sur l' $\mathcal{EAR}$  (8.10)

$$PF + F^T P - PGR_c^{-1}G^T P + Q_c = 0$$



On commence par ajouter le terme nul  $P s I_n - s I_n P$  au premier membre de l' $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{R}$

$$P (s I_n - F) + (-s I_n - F)^T P + P G R_c^{-1} G^T P = Q_c$$

Ensuite, on multiplie à gauche par  $G^T (-s I_n - F)^{-T}$  et à droite par  $(s I_n - F)^{-1} G$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} G^T (-s I_n - F)^{-T} P G + G^T P (s I_n - F)^{-1} G + G^T (-s I_n - F)^{-T} P G R_c^{-1} G^T P (s I_n - F)^{-1} G \\ = \\ G^T (-s I_n - F)^{-T} Q_c (s I_n - F)^{-1} G \end{aligned}$$

Enfin on ajoute  $R_c$  aux deux membres de l'équation obtenue et on factorize le premier membre, soit

$$\begin{aligned} \left( I_m + G^T (-s I_n - F)^{-T} P G R_c^{-1} \right) R_c \left( I_m + R_c^{-1} G^T P (s I_n - F)^{-1} G \right) \\ = \\ R_c + G^T (-s I_n - F)^{-T} Q_c (s I_n - F)^{-1} G \end{aligned}$$

Et puisque  $K = R_c^{-1} G^T P$ , on aura

$$\begin{aligned} \left( I_m + G^T (-s I_n - F)^{-T} K^T \right) R_c \left( I_m + K (s I_n - F)^{-1} G \right) \\ = \\ R_c + G^T (-s I_n - F)^{-T} Q_c (s I_n - F)^{-1} G \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation de différence de retour (8.14).

La preuve de la propriété  $\mathcal{P}2$  est triviale puisque  $\mathcal{M}_{oc}^T(-j\omega)\mathcal{M}_{oc}(-j\omega)$  est une forme hermitienne semi-définie positive compte tenu du fait que  $Q_c = Q_c^T \geq 0$  et  $\mathcal{M}_{oc}^T(-j\omega) = \mathcal{M}_{oc}^T(j\omega)$ . On aura alors

$$(I_m + G_{oc}(-j\omega))^T R_c (I_m + G_{oc}(j\omega)) \geq R_c \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

Ce qui permet de retrouver la propriété escomptée compte tenu de l'expression de la fonction de sensibilité en entrée du système de commande  $\mathcal{L}\mathcal{Q}$  et de la structure particulière de la matrice de pondération de la commande, soit  $R_c = \rho_c I_m$ .

La propriété  $\mathcal{P}3$  est obtenue à partir de quelques manipulations algébriques sans avoir à résoudre l' $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{R}$  (8.10). En effet, on a

$$\det \left( (I_m + G_{oc}(-s))^T R_c (I_m + G_{oc}(s)) \right) = \det \left( R_c + G^T (-s I_n - F)^{-T} Q_c (s I_n - F)^{-1} G \right)$$

soit

$$\det \left( (I_m + G_{oc}(-s))^T (I_m + G_{oc}(s)) \right) = \frac{\det \left( R_c + \mathcal{M}_{oc}^T(-s)\mathcal{M}_{oc}(s) \right)}{\det(R_c)}$$

Par ailleurs, on a

$$\det(I_m + G_{oc}(s)) = \det(I_m + K (s I_n - F)^{-1} G) = \det(I_n + (s I_n - F)^{-1} G K)$$

soit

$$\det(I_m + G_{oc}(s)) = \frac{\det(sI_n - F + GK)}{\det(sI_n - F)} = \frac{P_{cclq}(s)}{P_{csys}(s)}$$

Ce qui conduit au résultat considéré.

Pour la propriété  $\mathcal{P}4$ , la première partie est basée sur la propriété suivante de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système de commande  $\mathcal{LQ}$

$$KG = R_c^{-1}G^T P G > 0 \text{ puisque } R_c = R_c^T > 0 \text{ et } P = P^T > 0$$

Quant à la seconde partie, c'est une émanation naturelle du théorème du module maximal de l'analyse complexe (voir [4]).

*CQFD*

Ces propriétés permettent de faire un ensemble de remarques pour un ingénieur intéressé par la commande  $\mathcal{LQ}$ .

**Remarque 8.4** La propriété  $\mathcal{P}1$  est l'essence de la propriété  $\mathcal{P}2$  qui constitue le capital d'une synthèse  $\mathcal{LQ}$ , en l'occurrence une marge de stabilité maximale dans le cas d'une matrice de pondération diagonale sur la commande. En effet, si  $R_c = \rho_c I_m$ , alors on peut exprimer la propriété  $\mathcal{P}2$  comme suit

$$\sigma_{\min}(I_m + G_{oc}(j\omega)) \geq 1 \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}^+$$

Dans le cas des systèmes monovariables, cette nouvelle expression stipule que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte des systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  se trouve à l'extérieur d'un cercle de centre le point critique et de rayon unitaire. Ceci correspond à une marge de module maximale,  $MM = 1$ , et donc une marge de gain  $MG \in [\frac{1}{2}, \infty[$  et une marge de phase  $MP \geq \frac{\pi}{3}$ .

**Remarque 8.5** La propriété  $\mathcal{P}3$  permet de déterminer aisément la configuration modale d'un système de commande  $\mathcal{LQ}$  lorsque la matrice  $Q_o$  (resp.  $R_o$ ) est relativement petite puisque

$$Q_c \approx O_n \implies P_{polq}(-s)P_{polq}(s) \approx P_{psys}(-s)P_{psys}(s)$$

$$\left( \text{resp. } R_c \approx O_n \implies P_{colq}(-s)P_{colq}(s) \approx P_{zmoc}(-s)P_{zmoc}(s) \right)$$

où  $P_{zmoc}(s)$  désigne le polynôme des zéros de la fonction de transfert  $\mathcal{M}_{oc}(s)$ . Ainsi, on retrouve d'une part les modes stables du système avec des modes stables issus de la réflexion des modes instables du système par rapport à l'axe imaginaire (resp. les zéros stables de la fonction de transfert  $\mathcal{M}_{oc}(s)$  avec des modes stables issus de la réflexion des zéros instables de la fonction de transfert  $\mathcal{M}_{oc}(s)$  par rapport à l'axe imaginaire).

Ces configurations modales permettent de conforter notre potentiel de prudence par rapport aux intuitions fallacieuses, notamment

I1. La séquence de commande à énergie minimale est identiquement nulle, i.e.

$$Q_c \approx O_n \implies u(t) = 0 \text{ pour tout } t$$

I2. Les systèmes de commande conçus sans aucune préoccupation à l'énergie de commande, qui est jugée bon marché pour être pénalisée, sont relativement rapides, i.e.

$$R_c \approx O_n \implies \exists \lambda \gg 1 / \mathcal{CM}(SCLQ) \subset \mathcal{S}_\lambda \stackrel{\Delta}{=} \{s \in \mathbb{C} / \Re(s) \leq -\lambda\} \subset \mathcal{D}_{sa}$$

En effet, la première intuition est vraie dans le cas des systèmes asymptotiquement stables. Dans le cas des systèmes instables, la réflexion des pôles instables peut conduire à un système de commande relativement rapide qui requiert une énergie relativement importante, e.g. on ne peut rétablir l'équilibre d'un pendule inversé sans fournir un minimum d'énergie. Quant à la seconde intuition, elle occulte le cas des systèmes qui admettent des zéros au voisinage de l'axe imaginaire qui deviennent des modes dominant dans le cas d'une commande bon marché.

**Remarque 8.6** La propriété P4 et une expression de la vulnérabilité d'une synthèse LQ, en l'occurrence les fonctions de transfert en boucle ouverte des systèmes de commande LQ exhibent manifestement une décroissance de -20 db/décade aux hautes fréquences qui ne favoriserait pas la robustesse par rapport aux imperfections de modélisation inéluctables, notamment des modes souples occultés. Cette vulnérabilité de la synthèse LQ est essentiellement due au fait que les matrices de pondération sont constantes comme l'indique l'expression du critère quadratique (8.2) en vertu du théorème de Parseval, soit

$$J(u(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X^T(j\omega) Q_c X(j\omega) + U^T(j\omega) R_c U(j\omega)) d\omega \quad (8.18)$$

En effet, il apparaît alors clairement que l'on ne peut pas affiner les propriétés fréquentielles de la commande LQ avec des matrices de pondération constantes.

**Remarque 8.7** Une procédure intéressante pour la spécification des paramètres de synthèse a été proposée par Larminat à partir d'une interprétation énergétique du grammien de commandabilité du système, notamment l'énergie minimale requise pour transférer l'état du système de l'origine à un état donné ([18]). Elle consiste à réduire les paramètres de synthèse à un horizon temporel  $T_c$  comme suit comme suit

$$Q_c = \left( T_c \int_0^{\infty} (H e^{Ft} G) (H e^{Ft} G)^T e^{-\frac{t}{T_c}} dt \right)^{-1} \quad \text{et} \quad R_c = I_m$$

Avec un tel choix des matrices de pondération, tous les modes du système de commande LQ sont situés à gauche de la verticale d'abscisse  $-\frac{1}{T_c}$ .

### 8.1.4 Precision maximale.

Le résultat suivant permet de mettre en évidence les meilleures performances réalisables en régulation sans aucune contrainte sur la commande.

**Résultat 8.4** *Considérons le problème de commande  $\mathcal{LQ}$  avec  $R_c = \rho_c \Lambda_c$  et supposons que les matrices d'entrée et de sortie  $G$  et  $H$  soient de rang plein. Alors on a les propriétés suivantes.*

$\mathcal{P}1$ . *La solution de l' $\mathcal{EAR}$  admet une limite lorsque la pondération de la commande est suffisamment petite, soit*

$$\exists P_o = P_o^T \geq 0 / \lim_{\rho_c \rightarrow 0} P = P_o = P_o^T \geq 0$$

$\mathcal{P}2$ . *Si  $m < p$  alors on a  $P_o = P_o^T > 0$*

$\mathcal{P}3$ . *Si  $m = p$  alors  $P_o = 0$  si et seulement si tous les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit*

$$P_o = 0 \Leftrightarrow \mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)) \in \mathcal{D}_{sa}$$

$\mathcal{P}4$ . *Si  $m > p$  alors  $P_o = 0$  pourvu qu'il existe une matrice de normalisation  $N \in \mathcal{R}^{m \times p}$  telle que tous les zéros du système normalisé sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit*

$$(\exists N \in \mathcal{R}^{m \times p} / (\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)) \in \mathcal{D}_{sa})) \implies P_o = 0$$

La **preuve** de ce résultat a été établi par Kwakernaak et Sivan dans ([56]). Elle est occultée pour des considérations pédagogiques. Les remarques suivantes permettent d'interpréter un tel résultat.

**Remarque 8.8** *Les propriétés  $\mathcal{P}1$  et  $\mathcal{P}2$  concernent le coût optimal. La propriété  $\mathcal{P}1$  stipule que le coût optimal admet une limite lorsque la matrice de pondération de la commande approche zéro, soit*

$$\lim_{R_c \rightarrow 0} J(u_{opt}) = \int_0^\infty (x_{opt}^T(t) Q_c x_{opt}(t) + u_{opt}^T(t) R_c u_{opt}(t)) dt = x_o^T P_o x_o$$

où  $\{x_{opt}(t)\}$  et  $\{u_{opt}(t)\}$  désignent les trajectoires d'état et de commande du système de commande  $\mathcal{LQ}$ . Cette limite peut être interprétée comme une mesure de la précision maximale que l'on peut obtenir sans aucune contrainte sur l'amplitude de la commande. Quant à la propriété  $\mathcal{P}2$ , elle montre qu'il n'est pas possible de réaliser une régulation parfaite, soit

$$\lim_{R_c \rightarrow 0} J(u_{opt}) = x_o^T P_o x_o = 0$$

si le nombre de variables d'entrée est inférieure au nombre de variables de sortie.

**Remarque 8.9** *Les propriétés  $\mathcal{P}3$  et  $\mathcal{P}4$  montrent que la régulation parfaite ne peut être réalisée que pour les systèmes ayant plus d'entrées que de sorties et dont tous les zéros sont situés dans le domaine de stabilité.*

### 8.1.5 Exemples

En guise d'une illustration des propriétés des systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$ , on traitera deux exemples.

**Le premier exemple** concerne le problème de commande qui minimise le critère quadratique

$$J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_c x(t) + u^T(t)R_c u(t)) dt$$

avec

$$0_2 \neq Q_c = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} > 0 \text{ et } R_c = \rho > 0$$

pour la classe des systèmes harmoniques décrits par l'équation d'état

$$\mathcal{SH} \{ \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \}$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On notera d'abord que le problème de commande  $\mathcal{LQ}$  est faisable, puisque la paire  $(F, G)$  est commandable et que la paire  $(\sqrt{Q}, F)$  est observable. Les systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  des systèmes harmoniques sont alors donnés par l'équation d'état

$$\mathcal{SCLQ} \{ \rho x(t) = (F - GK)x(t) \}$$

avec

$$K = G^T P$$

$$F^T P + PF - PGR^{-1}G^T P + Q = 0$$

Et sont asymptotiquement stables, soit

$$\mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

L'équation algébrique de Riccati admet une solution symétrique définie positive unique que l'on notera

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } p_{21} = p_{12}$$

On aura alors

$$-2\omega^2 p_{12} - \rho^{-1} p_{12}^2 + q_1 = 0$$

$$p_{11} - 2\zeta\omega p_{12} - \omega^2 p_{22} - \rho^{-1} p_{12} p_{22} = 0$$

$$2p_{12} - 4\zeta\omega p_{22} - \rho^{-1} p_{22}^2 + q_2 = 0$$

Les première et troisième équations donnent

$$p_{12} = -\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1}$$

$$p_{22} = -2\zeta\omega \pm \sqrt{4\zeta^2\omega^2 + \rho^{-1} \left( -2\omega^2 \pm 2\sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1} + q_2 \right)}$$

Et pour garantir que  $p_{22}$  soit positif, on doit choisir

$$p_{12} = -\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1}$$

Et donc

$$p_{22} = -2\zeta\omega + \sqrt{4\zeta^2\omega^2 + \rho^{-1} \left( -2\omega^2 + 2\sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1} + q_2 \right)}$$

Ce choix donne

$$p_{11} = 2\zeta\omega p_{12} + \omega^2 p_{22} + \rho^{-1} p_{12} p_{22}$$

On peut alors déterminer le gain de commande avec retour d'état, soit

$$K = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice d'état du système de commande est particulièrement donnée par

$$F - GK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1} & -\sqrt{4\zeta^2\omega^2 + \rho^{-1} \left( -2\omega^2 + 2\sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1} + q_2 \right)} \end{pmatrix}$$

On notera que les deux modes du système sont bien situés dans le domaine de stabilité asymptotique puisque les coefficients de son polynôme caractéristique sont tous positifs, soit

$$P_{ccre}(s) = s^2 + \sqrt{4\zeta^2\omega^2 + \rho^{-1} \left( -2\omega^2 + 2\sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1} + q_2 \right)} s + \sqrt{\omega^4 + \rho^{-1}q_1}$$

Et on peut vérifier aisément que lorsque  $Q_c \approx 0_2$  (resp. lorsque  $R_c \approx 0$ ) les pôles du système de commande sont les pôles du système harmonique si ce dernier est asymptotiquement stable, i.e.  $\zeta > 0$ . Autrement, i.e.  $\zeta < 0$ , les modes du système de commande sont issus d'une réflexion des pôles du système harmonique par rapport à l'axe imaginaire (resp. les pôles du système sont infinis)

Par ailleurs, on peut avoir un système bien amorti en choisissant convenablement la matrice de pondération de l'état, e.g.  $q_1 = 0$  et  $q_2 = 4\mu\zeta^2\omega^2$  avec  $\sqrt{1+\mu}|\zeta| \geq 1$ , puisque le polynôme caractéristique sous-jacent est donné par

$$P_{ccre}(s) = s^2 + 2 \left( \sqrt{1+\mu} \right) |\zeta| \omega s + \omega^2$$

**Le second exemple** concerne le problème de commande qui minimise le critère quadratique

$$J(u) = \int_0^{\infty} (y(t)^2 + \rho_c u(t)^2) dt \quad \text{avec } \rho_c \geq 0$$

pour le système décrit par la réalisation d'état suivante

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } H = (1 \quad -1)$$

dont la fonction de transfert associée est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \frac{-s+1}{s(s+2)}$$

La synthèse  $\mathcal{LQ}$  est faisable puisque  $(F, G, H)$  est une réalisation d'état minimale. La solution de l'équation algébrique de Riccati associée, soit

$$PF + F^T P - \frac{1}{\rho_c} PGG^T P + H^T H = 0$$

est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 + 4\rho_c + 2\sqrt{\rho_c}} & \sqrt{\rho_c} \\ \sqrt{\rho_c} & \rho_c \left( -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{\rho_c} + \frac{2}{\sqrt{\rho_c}}} \right) \end{pmatrix}$$

On notera que

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

puisque le système a un zéro à partie réelle positive  $z_1 = 1$ .

Le gain du retour d'état correspondant est

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} & \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho_c}}}{\sqrt{\rho_c}} \end{pmatrix}$$

et les pôles du système de commande avec retour d'état qui en résulte sont donnés par

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{4 + \frac{1}{\rho_c} + \frac{2}{\sqrt{\rho_c}}} \pm \sqrt{4 + \frac{1}{\rho_c} - \frac{2}{\sqrt{\rho_c}}} \right)$$

On notera que

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} p_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho_c \rightarrow 0} p_2 = -\infty$$

## 8.2 Commande $\mathcal{LQD}$

Rappelons que le problème de commande  $\mathcal{LQD}$  consiste à minimiser le critère quadratique (8.2) pour le système (8.1) lorsque les variables d'état ne sont pas mesurables. On montre dans ce qui suit qu'une commande  $\mathcal{LQ}$  incorporant un observateur approprié constitue une solution potentielle de ce problème. Cette solution sera présentée progressivement en trois étapes. La première étape est réservée à la conception d'un observateur issu d'une synthèse  $\mathcal{LQ}$  en vertu de la dualité entre l'observation et la commande. La seconde étape est consacrée au résultat fondamental sur la commande  $\mathcal{LQD}$  avec focus sur la stabilité du système de commande et une interprétation polynomiale du régulateur  $\mathcal{LQD}$ . La troisième étape est dédiée à une interprétation  $\mathcal{H}_2$  de la commande  $\mathcal{LQD}$  qui est vitale pour la culture de robustesse.

### 8.2.1 Observateur $\mathcal{LQ}$

Les résultats fondamentaux disponibles sur la commande  $\mathcal{LQ}$  suggèrent naturellement un observateur  $\mathcal{LQ}$  en vertu du postulat de dualité entre l'observation et la commande qui stipule que

*le gain d'une injection par retour de sortie d'un système  
est égal à la transposée du gain de commande avec retour d'état de son dual.*

Le résultat suivant donne les équations de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  tout en précisant les conditions requises pour la faisabilité de sa synthèse.

**Résultat 8.5** *Considérons un système décrit par une réalisation d'état  $(F, G, H)$  et une synthèse  $\mathcal{LQ}$  caractérisée par deux matrices de pondérations  $R_o = R_o^T > 0$  et  $Q_o = G_o G_o^T \geq 0$  telles que la réalisation d'état  $(F, G_o, H)$  est détectable et stabilisable. Alors le système dynamique donné par*

$$\mathcal{OLQ} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{cases} \quad (8.19)$$

avec

$$M = \Sigma H^T R_o^{-1} \quad (8.20)$$

$$F \Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o = 0 \quad (8.21)$$

*est un observateur  $\mathcal{LQ}$  du système dont l'erreur d'observation est exponentiellement nulle.*

**Preuve.** *Notons d'abord que compte tenu de la nature de la synthèse  $\mathcal{LQ}$  considérée, le problème de commande associée consiste à minimiser le critère quadratique*

$$J(u_d(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x_d^T(\tau) Q_o x_d(\tau) + u_d^T(\tau) R_o u_d(\tau)) d\tau \quad (8.22)$$

*pour le dual du système considéré, soit*

$$\mathcal{DMSLQ} \begin{cases} \rho x_d(t) = F_d x_d(t) + G_d u_d(t) \\ y_d(t) = H_d x_d(t) \end{cases} \quad (8.23)$$



où  $u_d(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $y_d(t) \in \mathbb{R}^m$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du dual du système (8.1) et  $(F_d, G_d, H_d) = (F^T, H^T, G^T)$  est une représentation d'état associée à son vecteur d'état  $x_d(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Et en vertu du résultat 8.2, la loi commande associée à la synthèse  $\mathcal{LQ}$  considérée est donnée par

$$u_d(t) = -K_d x_d(t) \quad (8.24)$$

$$K_d = R_o^{-1} H P_d F^T \quad (8.25)$$

$$P_d F^T + P_d P - P_d H^T R_o^{-1} H P_d + Q_o \quad (8.26)$$

et le système de commande  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent est asymptotiquement stable, i.e.

$$\mathcal{V}(F^T - K_d H^T) \subset \mathcal{D}_{as}$$

On retrouve les équations de l'observateur (8.19)-(8.21) à partir du postulat de dualité modulo un changement de notation, soit  $\Sigma \triangleq P_d$ . Par ailleurs l'observateur est asymptotiquement stable puisque ses modes sont les mêmes que ceux du système de commande  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent, soit

$$\mathcal{V}(F^T - K_d H^T) = \mathcal{V}(F - H M)$$

Quant à la convergence exponentielle de l'erreur d'observation, elle résulte naturellement de la stabilité asymptotique de l'observateur et de l'équation de l'erreur d'observation dans le contexte déterministe considéré, soit

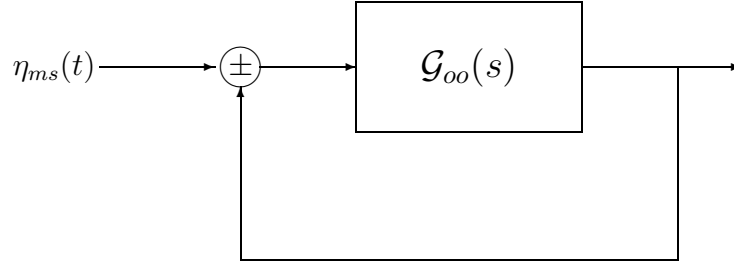
$$\rho \tilde{x}(t) = (F - M H) \tilde{x}(t) \quad \mathcal{CQFD}$$

Le résultat 8.5 a permis de mettre en évidence que l'observateur  $\mathcal{LQ}$  hérite la configuration modale du système de commande  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent et donc de sa propriété de stabilité nominale. Dans ce qui suit, on montrera que cet héritage s'étend naturellement aux propriétés fondamentales du système de commande  $\mathcal{LQ}$  à partir d'une analyse du système à rétroaction associé à l'observateur  $\mathcal{LQ}$ . Ce système à rétroaction peut être représenté comme le montre la figure 8.2.

$\mathcal{G}_{oo}(s)$  est la fonction de transfert obtenue en ouvrant la boucle de l'observateur en sortie du système, soit  $\mathcal{G}_{oo}(s) = H (sI_n - F)^{-1} M$ , et  $\{\eta_{ms}(t)\}$  représente toutes les imperfections de modélisation que l'on peut ramener en sortie du système.

Le résultat suivant précise les propriétés remarquables qu'un observateur  $\mathcal{LQ}$  hérite naturellement de la synthèse  $\mathcal{LQ}$  sous-jacente.

**Résultat 8.6** Considérons l'observateur  $\mathcal{LQ}$  et posons  $\mathcal{M}_{oo}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G_o$ . Alors les propriétés suivantes sont satisfaites pourvu que la réalisation d'état  $(F, G, H_o)$  soit stabilisable et détectable.

FIGURE 8.2 – Système de rétroaction de l'observateur  $\mathcal{LQ}$ 

$\mathcal{P}1$ . L'égalité de différence de retour pour l'observation ( $\mathcal{EDRO}$ )

$$(I_p + \mathcal{G}_{oo}(s)) R_o (I_p + \mathcal{G}_{oo}(-s))^T = R_o + \mathcal{M}_{oo}(s) \mathcal{M}_{oo}^T(-s)$$

est toujours vérifiée pour tout  $s \in \mathcal{C}$

$\mathcal{P}2$ . La fonction de sensibilité de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  vérifie la propriété

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_o(j\omega)) \leq \frac{\sigma_{max}(R_o)}{\sigma_{min}(R_o)} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

$\mathcal{P}3$ . Les modes de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  peuvent être obtenus à partir de l'équation

$$\frac{P_{colq}(-s)P_{colq}(s)}{P_{csys}(-s)P_{csys}(s)} = \frac{\det(R_o(\mathcal{M}_{oo}(s))(\mathcal{M}_{oo}(-s)))}{\det(R_o)}$$

avec

$$P_{polq}(s) = \det(sI_n - F + MH) \text{ et } P_{psys}(s) = \det(sI_n - F)$$

$\mathcal{P}4$ . La fonction de transfert en boucle ouverte en sortie  $\mathcal{G}_{oo}(s)$  admet un retard minimal et ses zéros sont nécessairement situés dans le domaine de stabilité, soit

$$HM \neq 0 \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{oo}(s)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

La **preuve** de ce résultat peut être faite en exploitant judicieusement le concept de dualité à partir des preuves établies pour les propriétés remarquables d'un système de commande  $\mathcal{LQ}$  données par le résultat 8.3. Les remarques suivantes permettent de mieux apprécier la robustesse de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  et ses performances dynamiques.

**Remarque 8.10** Les observateurs  $\mathcal{LQ}$  héritent de toutes les propriétés d'une synthèse  $\mathcal{LQ}$  en sortie du système, en l'occurrence une marge de robustesse remarquable par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives en sortie et une vulnérabilité en hautes fréquences due à une décroissance de -20 db/décade des valeurs singulières de leur fonction de transfert en boucle ouverte en sortie.

**Remarque 8.11** La configuration modale d'un observateur  $\mathcal{LQ}$  est triviale dans le cas où la matrice  $Q_o$  (resp. la matrice  $R_o$ ) est relativement petite comme l'indiquent les assertions suivantes

$$Q_o \approx O_n \implies P_{polq}(-s)P_{polq}(s) \approx P_{psys}(-s)P_{psys}(s)$$

$$( \text{resp. } R_o \approx O_n \implies P_{colq}(-s)P_{colq}(s) \approx P_{zmoo}(-s)P_{zmoo}(s) )$$

où  $P_{zmoo}(s)$  désigne le polynôme des zéros de la fonction de transfert  $\mathcal{M}_{oo}(s)$ . Ainsi, on retrouve d'une part les modes stables du système avec des modes stables issus de la réflexion des modes instables du système par rapport à l'axe imaginaire. (resp. les zéros stables de la fonction de transfert  $\mathcal{M}_{oo}(s)$  avec des modes stables issus de la réflexion des modes instables de la fonction de transfert  $\mathcal{M}_{oo}(s)$  par rapport à l'axe imaginaire).

**Remarque 8.12** La spécification des paramètres de synthèse d'un observateur  $\mathcal{LQ}$  peut être effectuée à partir du grammien d'observabilité du système comme suit ([18])

$$Q_o = H^T H \quad \text{et} \quad R_o = T_o \int_0^\infty (He^{Ft}G)(He^{Ft}G) dt$$

Ce choix permet d'avoir une configuration modale, de l'observateur  $\mathcal{LQ}$ , située à gauche de la verticale d'abscisse  $-\frac{1}{T_o}$ .

Le résultat suivant précise les meilleurs performances d'un observateur  $\mathcal{LQ}$  et le contexte de leur faisabilité., i.e. les conditions requises sur le système

**Résultat 8.7** Considérons le problème de synthèse d'un observateur  $\mathcal{LQ}$  avec  $R_o = \rho_o \Lambda_o$  et supposons que les matrices d'entrée et de sortie  $G \in \mathcal{R}^{n \times m}$  et  $H \in \mathcal{R}^{p \times n}$  soient de rang plein. Alors on a les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1$ . La solution de l' $\mathcal{EAR}$  admet une limite lorsque la matrice  $R_o$  est suffisamment petite, soit

$$\exists \Sigma_o = \Sigma_o^T \geq 0 / \lim_{\rho_o \rightarrow 0} \Sigma = \Sigma_o$$

$\mathcal{P}2$ . Si  $p < m$  alors on a

$$\Sigma_o = \Sigma_o^T > 0$$

$\mathcal{P}3$ . Si  $p = m$  alors  $\Sigma_o = 0$  si et seulement si les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$\Sigma_o = 0 \iff (\det(H(sI_n - F)^{-1}G) = 0 \implies s \in \mathcal{D}_{sa})$$

$\mathcal{P}4$ . Si  $p > m$  alors  $\Sigma_o = 0$  pourvu qu'il existe une matrice de normalisation  $N \in \mathcal{R}^{m \times p}$  telle que les zéros du système normalisé soient situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$(\exists N \in \mathcal{R}^{m \times p} / \det(NH(sI_n - F)^{-1}E) = 0 \implies s \in \mathcal{D}_{sa}) \implies \Sigma_o = 0$$

La **preuve** de ce résultat est relativement laborieuse ([56]) et sera occultée pour des considérations pédagogiques.

**Remarque 8.13** Les propriétés  $\mathcal{P}1$  et  $\mathcal{P}2$  stipulent que la matrice de covariance de l'erreur d'observation, associée à un observateur  $\mathcal{LQ}$ , admet une limite lorsque la matrice de pondération  $R_o$  est aussi petite que possible et que cette limite n'est pas nulle dans le cas des systèmes qui ont plus d'entrées que de sorties. Quant aux propriétés  $\mathcal{P}3$  et  $\mathcal{P}4$ , elles stipulent que la reconstruction parfaite des variables d'état d'un système est faisable avec un observateur  $\mathcal{LQ}$  avec une matrice de pondération  $R_c$  aussi petite que possible pour les systèmes ayant un nombre de sortie au moins aussi grand que le nombre de ses entrées et dont la configuration des zéros est située dans le domaine de stabilité asymptotique.

### 8.2.2 Commande $\mathcal{LQD}$

La commande  $\mathcal{LQD}$  peut être conçue à partir qu'une commande  $\mathcal{LQ}$  incorporant un observateur  $\mathcal{LQ}$  comme l'indique le résultat suivant. Le choix d'un observateur  $\mathcal{LQ}$  est motivée par sa robustesse par rapport aux inéluctables imperfections de modélisation que l'on peut ramener en sortie du système.

**Résultat 8.8** Considérons la classe des systèmes que l'on peut raisonnablement décrire par les équations (8.1) et supposons que les réalisations d'état  $(F, G, H_c)$  et  $(F, G_o, H)$  sont stabilisables et détectables. Alors, on peut élaborer une loi de commande  $\mathcal{LQD}$  à partir d'une combinaison de la loi de commande  $\mathcal{LQ}$  avec l'observateur  $\mathcal{LQ}$  respectivement données par les résultats 8.2 et 8.5, soit

$$\mathcal{RLQD} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + My(t) \\ u(t) = -K \hat{x}(t) \end{cases} \quad (8.27)$$

avec

$$K = R_c^{-1} G^T P \quad (8.28)$$

$$M = \Sigma H^T R_o^{-1} \quad (8.29)$$

$$PF + F^T P - PGR_c^{-1} G^T P + Q_c = 0 \quad (8.30)$$

$$F\Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o = 0 \quad (8.31)$$

**Preuve.** Compte tenu du résultat 5.10, le système de commande  $\mathcal{LQD}$  est asymptotiquement stable et sa configuration modale est constituée de l'union des configurations modales du système de commande  $\mathcal{LQ}$  et de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  sous-jacents. Ainsi, les trajectoires d'état du système et de l'observateur sont bornées et l'erreur d'observation est exponentiellement nulle. Par ailleurs, on peut alors exprimer le critère quadratique associée à la commande  $\mathcal{LQD}$  en

fonction de l'état estimée et de l'erreur d'observation puisque

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (x^T(t)Q_c x(t) + u^T(t)R_c u(t)) dt \\
 & \quad = \\
 & \int_0^T \left( (\hat{x}(t) + \tilde{x}(t))^T Q_c (\hat{x}(t) + \tilde{x}(t)) + u^T(t)R_c u(t) \right) dt \\
 & \quad = \\
 & \int_0^T (\hat{x}^T(\tau)Q_c \hat{x}(t) + u^T(t)R_c u(t)) dt + \int_0^T (2\hat{x}^T(t)Q_c \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t)Q_c \tilde{x}(t)) dt
 \end{aligned}$$

Et compte tenu des propriétés de l'observateur  $\mathcal{LQ}$ , on peut en déduire que la synthèse du système de commande  $\mathcal{LQD}$  peut être naturellement effectuée à partir de la minimisation du critère quadratique

$$\hat{J}(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{x}^T(\tau)Q_c \hat{x}(t) + u^T(t)R_c u(t)) dt \quad (8.32)$$

pour l'observateur  $\mathcal{LQ}$  (8.19)-(8.21).

Ainsi, on peut concevoir un système de commande  $\mathcal{LQD}$  en deux étapes duales et indépendantes sous la bénédiction du principe d'équivalence certitude. La première (resp. seconde) étape consiste en une synthèse d'un observateur (resp. d'un système de commande)  $\mathcal{LQ}$  avec une matrice  $Q_o = G_o G_o^T$  (resp.  $Q_c = G_o G_c^T$ ) telle que  $(F, G_o, H)$  (resp.  $(F, G, H_c)$ ) est une réalisation stabilisable et détectable. On notera que la nature  $\mathcal{LQ}$  de l'observateur est essentiellement motivée par des considérations de robustesse et que tout observateur assurant une erreur d'observation exponentiellement nulle peut être utilisé.

*CQFD*

Les deux remarques suivantes permettent de mettre en évidence le bonus des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  et l'essence de leur vulnérabilité.

**Remarque 8.14** La fonction de transfert du régulateur  $\mathcal{LQD}$  est obtenue en appliquant la transformée de Laplace aux équations (8.27) tout en supposant que les conditions initiales sont nulles, soit

$$\mathcal{R}(s) = -K (sI_n - F + GK + MH)^{-1} M \quad (8.33)$$

On peut alors postuler que les systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  sont insensibles aux bruits de mesure inéluctables puisque le régulateur sous-jacent est strictement propre. Et ce postulat légitime le fait d'avoir occulté les bruits de mesure.

**Remarque 8.15** La fonction de transfert de la boucle ouverte en entrée (resp. en sortie) du système de commande  $\mathcal{LQD}$  est donnée par

$$\mathcal{G}_{oe}(s) = \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) \quad \left( \text{resp. } \mathcal{G}_{os}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) \right) \quad (8.34)$$

où  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{R}(s)$  sont respectivement les fonctions de transfert du système et du régulateur  $\mathcal{LQD}$  correspondant. Par ailleurs, la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande  $\mathcal{LQD}$  en entrée  $\mathcal{G}_{oe}(s)$  (resp. en sortie  $\mathcal{G}_{os}(s)$ ) n'est pas identiquement égale à la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande (resp. de l'observateur)  $\mathcal{LQ}$  en entrée  $\mathcal{G}_{oc}(s)$  (resp. en sortie  $\mathcal{G}_{oo}(s)$ ).

On peut alors postuler que les systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  n'héritent pas naturellement de la propriété de robustesse remarquable en entrée (resp. en sortie) du système de commande (resp. de l'observateur)  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent. Ce postulat est l'essence de la vulnérabilité d'une synthèse  $\mathcal{LQD}$  et l'importance de la spécification des paramètres de synthèse.

### 8.2.3 Interprétation $\mathcal{H}_2$

Compte tenu que fait que les conditions initiales peuvent être interprétées comme une entrée impulsionnelle, les équations (8.1) peuvent être réécrites comme suit sans aucune incidence sur les résultats obtenus

$$\mathcal{MSLQD} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (8.35)$$

où  $\{w(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  et  $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  sont des séquences composées par des impulsions d'amplitudes inconnues, i.e.

$$w(t) = w_o \delta(t) \quad \text{et} \quad v(t) = v_o \delta(t) \quad \text{avec} \quad (w_o, v_o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

Et en appliquant la transformée de Laplace aux équations (8.14) du système, on obtient

$$\mathcal{MSLQD} \begin{cases} X(s) = \Phi(s)GU(s) + \Phi(s)W(s) \\ Y(s) = HX(s) + V(s) \end{cases} \quad (8.36)$$

où  $\Phi(s)$  désigne la transformée de Laplace de la matrice de transition du système, i.e.  $\Phi(s) = (sI_n - F)^{-1}$ . Et comme tenu de la remarque 8.14, on a

$$U(s) = -\mathcal{R}(s) \mathcal{S}_o(s) H \Phi(s) W(s) - \mathcal{R}(s) \mathcal{S}_o(s) V(s) \quad (8.37)$$

où  $\mathcal{S}_o(s)$  désigne la fonction de sensibilité en sortie du système de commande  $\mathcal{LQD}$  que l'on peut représenter comme suit

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \mathcal{T}_{sclqd}(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ V(s) \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

avec

$$\mathcal{G}_{sclqd}(s) = \begin{pmatrix} (I_n - \Phi(s)G\mathcal{R}(s)\mathcal{S}_o(s)H) \Phi(s) & -\Phi(s)G\mathcal{R}(s)\mathcal{S}_o(s) \\ -\mathcal{R}(s)\mathcal{S}_o(s)H\Phi(s) & -\mathcal{R}(s)\mathcal{S}_o(s) \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

Le résultat suivant montre que le problème de commande  $\mathcal{LQD}$  peut être interprété comme un problème d'optimisation  $\mathcal{H}_2$ .

**Résultat 8.9** *Le critère quadratique associé au problème de commande  $\mathcal{LQD}$  peut se récrire comme suit*

$$J(u(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{H}(j\omega)^* \mathcal{H}(j\omega)) d\omega \quad (8.40)$$

avec

$$\mathcal{H}(s) = \begin{pmatrix} H_c & 0 \\ 0 & \Lambda_c \end{pmatrix} \mathcal{G}_{sclqd}(s) \begin{pmatrix} G_o & 0 \\ 0 & \Lambda_o \end{pmatrix}^T \quad (8.41)$$

où les matrices  $\Lambda_c$  et  $\Lambda_o$  sont les racines carrés des matrices de pondération  $R_c$  et  $R_o$ , soit

$$R_c = \Lambda_c^T \Lambda_c \text{ et } R_o = \Lambda_o \Lambda_o^T$$

La **preuve** de ce résultat est trivial. Il suffit de récrire le critère quadratique associé au problème de commande  $\mathcal{LQD}$  sous la forme

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{pmatrix} (H_c x(t))^T & (\Lambda_c u(t))^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_c x(t) \\ \Lambda_c u(t) \end{pmatrix} dt \quad (8.42)$$

et appliquer le théorème de Parseval.

**Remarque 8.16** *L'interprétation  $\mathcal{H}_2$  du problème de commande  $\mathcal{LQD}$  montre que la commande  $\mathcal{LQD}$  permet de réaliser un bon compromis performances  $\Leftrightarrow$  robustesse en spécifiant convenablement les paramètres de synthèse correspondants, notamment les matrices de pondération  $(Q_c, R_c)$  et  $(Q_o, R_o)$  utilisées pour les synthèses  $\mathcal{LQ}$  adoptées pour la conception du système de commande  $\mathcal{LQD}$ .*

### 8.3 Commande $\mathcal{LQD}/\mathcal{RTB}$

Rappelons le postulat de la remarque 8.15 selon lequel les systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  n'héritent pas naturellement de la propriété de robustesse remarquable en entrée (resp. en sortie) du système de commande (resp. de l'observateur)  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent et pourraient être relativement vulnérables aux inéluctables erreurs de modélisation si les paramètres de synthèse associés ne sont pas convenablement spécifiés. Ce problème a été mis en évidence à la fin des années soixante par Kwakernaak qui a montré que les égalités de différence de retour intrinsèques aux systèmes de commande (resp. aux observateurs)  $\mathcal{LQ}$  ne sont généralement pas préservées ([54]). Une décennie après, Doyle and Stein ont proposé une procédure de synthèse des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  réalisant un  $\mathcal{RTB}$  ([19], [24]). Le concept  $\mathcal{RTR}$  a été ensuite développé par de nombreux chercheurs pour asseoir les bases de l'ingénierie de la commande optimale ([17], [72], [79] [80], [87]). Notons que l'essence d'une telle technique est due aux théorèmes fondamentaux relatifs aux problèmes de précision maximale et de reconstruction parfaite établis par Kwakernaak ([54]).

Ainsi, la commande  $\mathcal{LQD}/\mathcal{RTB}$  est une commande  $\mathcal{LQD}$  dont les performances sont particulièrement spécifiées à partir d'un modelage adéquat de la fonction de transfert en boucle

ouverte du système de commande  $\mathcal{LQ}$  ou de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  sous-jacent. On distingue deux synthèses duales  $\mathcal{LQD}/\mathcal{RTB}$  selon que le  $\mathcal{RTB}$  doit être réalisé en entrée ou en sortie du système, notamment

- **$\mathcal{RTB}$  en entrée** : étant donné un système de commande  $\mathcal{LQ}$ , comment choisir les paramètres de synthèse du  $\mathcal{FK}$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte en entrée du système de commande  $\mathcal{LQD}$  correspondant soit semblable à celle du système de commande  $\mathcal{LQ}$ , soit

$$\mathcal{G}_{oe}(s) \approx \mathcal{G}_{oc}(s) = K\Phi(s)G$$

- **$\mathcal{RTB}$  en sortie** : étant donné un  $\mathcal{FK}$ , comment choisir les paramètres de synthèse du système de commande  $\mathcal{LQ}$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte en sortie du système de commande  $\mathcal{LQD}$  correspondant soit semblable à celle du  $\mathcal{FK}$ , soit

$$\mathcal{G}_{os}(s) \approx \mathcal{G}_{oo}(s) = H\Phi(s)M$$

**Remarque 8.17** Le choix d'un  $\mathcal{RTB}$  en entrée ou en sortie dépend naturellement des performances requises. Ces performances sont spécifiées en fonction des connaissances disponibles sur le système, en l'occurrence les modèles des actionneurs et des capteurs. Le  $\mathcal{RTB}$  en entrée est naturellement approprié au cas d'une modélisation relativement imparfaite des actionneurs, alors que le  $\mathcal{RTB}$  en sortie permet de réduire les imperfections des capteurs.

**Remarque 8.18** Pour mieux appréhender les propriétés requises pour réaliser un  $\mathcal{RTB}$ , considérons le cas des systèmes monovariables décrits par une réalisation d'état  $(F, G, H, E)$  de dimension  $n$ . Le régulateur réalisant exactement un  $\mathcal{RTB}$  en entrée (resp. en sortie) est donné par

$$\mathcal{R}_{rtbe}(s) = \frac{K \text{Adj}(sI_n - F) G}{H \text{Adj}(sI_n - F) G} \quad \left( \text{resp. } \mathcal{R}_{rtbs}(s) = \frac{H \text{Adj}(sI_n - F) M}{H \text{Adj}(sI_n - F) G} \right) \quad (8.43)$$

Ainsi, on peut postuler naturellement qu'un régulateur réalisant exactement le  $\mathcal{RTB}$  pour les systèmes monovariables doit impérativement satisfaire les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1$ . Le régulateur est propre

$\mathcal{P}2$ . Les pôles du régulateur sont les zéros du système

Et compte tenu de la propriété de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande (resp. de l'observateur)  $\mathcal{LQ}$ , la propriété  $\mathcal{P}1$  du régulateur requiert que le système ait un retard minimal, i.e.  $HG \neq 0$ . Quant à la propriété  $\mathcal{P}2$ , qui est intrinsèque à la réalisation exacte du  $\mathcal{RTB}$ , elle requiert que tous les zéros du système soient situés dans le domaine de stabilité asymptotique. Autrement le système de commande (resp. de l'observateur)  $\mathcal{LQ}$  est instable.



### 8.3.1 $\mathcal{RTB}$ en entrée

La synthèse d'un système de commande  $\mathcal{LQD}$  peut être effectuée de manière à recouvrir la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande  $\mathcal{LQ}$  en entrée par une synthèse appropriée de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  comme le montre le résultat fondamental suivant

**Résultat 8.10** *Considérons le problème de commande  $\mathcal{LQD}$  et supposons que  $p \geq m$  et que la fonction de transfert  $H(sI_n - F)^{-1}G$  du système n'ait aucun zéro à partie réelle positive. Si les paramètres de synthèse de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  sont spécifiées comme suit*

$$Q_o = GG^T \text{ et } R_o = \rho_o \Lambda_o$$

alors il est possible de réaliser un  $\mathcal{RTB}$  en entrée pourvu que le scalaire  $\rho_o$  soit suffisamment petit, i.e.

$$\lim_{\rho_o \rightarrow 0} \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_{oc}(s)$$

est vérifiée pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . La configuration modale de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  résultant est donnée par les zéros du système modulo des modes à l'infini.

**Preuve.** La preuve de ce résultat sera faite dans le cas où le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties, soit  $m = p$ , pour des considérations de simplicité. Notons d'abord que la classe des systèmes considérée est conforme aux exigences du résultat 8.7 sur la reconstruction parfaite de l'état du système et donc la matrice de covariance de l'erreur d'observation vérifie la propriété suivante

$$\lim_{\rho_o \rightarrow 0} \Sigma = 0_n$$

Et en utilisant les équations du gain d'observation et de l' $\mathcal{EAR}$  qui lui est associée au sein du résultat 8.5, on obtient

$$\lim_{\rho_o \rightarrow 0} \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma = GG^T = MR_o M^T$$

Il apparaît clairement que la solution de l' $\mathcal{EAR}$  et le gain d'observation doivent satisfaire les propriétés suivantes lorsque  $\rho_o \rightarrow 0$

$$\Sigma = \sqrt{\rho_o} \bar{\Sigma} \text{ avec } \bar{\Sigma} H^T \Lambda_o^{-1} H \bar{\Sigma} = GG^T$$

et

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho_o}} G W_o \Lambda_o^{-\frac{1}{2}} \text{ avec } W_o W_o^T = I_m$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$\phi_\sigma(s) = (sI_n - F)^{-1} \text{ et } \phi_c(s) = (sI_n - F + GK)^{-1}$$

on aura

$$\phi_c(s) = \phi_\sigma(s) (I_n + GK \phi_\sigma(s))^{-1}$$

La FTBO du système de commande  $\mathcal{LQD}$  peut alors se récrire comme suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{oe}(s) &= K (\phi_c(s)^{-1} + MH)^{-1} MH \phi_\sigma(s) G \\
&= K \phi_c(s) (I_n + MH \phi_c(s))^{-1} MH \phi_\sigma(s) G \\
&= K \phi_c(s) M (I_p + H \phi_c(s) M)^{-1} H \phi_\sigma(s) G
\end{aligned}$$

La dernière expression a été obtenue par application du résultat A.5. Et compte tenu du comportement asymptotique du gain d'observation et de la relation qui relie  $\phi_c(s)$  à  $\phi_\sigma(s)$ , on peut développer le comportement asymptotique de la  $\mathcal{FTBO}$  en entrée du système de commande  $\mathcal{LQD}$  comme suit

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho_o \rightarrow 0} \mathcal{G}_{oe}(s) &= K \phi_c(s) G W_o \Lambda_o^{-\frac{1}{2}} \left( H \phi_c(s) G W_o (\Lambda_o)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} H \phi_\sigma(s) G \\
&= K \phi_c(s) G (H \phi_c(s) G)^{-1} H \phi_\sigma(s) G \\
&= K \phi_\sigma(s) (I_n + GK \phi_\sigma(s))^{-1} G (H \phi_\sigma(s) (I_n + GK \phi_\sigma(s))^{-1} G)^{-1} H \phi_\sigma(s) G \\
&= K \phi_\sigma(s) G (I_n + K \phi_\sigma(s) G)^{-1} (H \phi_\sigma(s) G (I_n + K \phi_\sigma(s) G)^{-1})^{-1} H \phi_\sigma(s) G \\
&= K \phi_\sigma(s) G
\end{aligned}$$

La dernière partie du résultat, relative à la configuration modale du système de commande  $\mathcal{LQD}$  réalisant un  $\mathcal{LTR}$  en entrée, découle naturellement de la remarque 8.11 sur la configuration modale de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  compte tenu de la classe des systèmes considérée.

$\mathcal{CQFD}$

**Remarque 8.19** Le  $\mathcal{RTB}$  en entrée peut être réalisé en spécifiant les paramètres de synthèse de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  comme suit

$$R_o = I_p \text{ et } Q_o = Q_{or} + q_o G^T G \text{ avec } Q_{or} = Q_{or}^T \geq 0 \text{ et } q_o \rightarrow \infty$$

On retrouve la procédure  $\mathcal{RTB}$  proposée par Doyle and Stein ([23]) qui est plus appropriée pour des considérations numériques.

**Remarque 8.20** La nature de la classe des systèmes, en l'occurrence un nombre de sorties supérieur ou égal au nombre d'entrées et des zéros situés dans le domaine de stabilité, s'impose par les conditions requises pour la reconstruction parfaite des variables d'état du système par les observateurs  $\mathcal{LQ}$ .

**Remarque 8.21** Le  $\mathcal{RTB}$  en entrée conduit inéluctablement à un observateur du type grand gain qui aura raison de la propriété naturelle d'insensibilité aux bruits des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$ . Le spécification du paramètre de synthèse  $\rho_o$  (resp. ou  $q_o$ ) doit être faite avec prudence à partir d'une procédure appropriée au sens d'un compromis performance-robustesse admissible, en l'occurrence un  $\mathcal{RTB}$  partiel sur la bande passante du système de commande.

**Remarque 8.22** La configuration modale de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  réalisant un  $\mathcal{LTR}$  en entrée peut être obtenue en développant l'expression de son polynôme caractéristique comme suit

$$\begin{aligned} \det(sI_n - F + MH) &= \det\left(sI_n - F + GW_o R_o^{-\frac{1}{2}} H\right) \\ &= \det\left((sI_n - F) \left(I_n + (sI_n - F)^{-1} GW_o R_o^{-\frac{1}{2}} H\right)\right) \\ &= \det(sI_n - F) \det\left(I_p + H (sI_n - F)^{-1} GW_o R_o^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Et compte tenu de la spécification des paramètres de synthèse de l'observateur  $\mathcal{LQ}$ , on a

$$\det(sI_n - F + MH) = \lim_{\rho_o \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_o}}\right)^p \det\left(\Lambda_o^{-\frac{1}{2}}\right) \det(W_o) \det(sI_n - F) \det(\mathcal{G}(s))$$

Et comme le produit polynomial  $\det(sI_n - F) \det(\mathcal{G}(s))$  n'est autre que le polynôme des zéros du système, on en déduit naturellement que les modes de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  tendent vers les zéros du système modulo des modes à l'infini. On retrouve naturellement le résultat escompté.

### 8.3.2 $\mathcal{RTB}$ en sortie

Le résultat fondamental suivant montre que la synthèse d'un système de commande  $\mathcal{LQD}$  peut être effectuée de manière à recouvrer la  $\mathcal{FTBO}$  de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  en sortie par une synthèse appropriée du système de commande  $\mathcal{LQ}$ .

**Résultat 8.11** Considérons le problème de commande optimale  $\mathcal{LQD}$  et supposons que  $m \geq p$  et que la fonction de transfert  $H(sI_n - F)^{-1}G$  du système n'ait aucun zéro à partie réelle positive. Si les paramètres de synthèse du système de commande  $\mathcal{LQ}$  sont spécifiés comme suit

$$Q_c = H^T H \text{ et } R_c = \rho_c \Lambda_c$$

alors il est possible de réaliser un  $\mathcal{RTB}$  en sortie pourvu que le scalaire  $\rho_c$  soit suffisamment petit, soit

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{G}_{oo}(s)$$

est vérifiée pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . La configuration modale du système de commande  $\mathcal{LQ}$  résultant est donnée par les zéros du système modulo des modes à l'infini.

**Preuve.** Comme dans le cas du  $\mathcal{RTB}$  en entrée, la preuve de ce résultat sera faite dans le cas où le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties. Notons d'abord que la classe des systèmes considérée est conforme aux exigences du résultat 8.4 sur la précision maximale réalisée par un système de commande  $\mathcal{LQ}$  qui stipule que

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} P = 0$$

Et en utilisant les équations du gain de commande avec retour d'état et de l' $\mathcal{EAR}$  qui lui est associée au sein du résultat 8.2, on obtient

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} PGR_c^{-1}G^T P = H^T H = K^T R_c K$$

La solution de l' $\mathcal{EAR}$  et le gain du retour d'état doivent alors satisfaire les propriétés suivantes lorsque  $\rho_c \rightarrow 0$

$$P = \sqrt{\rho_c} \bar{P} \text{ avec } \bar{P}G\Lambda_c^{-1}G^T\bar{P} = H^T H$$

et

$$K = \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} \Lambda_c^{-\frac{1}{2}} W_c H \text{ avec } W_c W_c^T = I_p$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$\phi_\sigma(s) = (sI_n - F)^{-1} \text{ et } \phi_o(s) = (sI_n - F + MH)^{-1}$$

on aura

$$\phi_o(s) = \phi_\sigma(s) (I_n + MH\phi_{sys}(s))^{-1}$$

La FTBO du système de commande  $\mathcal{LQD}$  peut alors se récrire comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{os}(s) &= H\phi_\sigma(s)G K (sI_n - F + GK + MH)^{-1} M \\ &= H\phi_\sigma(s)G K (\phi_o(s)^{-1} + GK)^{-1} M \\ &= H\phi_\sigma(s)G K \phi_o(s) (I_n + GK\phi_o(s))^{-1} M \\ &= H\phi_\sigma(s)G (I_m + K\phi_o(s)G)^{-1} K\phi_o(s)M \end{aligned}$$

La dernière expression a été obtenue par application du résultat A.5. Et compte tenu du comportement asymptotique du gain du retour d'état et de la relation qui relie  $\phi_o(s)$  à  $\phi_\sigma(s)$ , on peut développer le comportement asymptotique de la FTBO en sortie du système de commande  $\mathcal{LQD}$  comme suit

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_o \rightarrow 0} \mathcal{G}_{os}(s) &= H\phi_\sigma(s)G (K\phi_o(s)G)^{-1} K\phi_o(s)M \\ &= H\phi_\sigma(s)G (H\phi_o(s)G)^{-1} H\phi_o(s)M \\ &= H\phi_\sigma(s)G (H\phi_\sigma(s) (I_n + MH\phi_\sigma(s))^{-1} G)^{-1} (H\phi_\sigma(s) (I_n + MH\phi_\sigma(s))^{-1} M) \\ &= H\phi_\sigma(s)G ((I_m + H\phi_\sigma(s)M)^{-1} H\phi_\sigma(s)G)^{-1} ((I_n + H\phi_\sigma(s)M)^{-1} H\phi_\sigma(s)M) \\ &= H\phi_\sigma(s)M \end{aligned}$$

La dernière partie du résultat, relative à la configuration modale du système de commande  $\mathcal{LQD}$  réalisant un  $\mathcal{LTR}$  en entrée, découle naturellement de la remarque 8.5 sur la configuration modale du système de commande  $\mathcal{LQ}$  compte tenu de la classe des systèmes considérée.

$\mathcal{CQFD}$

**Remarque 8.23** Le  $\mathcal{RTB}$  en sortie peut être réalisé en spécifiant les paramètres de synthèse du système de commande  $\mathcal{LQ}$  comme suit

$$R_c = I_m \text{ et } Q_c = Q_{cr} + q_o G^T G \text{ avec } Q_{cr} = Q_{cr}^T \geq 0 \text{ et } q_c \rightarrow \infty$$

On retrouve la procédure  $\mathcal{RTB}$  proposée par Doyle and Stein ([23]) qui est plus appropriée pour des considérations numériques.

**Remarque 8.24** La nature de la classe des systèmes, en l'occurrence un nombre d'entrées supérieur ou égal au nombre sorties et des zéros situés dans le domaine de stabilité, s'impose par les conditions requises pour la précision maximale des systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$ .

**Remarque 8.25** Le  $\mathcal{RTB}$  en sortie conduit inéluctablement à un système de commande du type grand gain qui aura raison de la propriété naturelle d'insensibilité aux bruits des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$ . Le spécification du paramètre de synthèse  $\rho_c$  (resp. ou  $q_c$ ) doit être faite avec prudence à partir d'une procédure appropriée au sens d'un compromis performance-robustesse admissible, en l'occurrence un  $\mathcal{RTB}$  partiel sur la bande passante du système de commande.

## 8.4 Synthèse $\mathcal{LQD}$

Les remarques faites sur la synthèse  $\mathcal{LQ}$  sont relativement prudentes pour envisager une synthèse  $\mathcal{LQD}$  sans conforter les propriétés attractives de la synthèse  $\mathcal{LQ}$  et développer une procédure adéquate pour la spécification des paramètres de synthèse à partir des performances requises. Dans ce qui suit, on propose de traiter ces aspects par une modification judicieuse de la nature des pondérations.

### 8.4.1 Performances dynamiques

La conception de systèmes de commande (resp. d'observateurs)  $\mathcal{LQ}$  réalisant des performances dynamiques arbitraires n'est pas faisable tant que le problème de spécification des paramètres de synthèse est encore ouvert. En effet, on ne peut pas encore répondre aisément à la question suivante

*Comment spécifier les matrices de pondération d'une synthèse  $\mathcal{LQ}$  réalisant une dynamique de régulation arbitraire tout en préservant ses propriétés de robustesse ?*

Plusieurs études ont été consacrées à cette question sous une formulation admissible qui consiste en la détermination des matrices de pondérations de manière à assigner les modes du système de commande  $\mathcal{LQ}$  dans un secteur donné du domaine de stabilité, i.e.

$$\mathcal{S}_\lambda \triangleq \{s \in \mathbb{C} / \Re(s) \leq -\lambda < 0\} \quad (8.44)$$

Cette propriété peut être obtenue en introduisant une pondération du type exponentielle dans le critère  $\mathcal{LQ}$  comme le montre le résultat suivant

**Résultat 8.12** Considérons une synthèse  $\mathcal{LQ}$  qui consiste à minimiser le critère quadratique

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\lambda t} (x(t)^T Q_p x(t) + u(t)^T R_p u(t)) dt \quad (8.45)$$

avec

$$\lambda > 0, \quad R_p = R_p^T > 0 \text{ et } Q_p = H_p^T H_p \geq 0 \quad (8.46)$$

pour la classe des systèmes (8.1) et supposons que

$\mathcal{HSLQP} (F, G, H_p)$  est une réalisation minimale

Alors la loi de commande qui réalise cette optimisation est particulièrement donnée par

$$\mathcal{REGLQ} \begin{cases} u(t) = -K_\lambda x(t) \\ K_\lambda = R^{-1} G^T P_\lambda \\ (F + \lambda I_n)^T P_\lambda + P_\lambda (F + \lambda I_n) - P_\lambda G R_p^{-1} G^T P_\lambda + Q_p = 0 \end{cases} \quad (8.47)$$

Par ailleurs les modes du système de commande résultat sont situés dans le secteur  $\mathcal{S}_\lambda$  du domaine de stabilité, et sa fonction de sensibilité en entrée vérifie la propriété

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}_c(j\omega)) \leq \frac{\lambda_{\max}(R_c)}{\lambda_{\min}(R_c)} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R} \quad (8.48)$$

**La preuve** de ce résultat est un excellent exercice sur la commande  $\mathcal{LQ}$  que nous proposons de réaliser progressivement en quatre étapes.

**La première étape constitue les préliminaires** requis pour ce faire, en l'occurrence les deux résultats suivants

**Résultat 8.13**  $(F + \lambda I_n, G, H)$  est une réalisation d'état minimale pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $(F, G, H)$  est une réalisation minimale.

**Résultat 8.14** Soient  $Q_1 = H_1^T H_1$  et  $Q_2 = H_2^T H_2$  deux matrices symétriques et définies non négatives telles que  $Q_1 \leq Q_2$ , alors la paire  $(H_2, F)$  est observable pourvu que la paire  $(H_1, F)$  est observable.

Les démonstrations de ces résultats peuvent être aisément faites en utilisant les résultats fondamentaux sur la commandabilité et l'observabilité des systèmes. Montrons d'abord que

$$(F, G) \text{ est commandable} \iff (F + \lambda I_n, G) \text{ est commandable}$$

en utilisant la propriété de commandabilité qui se prête le mieux pour ce faire, soit

$$\begin{aligned} (F, G) \text{ est commandable} &\iff \left( v^T e^{Ft} G = 0 \text{ pour tout } t \iff v = 0 \right) \\ &\iff \left( v^T e^{(F + \lambda I_n)t} G \text{ pour tout } t \iff v = 0 \right) \\ &\iff (F + \lambda I_n, G) \text{ est commandable} \end{aligned}$$

Montrons ensuite que

$$(H, F) \text{ est observable} \iff (H, F + \lambda I_n) \text{ est observable}$$

en utilisant la propriété d'observabilité qui se prête le mieux pour ce faire, soit

$$\begin{aligned} (H, F) \text{ est commandable} &\iff \left( H e^{Ft} v = 0 \text{ pour tout } t \iff v = 0 \right) \\ &\iff \left( H e^{(F + \lambda I_n)t} v = 0 \text{ pour tout } t \iff v = 0 \right) \\ &\iff (H, F + \lambda I_n) \text{ est observable} \end{aligned}$$

Pour la preuve du résultat 8.14, rappelons d'abord que  $(H_1, F)$  est observable si et seulement si  $H_1 v \neq 0$  pour tout  $v \in \mathcal{V}_{df}$  où  $\mathcal{V}_{df}$  désigne l'ensemble des vecteurs propres à droite de la matrice d'état  $F$ . On aura alors

$$v^T H_1^T H_1 v = v^T Q_1 v \neq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}_{df}$$

Et compte tenu de l'inégalité  $Q_1 \leq Q_2$ , on aura

$$v^T H_2^T H_2 v = v^T Q_2 v \geq v^T Q_1 v \neq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}_{df}$$

et donc  $H_2 v \neq 0$  pour tout  $v \in \mathcal{V}_{df}$ , soit  $(H_2, F)$  est observable.

**La deuxième étape concerne l'obtention de loi de commande** à partir d'un recouvrement du contexte de la synthèse  $\mathcal{LQ}$ . Pour ce faire, il suffit d'effectuer le changement de variable adéquat suivant

$$\bar{x}(t) = e^{\lambda t} x(t) \quad \text{et} \quad \bar{u}(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

tout en remarquant que l'équation d'état du système associé est donnée par

$$\begin{aligned} \rho \bar{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t} x(t) + e^{\lambda t} \rho x(t) \\ &= \lambda e^{\lambda t} x(t) + e^{\lambda t} (F x(t) + G u(t)) \\ &= \lambda e^{\lambda t} x(t) + F e^{\lambda t} x(t) + G e^{\lambda t} u(t) \\ &= (F + \lambda I_n) \bar{x}(t) + G \bar{u}(t) \end{aligned}$$

On peut alors reformuler le problème de commande comme un problème de régulation  $\mathcal{LQ}$  standard, en l'occurrence la minimisation du critère quadratique

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{x}^T(t) Q_p \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R_p \bar{u}(t)) dt \quad (8.49)$$

pour le système décrit par

$$\rho \bar{x}(t) = (F + \lambda I_n) \bar{x}(t) + G \bar{u}(t) \quad (8.50)$$

Et comme  $(F, G)$  est commandable et  $(H_p, F)$  est observable, on peut en déduire à la lumière

de la première question que  $(F + \lambda I_n, G)$  est commandable et  $(H_p, F + \lambda I_n)$  est observable. On dispose ainsi de la condition requise par une synthèse  $\mathcal{LQ}$  standard, soit  $(F + \lambda I_n, G, H_p)$  est une réalisation d'état minimale. On retrouve ainsi la loi de commande 8.47 où l'indice  $\lambda$  est volontairement utilisé pour mettre en évidence le fait que cette loi de commande dépend du paramètre  $\lambda$ .

**La troisième étape est une analyse de la stabilité exponentielle** du système de commande en adoptant une approche de Lyapunov. Pour ce faire, considérons la fonction  $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^+$  définie par

$$V(x(t)) = x^T(t)P_\lambda x(t)$$

on aura

$$\begin{aligned} \rho(V(x(t))) &= (\rho x(t))^T P_\lambda x(t) + x^T(t)P_\lambda (\rho x(t)) \\ &= x^T(t) \left( (F - GK_\lambda)^T P_\lambda + P_\lambda (F - GK_\lambda) \right) x(t) \\ &= -x^T(t) (Q_p + 2\lambda P_\lambda) x(t) - x^T(t) (P_\lambda G R_p^{-1} G^T P_\lambda) x(t) \\ &\leq -2\lambda x^T(t) P_\lambda x(t) \\ &\leq -2\lambda V(x(t)) \end{aligned}$$

$V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^+$  est donc une fonction de Lyapunov satisfaisant la propriété

$$\rho(V(x(t))) \leq -2\lambda V(x(t))$$

Cette propriété permet de conclure que le système de commande est bien exponentiellement stable, i.e. la trajectoire d'état du système converge exponentiellement vers l'origine avec un taux de convergence égal à  $\lambda$ , soit

$$\exists \gamma > 0 / \|x(t)\| \leq \gamma e^{-\lambda t}$$

On peut alors en déduire naturellement que tous les modes du système de commande  $\mathcal{LG}$  sont situés dans le domaine de stabilité et de performances défini par

$$\mathcal{D}_{sp} = \{s \in \mathcal{C} / \mathcal{R}_e(s) < -\lambda\}$$

**La quatrième étape est consacrée à la robustesse** Notons d'abord que l'équation algébrique de Riccati associée à la fonction coût peut se récrire sous la forme

$$F^T P_\lambda + P_\lambda F - P_\lambda G R_p^{-1} G^T P_\lambda + 2\lambda P_\lambda + Q_p = 0$$

Et si l'on prend la dérivée partielle rapport à la variable  $\lambda$ , on obtient l'équation

$$\frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} \left( F + \lambda I_n - G R_p^{-1} G^T P_\lambda \right) + \left( F + \lambda I_n - G R_p^{-1} G^T P_\lambda \right)^T \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} + 2P_\lambda = 0$$

qui n'est autre qu'une équation de Lyapunov du système de commande  $\mathcal{LQ}$ . Et comme ce système de commande est asymptotiquement stable, on peut conclure que

$$\frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} \text{ est une matrice symétrique définie positive}$$



Ceci permet de conclure que  $\lambda_1 > \lambda_2 \implies P_{\lambda_1} - P_{\lambda_2} > 0$  puisque  $P_\lambda > 0$ .

Et notons ensuite que l'équation algébrique de Riccati associée à la loi de commande (8.47) peut se récrire sous la forme

$$F^T P_\lambda + P_\lambda F - P_\lambda G R_p^{-1} G^T P_\lambda + (Q_p + 2\lambda P_\lambda) = 0$$

ou d'une manière équivalente

$$F^T P + PF - PGR_c^{-1}G^T P + Q_c = 0 \text{ avec } Q_c = Q_p + 2\lambda P_\lambda \text{ et } R_c = R_p \quad (8.51)$$

En effet, compte tenu du fait que la matrice de pondération d'état peut être factorisée comme suit  $Q_c = H_c^T H_c$  et que  $Q_c = H_c^T H_c \geq Q_p = H_p^T H_p$ , on peut conclure que  $(H_c, F)$  est observable car  $(H_p, F)$  est observable à la lumière du second résultat 8.14. On peut alors conclure que l'équation algébrique de Riccati (8.51) admet une solution unique symétrique et définie positive  $P$  puisque  $(F, G)$  est commandable et  $(H_c, F)$  est observable. Et comme  $P_\lambda$  est une solution triviale de cette équation, on peut en déduire que  $P = P_\lambda$  sous la bénédiction de l'unicité de la solution. Ceci permet de conclure que le système de commande  $\mathcal{LQ}$  considéré est bien doté de la robustesse remarquable intrinsèque à la synthèse  $\mathcal{LQ}$ .

*CQFD*

## 8.4.2 Robustesse en stabilité

Les systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  se distinguent par une marge de module maximale qui leur confère une bonne robustesse en stabilité par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives en entrée. Cette remarquable propriété doit être toutefois considérée avec prudence compte tenu des faits suivants

- F1.* La marge de module est relativement réduite lorsqu'un observateur est utilisé pour reconstruire les variables d'état du système. Ceci constitue un défi pour la synthèse  $\mathcal{LQD}$  en dépit des résultats fondamentaux sur le  $\mathcal{RTB}$ . En effet, la faisabilité du  $\mathcal{RTB}$  est réduite aux systèmes carrés dont tous les zéros sont situés dans le domaine de stabilité et des performances en vertu des résultats 8.10 et 8.11. Par ailleurs, le  $\mathcal{RTB}$  est réalisé au détriment de la propriété d'insensibilité aux bruits de mesures inéluctables comme l'indiquent les remarques 8.18 et 8.21.
- F2.* La vulnérabilité des systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  dans le domaine des hautes fréquences intrinsèque à la structure de leur fonction de transfert en boucle ouverte en entrée, i.e. un retard minimal. Ainsi, les systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  ne sont pas robustes par rapport aux erreurs de modélisation qui sont essentiellement dominantes en hautes fréquences comme l'indique la remarque 8.6. Et cette vulnérabilité est intrinsèque au cas des matrices de pondérations constantes.

Ainsi, la synthèse  $\mathcal{LQD}$  doit être absolument confortée par un développement méthodologique conformément aux exigences de l'ingénierie des systèmes. Deux recommandations peuvent être faites à partir des différentes remarques sur la synthèse  $\mathcal{LQ}$  et les systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  ([72], [79]). La première recommandation est une réalisation partielle du  $\mathcal{RTB}$  par rapport

aux performances dynamiques requises. Elle permet de pallier une compensation des zéros du système, qui pourrait être néfaste si ces derniers ne sont pas situés dans le domaine de stabilité et performances, et préserver l'insensibilité naturelle aux bruits de mesure des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$ . La seconde recommandation est une pondération dynamique appropriée du comportement d'entrée-sortie du système pour rehausser leur robustesse au voisinage des fréquences cruciales des imperfections de modélisation du système.

La réalisation d'un  $\mathcal{RTB}$  partiel en entrée (resp. en sortie) est obtenue en spécifiant convenablement les paramètres de synthèse de l'observateur (rep. du système de commande)  $\mathcal{LQ}$  conformément à la remarque 8.23 (resp. 8.19). Quant à la pondération dynamique du comportement d'entrée-sortie du système, elle permet de conforter la synthèse  $\mathcal{LQ}$  par des pondérations fréquentielles comme il a été suggéré par la remarque 8.6.

Rappelons que la gestion des pondérations fréquentielles conduit naturellement au concept de retour d'état dynamique développé au chapitre 5 dont la synthèse peut être effectuée en minimisant le critère quadratique

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( y_p^T(t) y_p(t) + u_p^T(t) u_p(t) \right) dt \quad (8.52)$$

où  $\{u_p(t)\}$  et  $\{y_p(t)\}$  désignent les séquences d'entrée-sortie pondérées respectivement données par

$$y_p(t) = \mathcal{W}_s(\rho) y(t) \quad \text{et} \quad u_p(t) = \mathcal{W}_e^{-1}(\rho) u(t) \quad (8.53)$$

avec

$$Q_c(s) \triangleq \mathcal{W}_s^T(s) \mathcal{W}_s(s) \geq 0 \quad \text{et} \quad R_c(s) \triangleq \left( \mathcal{W}_e(s) \mathcal{W}_e^T(s) \right)^{-1} > 0 \quad (8.54)$$

**Remarque 8.26** Compte tenu du théorème de Parseval, le critère quadratique (8.52) peut se récrire comme suit

$$J(U(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( Y^*(j\omega) Q_c(j\omega) Y(j\omega) + U^*(j\omega) R_c(j\omega) U(j\omega) \right) d\omega \quad (8.55)$$

où  $Q_c(j\omega) = H_c^*(j\omega) H_c(j\omega) \geq 0$  et  $R_c(j\omega) = R_c^*(j\omega) > 0$  constituent bien des pondérations fréquentielles, compte tenu des expressions (8.53) et (8.54), qui permettraient de se focaliser sur les domaines de fréquences pertinents par rapport à la problématique de commande considérée.

On recouvre ainsi un problème de commande  $\mathcal{LQ}$  pour la cascade  $\mathcal{PE} \rightarrow \mathcal{SYS} \rightarrow \mathcal{PS}$  où  $\mathcal{SYS}$  est le système et  $\mathcal{PE}$  et  $\mathcal{PS}$  sont des systèmes dynamiques dont les fonctions de transfert sont respectivement données par  $\mathcal{W}_e(s)$  et  $\mathcal{W}_s(s)$ . Cette cascade peut être décrite à partir des représentations d'état de ses composantes comme il a été fait pour la commande avec retour d'état dynamique au chapitre 6 qui conduisent à la représentation d'état (6.51)-(6.53). Et si les pondérations sont spécifiées de manière à ce que la réalisation d'état associée, i.e.  $(F_a, G_a, H_a)$ , est stabilisable et détectable, alors on peut réaliser une synthèse  $\mathcal{LQ}$  (resp.  $\mathcal{LQD}$ ) avec des pondérations fréquentielles à la lumière du résultat 8.2 (resp. résultat 8.5).

La loi de commande  $\mathcal{LQ}$  est donnée par

$$\mathcal{CLQP}\mathcal{F} \left\{ \begin{array}{l} u_p(t) = -K_a x_a(t) = -K_\sigma x_\sigma(t) - K_e x_e(t) - K_s x_s(t) \\ K_a = G_a^T P_a \\ F_a P_a + P_a F_a^T - P_a G_a G_a^T P_a + H_a^T H_a = 0 \end{array} \right.$$

Alors que la loi de commande  $\mathcal{LQD}$  est donnée par

$$\mathcal{CREO} \left\{ \begin{array}{l} \rho x_s(t) = F_s x_s(t) + G_s y(t) \\ \rho \hat{x}_a(t) = (F_a - M_a H_a) \hat{x}_a(t) + G_a u_p(t) + M_a (E_s y(t) + H_s x_s(t)) \\ u_p(t) = -K_a \hat{x}_a(t) \\ K_a = G_a^T P_a \\ M_a = \Sigma_a H_a^T \\ F_a P_a + P_a F_a^T - P_a G_a G_a^T P_a + H_a^T H_a = 0 \\ F_a \Sigma_a + \Sigma_a F_a^T - \Sigma_a H_a^T H_a \Sigma_a + H_a^T H_a = 0 \end{array} \right.$$

Comme pour la commande avec retour d'état dynamique, la fonction de transfert du régulateur est donnée par

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{W}_s(s) \mathcal{R}_a(s) \mathcal{W}_e(s)$$

où  $\mathcal{R}_a(s)$  désigne la fonction de transfert du régulateur conçu à partir du système pondéré. On réalise aisément que le système de commande sous-jacent réalise une compensation parfaite des perturbations dont les dynamiques sont partiellement contenues dans celles des pondérations. Rappelons néanmoins que l'ultime motivation des pondérations fréquentielles est de réaliser un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles du système de commande. Le choix des pondérations d'entrée  $\mathcal{W}_e(s)$  et de sortie  $\mathcal{W}_s(s)$ , dont les degrés relatifs sont respectivement désignés par  $dr_e$  et  $dr_s$ , doit se faire en tenant compte des aspects suivants.

- La robustesse de synthèse  $\mathcal{LQ}$  concerne l'entrée du système pondéré, i.e.  $u_p(t)$ , et pourrait se propager à l'entrée du système, i.e.  $u(t)$ , pourvu que la bande passante de la pondération en entrée soit relativement large par rapport à celle du système de commande  $\mathcal{LQ}$ .
- La fonction de transfert  $\mathcal{W}_e(s)$  (resp.  $\mathcal{W}_s(s)$ ) de la pondération en entrée (resp. en sortie) introduit un accroissement de  $20dr_e$  dB/décade (resp.  $20dr_s$  dB/décade) dans la pente de décroissance des valeurs singulières de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande  $\mathcal{LQ}$  qui est favorable à sa robustesse par rapport aux imperfections de modélisation.

- Les fonctions de transfert  $\mathcal{W}_e(s)$  et  $\mathcal{W}_s(s)$  peuvent être spécifiées à partir des modèles générateurs des perturbations (resp. de la séquence de consigne) pour réaliser une compensation parfaite des perturbations de charge (resp. une précision maximale) en vertu du principe du modèle interne développé au chapitre 6.

## 8.5 Conclusion

Ce chapitre est un tour d'horizon motivé sur la commande  $\mathcal{LQ}$  en adoptant une approche déterministe issue d'une lecture ingénieur de la littérature, en l'occurrence les ouvrages pédagogiques adoptés pour l'enseignement d'automatique dans les prestigieuses écoles d'ingénieurs. L'approche déterministe permet de s'approprier des résultats fondamentaux disponibles sans avoir une bonne perception des processus stochastiques. Ce potentiel fondamental est essentiellement développé en tirant le meilleur profit de la dualité observation  $\Leftrightarrow$  commande par rapport à une synthèse  $\mathcal{LQ}$  qui a permis de concevoir un observateur  $\mathcal{LQ}$ .

Une attention particulière a été accordée à la faisabilité d'une commande  $\mathcal{LQ}$  incorporant un observateur  $\mathcal{LQ}$  que l'on désigne par commande  $\mathcal{LQD}$  pour se remémorer la simplicité du concept de dualité dans un contexte déterministe. On distingue trois leviers pour une synthèse  $\mathcal{LQD}$  candidate à l'ingénierie des systèmes. Le premier levier est une interprétation  $\mathcal{H}_2$  d'une synthèse  $\mathcal{LQD}$  pour mettre en évidence la possibilité d'un compromis performances  $\Leftrightarrow$  robustesse admissible. Le deuxième levier concerne la possibilité de préserver les propriétés de robustesse intrinsèque à la commande (resp. de l'observation)  $\mathcal{LQ}$  en effectuant un  $\mathcal{RTB}$  en entrée (resp. en sortie). Le troisième levier relève de la possibilité d'affiner les performances dynamiques (resp. La robustesse par rapport aux erreurs de modélisation) en utilisant des pondérations temporelles (resp. fréquentielles). Ces leviers montrent clairement que la spécification des pondérations est donc vitale pour une synthèse  $\mathcal{LQ}$  soucieuse de l'ingénierie des systèmes. Cette spécification est généralement effectuée par une procédure élaborée en tirant le meilleur profit des études méthodologiques consacrées à la synthèse  $\mathcal{LQ}$  et des possibilités offertes par les systèmes de conception assistée par ordinateur disponibles.

## 8.6 Problèmes

On propose ci-après un ensemble de problèmes en guise d'une auto évaluation des connaissances acquises sur la synthèse  $\mathcal{LQ}$  à partir d'une lecture attentive de ce chapitre.

**Problème 8.1** Etablir un mémo ingénieur sur la conception des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$ .

**Problème 8.2** On se propose d'étudier le problème de commande  $\mathcal{LQ}$  qui minimise le critère quadratique

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_c x(t) + u^T(t)R_c u(t)) dt$$

avec

$$Q_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \geq 0 \text{ et } R_c = 1$$

pour les systèmes décrits par la réalisation d'état

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (1 \quad 0)$$

Après avoir vérifié que le problème de synthèse est bien faisable, établir la loi de commande  $\mathcal{LQ}$  et préciser les performances dynamiques du système de commande sous-jacent.

**Problème 8.3** Déterminer la loi de commande optimale au sens de la minimisation du critère

$$J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + 2x^T(t)Su(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$$

pour la classe des systèmes commandables décrits par

$$\rho x(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

où  $Q = Q^T \geq 0$ ,  $R = R^T > 0$   $S$  est une matrice satisfaisant la condition  $Q - SR^{-1}S^T \geq 0$ . On utilisera pour ce faire l'identité suivante

$$\begin{aligned} x^T(t)Qx(t) + 2x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t) \\ = \\ (u(t) + R^{-1}S^T x(t))^T R (u(t) + R^{-1}S^T x(t)) + x^T(t) (Q - SR^{-1}S^T) x(t) \end{aligned}$$

**Problème 8.4** Montrer que la séquence de commande  $\{u(t)\}_{t \in [t_o, t_f]}$  qui minimise le critère quadratique (8.3) pour les systèmes (8.1) lorsque la matrice de pondération de l'état est identiquement nulle, e.g.  $Q_c = 0$ , et que la matrice de pondération de l'état final est infinie, i.e.  $\lambda_{\min}(P_f) \rightarrow \infty$ , est donnée par la loi de commande avec retour d'état

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

avec

$$K(t) = R_c^{-1}G^T (S(t))^{-1}$$

$$\rho S(t) = S(t)F^T + FS(t) - GR_c^{-1}G^T \quad \text{avec} \quad S(t_f) = 0$$

En déduire que le minimum du critère quadratique obtenue avec une telle loi de commande vaut

$$J^*(u) = x^T(t_o) (S(t_o))^{-1} x(t_o)$$

Pour ce faire, rappelons que

$$\rho((P(t))^{-1}) = (P(t))^{-1} \rho(P(t)) (P(t))^{-1}$$

**Problème 8.5** *Considérons la classe des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par la représentation d'état partiel*

$$\text{SYS} \begin{cases} A(\rho)z(t) = u(t) \\ y(t) = B(\rho)z(t) \end{cases} \quad (8.56)$$

où  $z(t)$  désigne l'état partiel du système et  $A(\rho)$  et  $B(\rho)$  sont deux polynômes premiers entre eux respectivement donnés par

$$A(\rho) = \rho^n + a_1\rho^{n-1} + \dots + a_{n-1}\rho + a_n$$

$$B(\rho) = b_1\rho^{n-1} + \dots + b_{n-1}\rho + b_n \text{ avec } B(0) \neq 0$$

On se propose de concevoir un système de commande avec modèle de référence sur l'état partiel qui consiste à réaliser la propriété suivante

$$\text{PERF} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) - z^*(t) = 0 \end{cases} \quad (8.57)$$

où  $\{z^*(t)\}$  désigne une séquence d'état partiel de référence que l'on peut spécifier à partir d'une séquence de référence de sortie  $\{y^*(t)\}$  comme suit

$$z^*(t) = \beta y^*(t) \text{ avec } y^*(t) = \mathcal{G}^*(\rho)u^*(t) \quad (8.58)$$

où la fonction de transfert  $\mathcal{G}^*(s)$  représente le modèle de référence sur l'état partiel,  $\{u^*(t)\}$  désigne la séquence de points de consigne et  $\beta$  est un scalaire essentiellement introduit pour garantir une dynamique de poursuite de gain statique unitaire.

On demande d'effectuer cette synthèse progressivement en utilisant les variables suivantes dont on précisera la nature au moment opportun

$$\text{ERPES} \begin{cases} e_u(t) \triangleq u(t) - A(\rho)\beta y^*(t) \\ e_y(t) \triangleq y(t) - B(\rho)\beta y^*(t) \end{cases} \quad (8.59)$$

**1)** Montrer que le système peut être décrit par la représentation d'état

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Ge_u(t) \\ e_y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (8.60)$$

où  $(F, G, H)$  est une réalisation d'état minimale du système.

- 3) Montrer le système de commande avec modèle de référence sur l'état partiel peut être conçu à partir d'une synthèse  $\mathcal{LQD}$  qui minimise le critère quadratique

$$\mathcal{MRÉPLQG} \left\{ J(e_u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} ((e_y(\tau))^2 + \lambda (e_u(\tau))^2) d\tau \right. \quad (8.61)$$

où  $\lambda$  est un scalaire non négatif que l'on spécifiera en fonction des performances dynamiques requises en régulation.

- 4) Montrer que la loi de commande avec modèle de référence sur l'état partiel peut se mettre sous la forme polynomiale

$$\mathcal{REG} \left\{ \frac{S(\rho)}{P_o(\rho)} u(t) + \frac{R(\rho)}{P_o(\rho)} y(t) = \frac{T(\rho)}{P_o(\rho)} y^*(t) \right. \quad (8.62)$$

On précisera les expressions des polynômes  $R(\rho)$ ,  $S(\rho)$ ,  $T(\rho)$  et  $P_o(\rho)$ .

- 5) Montrer que  $\{e_u(t)\}$  et  $\{e_y(t)\}$  peuvent être interprétées comme des quantificateurs de performances du système de commande avec modèle de référence considéré et préciser comment déterminer le scalaire  $\beta$ .

**Problème 8.6** On se propose de concevoir un asservissement réalisant une erreur statique nulle dans le cas des séquences de référence de type échelon pour les systèmes carrés, i.e. autant d'entrées que de sorties, décrits par une réalisation d'état minimale  $(F_\sigma, G_\sigma, H_\sigma)$  et qui n'admettent pas de pôles ou de zéros à l'origine. Pour ce faire, on suggère d'incorporer un intégrateur à l'entrée du système et de procéder progressivement à la lumière du principe du modèle interne.

- 1) Montrer que la cascade constituée de l'intégrateur et du système peut être décrite par la représentation d'état

$$\mathcal{INTSYS} \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + G\rho u(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \right. \quad (8.63)$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

$$F = \begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix} \text{ et } H = ( H_\sigma \ 0 ) \quad (8.65)$$

Préciser toutes les propriétés qui caractérisent la classe des systèmes considérée et en déduire que la réalisation d'état  $(F, G, H)$  est minimale.

- 2) Montrer que le problème d'asservissement considéré peut être ramené à un problème de régulation associé au modèle suivant

$$\mathcal{MRÉG} \left\{ \begin{array}{l} \rho z(t) = Fz(t) + G\rho u(t) \\ e(t) = Hz(t) \end{array} \right. \quad (8.66)$$

où  $(F, G, H)$  est la réalisation d'état (8.65) et  $e(t)$  est l'erreur de poursuite de l'asservissement, i.e.  $e(t) \triangleq y(t) - y^*(t)$ , alors  $z(t)$  est un vecteur d'état approprié donné par

$$z(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) - \Gamma_e y^*(t) \\ u(t) + \Gamma^* y^*(t) \end{pmatrix} \quad (8.67)$$

avec

$$\Gamma_e = F^{-1}G\Gamma^* \text{ et } \Gamma^* = (HF^{-1}G)^{-1} \quad (8.68)$$

On motivera le choix du changement des variables d'état adopté et on précisera que les performances de précision requises, i.e. une erreur statique nulle, sont bien réalisées.

3) En déduire que la loi de commande peut se récrire sous la forme suivante

$$\text{CRE} \left\{ (\rho I_m + W_\sigma) u(t) = -K_\sigma x_\sigma(t) + \Gamma y^*(t) \right. \quad (8.69)$$

On précisera les expressions des matrices  $W_\sigma$ ,  $K_\sigma$  et  $\Gamma$  tout en appréciant la nature de retour d'état dynamique de la loi de commande.

**Indication.** L'observabilité de la paire  $(H, F)$  pourrait être étudiée en remarquant que la matrice d'observabilité sous-jacente peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{O}(H, F) = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ \mathcal{O}(H_\sigma, F_\sigma) & 0 \\ H_\sigma F_\sigma^n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ H_\sigma F_\sigma^{n+p-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma \\ H_\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

et que la matrice

$$\begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma \\ H_\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

est régulière si le système n'admet aucun zéro à l'origine puisque

$$\begin{pmatrix} F_\sigma & G_\sigma \\ H_\sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_\sigma & G_\sigma \\ -H_\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

**Problème 8.7** Considérons le système de commande  $\mathcal{LQ}$  composé d'un système décrit par l'équation d'état (8.1) satisfaisant l'hypothèse  $\mathcal{HC}$  et du régulateur  $\mathcal{LQ}$  donné par les équations (8.8)-(8.10). On demande d'étudier la stabilité de ce système de commande en adoptant une approche de Lyapunov.

**Indication.** On peut montrer que  $V : x(t) \in \mathcal{R}^n \rightarrow V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \in \mathcal{R}^+$  vérifie toutes les propriétés d'une fonction de Lyapunov.



**Problème 8.8** On se propose de mettre en exergue le problème  $\mathcal{RTB}$  à partir d'un simple exercice de calcul de fonctions de transfert en ouvrant la boucle du système de commande  $\mathcal{LQD}$  de la figure 8.3 aux points 1, 2, 3 et 4; que l'on désignera respectivement par  $\mathcal{G}_{o1}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{o2}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{o3}(s)$  et  $\mathcal{G}_{o4}(s)$ . Pour ce faire, on suggère de procéder comme suit.

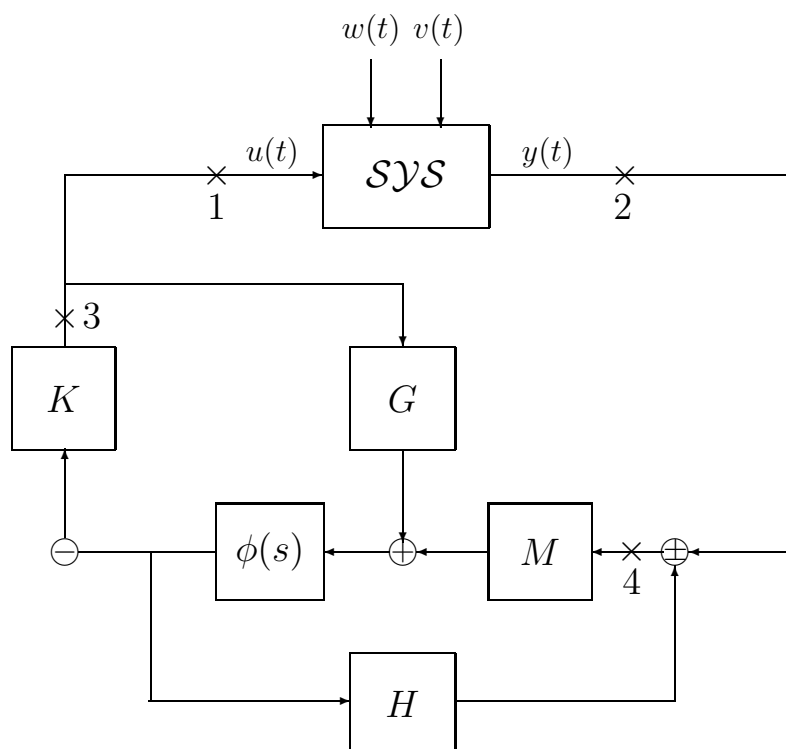


FIGURE 8.3 – Système de commande  $\mathcal{LQD}$

- 1) Déterminer les fonctions de transfert en boucle ouverte  $\mathcal{G}_{o1}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{o2}(s)$ ,  $\mathcal{G}_{o3}(s)$  et  $\mathcal{G}_{o4}(s)$ .
- 2) Justifier pourquoi les expressions de  $\mathcal{G}_{o3}(s)$  et  $\mathcal{G}_{o4}(s)$  sont relativement simples par rapport aux expressions de  $\mathcal{G}_{o1}(s)$  et  $\mathcal{G}_{o2}(s)$ .
- 3) Préciser les limitations d'un système de commande qui permet de réaliser parfaitement un  $\mathcal{RTB}$ . Comment exploiter judicieusement les résultats fondamentaux sur le  $\mathcal{RTB}$  ?

**Problème 8.9** Montrer que le polynôme caractéristique d'un système de commande  $\mathcal{LQ}$  réalisant un  $\mathcal{RTB}$  en sortie est donné par

$$\det(sI_n - F + GK) = \lim_{\rho_c \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} \right)^p \det(R_c^{-\frac{1}{2}}) \det(W_c) \det(sI_n - F) \det(\mathcal{G}(s))$$

où  $W_c$  est une matrice unitaire, i.e.  $W_c W_c^T = I_p$ . Et préciser sa configuration modale.

**Problème 8.10** *Considérons la classe des systèmes commandables et observables sans aucun zéro en zéro soumis à des perturbations en échelon dont le comportement dynamique peut être raisonnablement décrit par*

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}_\sigma(t) = F_\sigma x_\sigma(t) + G_\sigma u(t) + \Gamma_\sigma v(t) \\ y(t) = H_\sigma x_\sigma(t) + E_\sigma v(t) \end{cases}$$

où  $\{x_\sigma(t)\} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\{u(t)\} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\{y(t)\} \in \mathcal{R}^p$  et  $\{v(t)\} \in \mathcal{R}^m$  représentent respectivement l'état, l'entrée, la sortie du système et les perturbations,  $F_\sigma \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $G_\sigma \in \mathcal{R}^{n \times p}$ ,  $H_\sigma \in \mathcal{R}^{p \times n}$ ,  $\Gamma_\sigma \in \mathcal{R}^{n \times m}$  et  $E_\sigma \in \mathcal{R}^{p \times m}$  sont respectivement les matrices d'état, d'entrée et de sortie. On se propose de concevoir un asservissement dont le diagramme fonctionnel est donné par la figure 8.4 pour des séquences de référence  $\{y^*(t)\} \in \mathcal{R}^p$  du type échelon en adoptant une synthèse LQD réalisant les spécifications suivantes.

S1 Une poursuite parfaite caractérisée par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_p$ .

S2 Des performances dynamiques caractérisées par des modes situés dans le domaine

$$\mathcal{D}_{sp} = \{\mu \in \mathcal{C} / \mathcal{R}_e(\mu) < -\omega_r\}$$

S3 Une insensibilité aux bruits de mesure et une robustesse admissible en stabilité

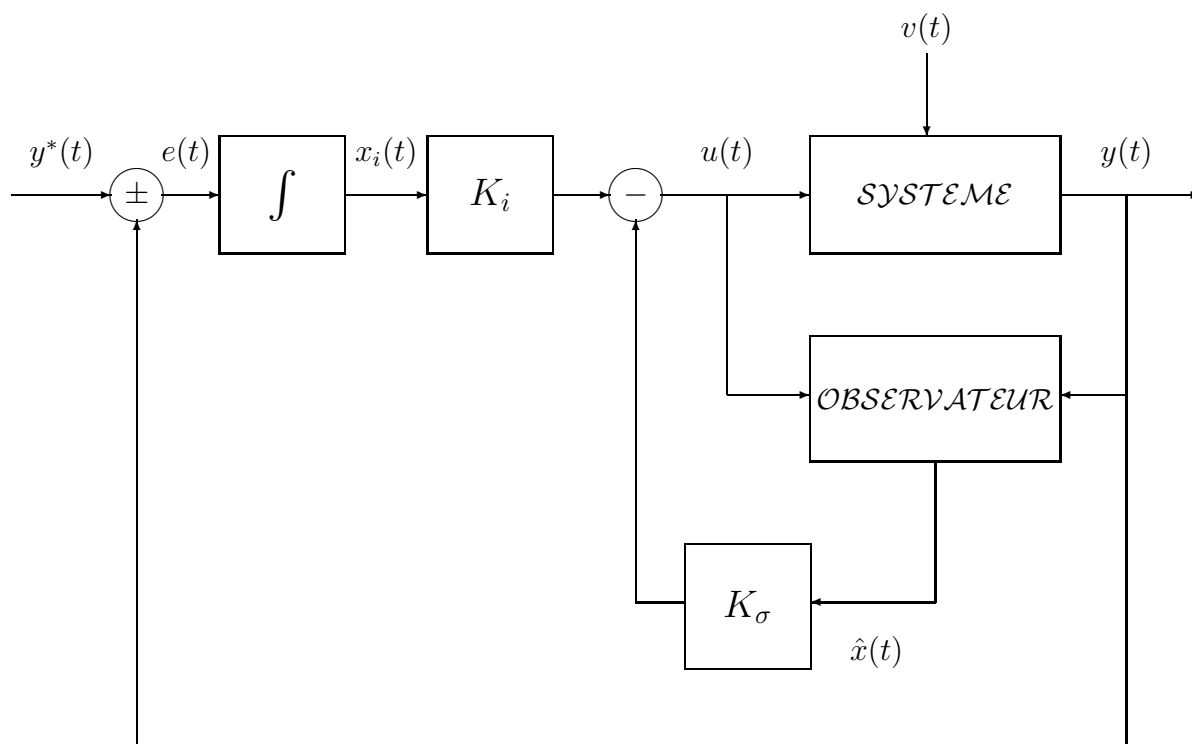


FIGURE 8.4 – Commande avec retour de sortie incorporant une action intégrale

*Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement conformément à la démarche proposée ci-dessous en motivant rigoureusement les solutions adoptées.*

- 1) Motiver le choix des diverses composantes du système de commande.
- 2) Donner les fonctions de transfert du système par rapport à son entrée et aux perturbations qui affectent son fonctionnement et préciser comment déterminer les configurations des modes, des pôles et des zéros correspondants.
- 3) Montrer que l'interconnexion de l'intégrateur au système peut être décrite par la représentation d'état

$$\text{SYS AI} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ew(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_i(t) \end{pmatrix} \text{ et } w(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_\sigma & 0_{n \times p} \\ -H_\sigma & 0_p \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_\sigma \\ 0_p \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_\sigma & 0_{n_\sigma \times p} \\ -\Gamma_\sigma & I_p \end{pmatrix}$$

$$H = ( H_\sigma \quad 0_p ) \text{ et } E = ( E_\sigma \quad 0_p )$$

- 4) Montrer que  $(F, G)$  est commandable et  $(H, F)$  n'est pas observable.
- 5) Considérons le système de commande avec retour d'état incorporant une action intégrale de la figure 8.5 que l'on désignera par SCREAI.

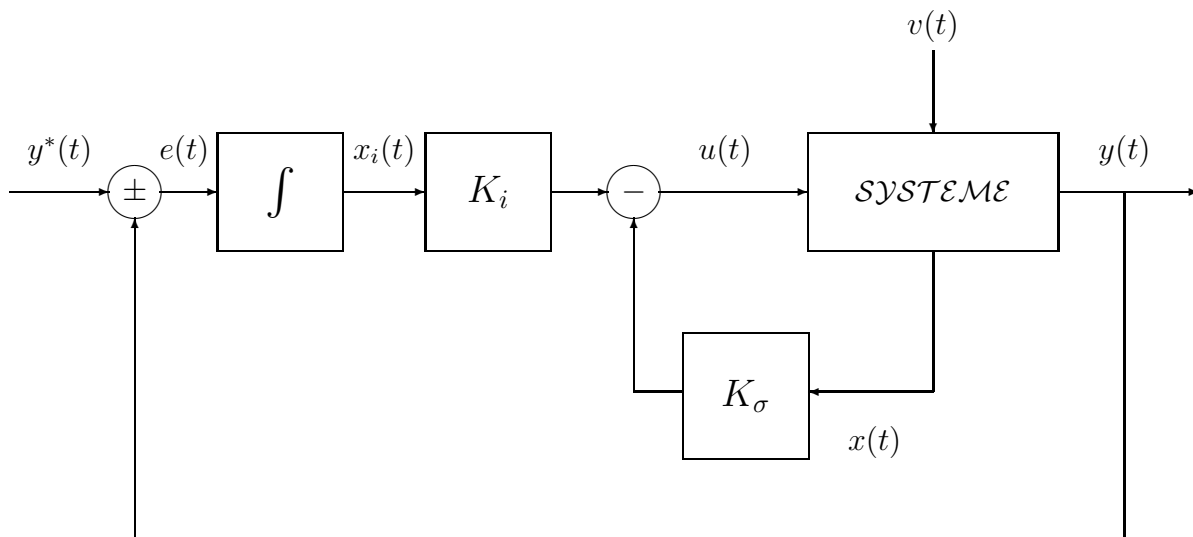


FIGURE 8.5 – Commande avec retour d'état incorporant une action intégrale

Montrer que ce système de commande avec retour d'état est décrit par

$$\text{SCREAI} \begin{cases} \rho x(t) = F_{scre}x(t) + \Gamma_{scre}w(t) \\ y(t) = H_{scre}x(t) + E_{scre}w(t) \end{cases}$$

avec

$$F_{\text{scre}} = \begin{pmatrix} F_\sigma - G_\sigma K_\sigma & -G_\sigma K_i \\ -H_\sigma & 0_p \end{pmatrix}, \Gamma_{\text{scre}} = \Gamma, H_{\text{scre}} = H \text{ et } E_{\text{scre}} = E$$

Et en déduire que la propriété suivante est vraie

$$\text{SCREAI est asymptotiquement stable} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

- 6) Déterminer les gains  $K_\sigma$  et  $K_i$  en adoptant une synthèse  $\mathcal{LQ}$ . On précisera le critère quadratique sous-jacent et toute hypothèse éventuelle pour avoir une synthèse faisable.
- 7) Proposer un observateur asymptotique compatible avec les performances dynamiques requises. On précisera les conditions requises pour ce faire.
- 8) Etudier la stabilité du système de commande de la figure 8.4 et la convergence de son erreur de poursuite dans le cas où le gain de commande avec retour d'état  $K = \begin{pmatrix} K_\sigma & K_i \end{pmatrix}$ , et le gain d'observation  $M$  sont déterminés conformément aux synthèses considérées.
- 9) Spécifier un générateur de la séquence de référence compatible avec les performances requises en poursuite.
- 10) Montrer que la loi de commande avec retour d'état estimé peut se mettre sous la forme usuelle

$$\mathcal{REG} \left\{ \frac{S(s)}{P_o(s)} sU(s) + \frac{R(s)}{P_o(s)} Y(s) = \frac{T(s)}{P_o(s)} Y^*(s) \right.$$

Donner les expressions des polynômes  $S(s)$ ,  $R(s)$ ,  $T(s)$  et  $P_o(s)$  ainsi que la fonction de transfert du régulateur sous-jacent.

- 11) Etudier la sensibilité aux bruits de mesure du système de commande est insensible aux bruits de mesure
- 12) Préciser les principales motivations du titre de ce problème.

**Indication.** Pour la deuxième question, la propriété de commandabilité pourrait être traitée en utilisant la décomposition suivante de la matrice de commandabilité du système avec action intégrale

$$\mathcal{C}(F_a, G_a) = \begin{pmatrix} F & G \\ -H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C}(F, G) & F^n G & \dots & F^{n+p-2} G \\ I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et que la matrice

$$\begin{pmatrix} F & G \\ -H & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F & -G \\ H & 0 \end{pmatrix}$$

est régulière si le système n'admet aucun zéro à l'origine.

**Problème 8.11** Un système de commande constitué d'un système réel positif en rétroaction avec un régulateur strictement réel positif exhibe une excellente robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques et/ou erreurs de modélisation inéluctables. On se propose de concevoir un régulateur  $\mathcal{LQD}$  strictement réel positif pour la classe des systèmes décrits par une réalisation minimale  $(F, G, H)$  satisfaisant les propriétés suivantes

$$\mathcal{CPSYS} \begin{cases} \exists Q = Q^T \geq 0 / F + F^T = -Q \\ G = H^T \end{cases} \quad (8.70)$$

Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit.

- 1) Découvrir ce qu'est un système (strictement) réel positif : on donnera les définitions et les résultats fondamentaux de caractérisation des systèmes réels positifs et strictement réel positifs.
- 2) Montrer que les systèmes décrits par une réalisation d'état minimale satisfaisant les conditions 8.70 sont bien réels positifs.
- 3) Donner la loi de commande  $\mathcal{LQD}$  et préciser les conditions requises pour la faisabilité.
- 4) Montrer que si les matrices de pondération  $Q_c$  et  $R_c$  et de covariance  $Q_o$  et  $R_o$  sont telles que

$$\mathcal{RSPCON} \begin{cases} Q_o = Q + GR_c^{-1}G^T \\ R_o = R_c \\ \bar{Q}_c \triangleq Q_c - GR_c^{-1}G^T > 0 \end{cases} \quad (8.71)$$

alors le régulateur  $\mathcal{LQD}$  précédemment élaboré est strictement réel positif.

- 5) Citer une application pertinente de ce type de synthèse.



# Chapitre 9

## Estimation linéaire quadratique

Considérons la classe des systèmes linéaires invariants dans le temps dont le comportement dynamique est décrit par les équations d'état et de sortie

$$\mathcal{MEO} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (9.1)$$

où  $\{x(t)\} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\{u(t)\} \in \mathcal{R}^m$  et  $\{y(t)\} \in \mathcal{R}^p$  représentent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système,  $F \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $\Gamma \in \mathcal{R}^{n \times q}$  et  $H \in \mathcal{R}^{p \times n}$  sont respectivement les matrices d'état, d'entrée et de sortie,  $\{w(t)\} \in \mathcal{R}^{q \times 1}$  et  $\{v(t)\} \in \mathcal{R}^{p \times 1}$  sont respectivement des bruits blancs mutuellement indépendants de matrices de covariance  $Q_e = Q_e^T \geq 0$  et  $R_o = R_o^T > 0$ , soit

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^T(t-\tau) & v^T(t-\tau) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & R_o \end{pmatrix} \delta(\tau) \quad (9.2)$$

et  $x(t_o)$  est une variable aléatoire indépendante des perturbations d'état de moyenne  $x_o$  et de matrice de covariance  $\Sigma_o = \Sigma_o^T \geq 0$ , soit

$$\mathcal{E} \{x(t_o)\} = x_o \text{ et } \mathcal{E} \left\{ (x(t_o) - x_o) (x(t_o) - x_o)^T \right\} = \Sigma_o \quad (9.3)$$

**Remarque 9.1** La classe des systèmes considérée peut être décrite par une représentation du type fonction de transfert comme suit

$$Y(s) = \mathcal{G}(s) W(s) + I_p V(s) \text{ avec } \mathcal{G}(s) = H(sI_n - F)\Gamma \in \mathcal{R}^{p \times q}(s)$$

Par ailleurs, la matrice de covariance des perturbations d'état peut être exprimée en fonction de celle de l'entrée des perturbations d'état comme suit

$$\mathcal{E} \left\{ (Ew(t)) (Ew(t-\tau))^T \right\} = EQ_e E^T \delta(\tau) \triangleq Q_o \delta(\tau) \triangleq G_o G_o^T \delta(\tau)$$

Le problème d'estimation à variance minimale consiste à élaborer un système dynamique linéaire dont la trajectoire d'état, que l'on désignera par  $\{\hat{x}(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ , minimise la variance de l'erreur d'estimation, soit le critère quadratique suivant

$$J(\hat{x}(t)) = \mathcal{E} \left\{ (x(t) - \hat{x}(t))^T Q_{es}(t) (x(t) - \hat{x}(t)) \right\} \quad (9.4)$$

où  $Q_{es}(t) = Q_{es}^T(t) \geq 0$  pour tout  $t$ . Il a été résolu durant les années soixante par Kalman et Bucy ([51]) en supposant que

$$\mathcal{HFKB} \left\{ (F, G_o, H) \text{ est une réalisation d'état stabilisable et détectable} \right\} \quad (9.5)$$

Depuis cette contribution sur l'estimation à variance minimale, connue sous l'appellation  $\mathcal{FKB}$  pour un hommage à ses auteurs, a été judicieusement exploitée pour développer une ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée comme en témoignent les nombreuses applications industrielles réussies allant de la sûreté de fonctionnement et la conduite des systèmes dynamiques à la prédiction financière. Ces applications ont été réalisées à partir d'un large spectre de méthodologies d'estimation optimale spécifiques allant de la sûreté de fonctionnement et la conduite des systèmes dynamiques à la prédiction financière. Des outils d'analyse, de synthèse et de mise en oeuvre suffisamment puissants ont été développés pour ce faire. On notera que l'hypothèse  $\mathcal{HFKB}$  est raisonnable dans la mesure où la paire  $(H, F)$  est détectable et que la matrice  $G_o$  est un paramètre de synthèse que l'on peut toujours spécifier de manière à ce que la paire  $(F, G_o)$  soit stabilisable, i.e.  $G_o = G$ .

Ce chapitre est consacré à l'estimation optimale et ses applications en deux parties après un résultat fondamental de vulgarisation du calcul différentiel stochastique. L'estimation optimale est présentée dans la première partie d'une manière compréhensible en accordant une attention particulière aux résultats fondamentaux disponibles et aux conditions requises pour réaliser une reconstruction parfaite des variables d'état des systèmes linéaires. La seconde partie est dédiée aux applications usuelles de l'estimation optimale, notamment le filtrage des signaux, l'identification en temps réel des systèmes et la commande  $\mathcal{LQG}$ .

## 9.1 Préliminaires.

Le problème d'estimation optimale considéré a été principalement développé dans un contexte stochastique approprié. Le résultat fondamental suivant permet de simplifier le calcul différentiel stochastique en le ramenant à un calcul différentiel sur le comportement des processus stochastiques en moyenne.

**Résultat 9.1** Considérons le système linéaire d'équations différentielles stochastiques

$$\rho x(t) = A(t)x(t) + \nu(t)$$

où  $\{\nu(t)\}$  est un bruit blanc caractérisé par une moyenne nulle et une matrice de covariance  $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$  et  $x(t_o)$  est une variable aléatoire indépendante de  $\{\nu(t)\}$  de moyenne  $x_o$ , de covariance  $\Omega_o = \Omega_o^T \geq 0$  et dont le moment d'ordre deux est  $M_o = M_o^T \geq 0$ . Et posons

$$x_m(t) \triangleq \mathcal{E} \{x(t)\}$$

$$\Omega(t) \triangleq \mathcal{E} \left\{ (x(t) - x_m(t)) (x(t) - x_m(t))^T \right\}$$



et

$$J(t_o, t_f) \triangleq \mathcal{E} \left\{ x^T(t) W_f x(t) + \int_{t_o}^{t_f} x^T(t) W(t) x(t) dt \right\}$$

où  $W(t) = W^T(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [t_o, t_f]$  et  $W_f = W_f^T \geq 0$ . Alors les propriétés suivantes sont vraies.

**P1.** La moyenne et la covariance de la solution du système différentiel stochastique considéré sont respectivement données par les équations différentielles

$$\rho x_m(t) = A(t)x_m(t) \text{ avec } x_m(t_o) = x_o$$

et

$$\rho \Omega(t) = A(t)\Omega(t) + \Omega(t)A^T(t) + Q(t) \text{ avec } \Omega(t_o) = \Omega_o$$

**P2.** La fonction coût  $J(t_o, t_f)$  considérée est donnée par

$$J(t_o, t_f) = \text{trace} \left( W(t_o) M_o + \int_{t_o}^{t_f} Q(t) W(t) dt \right)$$

avec

$$-\rho W(t) = A^T(t)W(t) + W(t)A(t) + W(t) \text{ avec } W(t_f) = W_f$$

La **preuve** de ce résultat est un excellent exercice sur le calcul différentiel stochastique qui requiert de bonnes connaissances sur les processus stochastiques que l'on peut acquérir agréablement à partir des ouvrages [6], [55] et [68]. La remarque suivante est une indication vitale pour un tel exercice.

**Remarque 9.2** Les matrices  $\Omega(t)$  et  $W(t)$  sont respectivement données par

$$\Omega(t) = \int_{t_o}^t \phi(t, \tau) Q(\tau) \phi^T(t, \tau) d\tau + \phi^T(t, t_o) \Omega_o \phi(t, t_o)$$

et

$$W(t) = \int_t^{t_f} \phi^T(\tau, t) W(\tau) \phi(\tau, t) d\tau + \phi^T(t_f, t) W_f \phi(t_f, t)$$

où  $\phi(t, \tau)$  est la matrice de transition du système stochastique considéré, soit la solution de l'équation différentielle matricielle

$$\rho \phi(t, \tau) = A(t)\phi(t, \tau) \text{ avec } \phi(\tau, \tau) = I_n \forall \tau \in \mathcal{R}$$

## 9.2 Estimation optimale

Kalman et Bucy ont résolu le problème d'estimation à variance minimale en deux temps. Ils ont d'abord montré que l'estimation optimale à variance minimale est faisable avec un estimateur linéaire dont le gain a été ensuite déterminé de manière à réaliser la minimisation requise du critère quadratique 9.4 tout en garantissant la stabilité asymptotique de l'estimateur. Une telle démarche a été confortée par le résultat suivant.

**Résultat 9.2** *Supposons que  $(H, F)$  est détectable et  $(F, G_o)$  est stabilisable, alors l'estimation optimale peut être réalisée par le système dynamique décrit par les équations*

$$\rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) + M(t) (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (9.6)$$

avec

$$M(t) = \Sigma H^T R_o^{-1} \quad (9.7)$$

$$\rho \Sigma(t) = F \Sigma(t) + \Sigma(t) F^T - \Sigma(t) H^T R_o^{-1} H^T \Sigma(t) + Q_o(t) \quad (9.8)$$

*On ne fera pas une preuve rigoureuse de ce résultat mais on donnera trois postulats pour pouvoir la faire en admettant la partie relative à la structure de l'estimateur. i.e l'équation (9.6).*

**Le premier postulat** stipule que les propriétés de l'estimateur d'état (9.6) peuvent être étudiées à partir de l'analyse de l'équation différentielle stochastique de l'erreur d'estimation associée, soit

$$\rho \tilde{x}(t) = (F - M(t)H) \tilde{x}(t) + Ew(t) - M(t)v(t) \quad (9.9)$$

*En vertu du résultat 9.1, on peut en déduire aisément que le comportement de l'erreur d'estimation est décrit par*

$$\rho \tilde{x}_m(t) = (F - M(t)H) \tilde{x}_m(t) \quad (9.10)$$

avec

$$\rho \Sigma(t) = (F - M(t)H) \Sigma(t) + \Sigma(t) (F - M(t)H)^T + Q_o + M(t) R_o M^T(t) \quad (9.11)$$

*On notera que l'équation différentielle de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (9.11) peut se récrire comme suit*

$$\begin{aligned} \rho \Sigma(t) = & F \Sigma(t) + \Sigma(t) F^T + Q_o \\ & - (M(t)H \Sigma(t) + \Sigma(t) H^T M^T(t) - M(t) R_o M^T(t)) \end{aligned} \quad (9.12)$$

*Cette forme permet de mettre en évidence les diverses composantes de l'erreur d'estimation. Les deux premiers termes représentent la propagation de de l'erreur d'estimation à travers la dynamique du système. Le troisième terme représente l'augmentation de l'erreur d'observation due aux perturbations d'état du système. Le dernier terme représente la réduction de l'erreur d'estimation due aux mesures considérées et dépend naturellement du gain d'estimation.*

**Le second postulat** stipule qu'un estimateur qui minimise la matrice de covariance de l'erreur d'estimation minimise le critère quadratique (9.4) indépendamment de la matrice de pondération pourvu qu'il réalise une convergence de la moyenne de l'erreur d'observation vers l'origine. Ce postulat émane naturellement du fait que le critère quadratique 9.4 peut être exprimé en fonction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$J(\hat{x}(t)) = \mathcal{E} \{ \tilde{x}^T(t) Q_{es}(t) \tilde{x}(t) \} = \mathcal{E} \{ \tilde{x}_m^T(t) Q_{es}(t) \tilde{x}_m(t) \} + \text{trace}(\Sigma(t) Q_{es}(t))$$

et de la propriété algébrique

$$A \leq B \implies \text{trace}(AW) \leq \text{trace}(BW) \text{ pour tout } W \geq 0$$

**Le troisième postulat** concerne la minimisation de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation qui peut être réalisée à la lumière du résultat suivant

**Résultat 9.3** Soient  $\{\Sigma(t)\}$  et  $\{\bar{\Sigma}(t)\}$  les solutions des équations différentielles

$$\rho \Sigma(t) = F \Sigma(t) + \Sigma(t) F^T + Q_o - (M(t) H \Sigma(t) + \Sigma(t) H^T M^T(t) - M(t) R_o M^T(t))$$

et

$$\rho \bar{\Sigma}(t) = F \bar{\Sigma}(t) + \bar{\Sigma}(t) F^T + Q_o - \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1} H \bar{\Sigma}(t)$$

avec  $\Sigma(0) = \bar{\Sigma}(0) = \Sigma_o$ . Supposons que  $\Sigma_o = \Sigma_o^T \geq 0$ , alors on a

$$\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \text{ et } \Sigma(t) = \bar{\Sigma}(t) \text{ pour } M(t) = \Sigma(t) H^T R_o^{-1}$$

**Preuve.** Compte tenu des équations différentielles matricielles considérées, on a

$$\begin{aligned} \rho(\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) &= F(\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) + (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) F^T - M(t) H \Sigma(t) \\ &\quad - \Sigma(t) H^T M^T(t) + M(t) R_o M^T(t) + \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1} H \bar{\Sigma}(t) \\ &= (F - M(t) H)(\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) + (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t))(F - M(t) H)^T \\ &\quad + (M(t) - \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1}) R_o (M(t) - \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1})^T \end{aligned}$$

Et en vertu du résultat 9.1, on en déduit aisément que

$$\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t) = \int_0^t \psi(t, \tau) (M(\tau) - \bar{\Sigma}(\tau) H^T R_o^{-1}) R_o (M(\tau) - \bar{\Sigma}(\tau) H^T R_o^{-1})^T \psi^T(t, \tau) d\tau$$

où  $\{\psi(t, \tau)\}$  n'est autre que la solution de l'équation différentielle

$$\rho \psi(t, \tau) = (F - M(t) H) \psi(t, \tau) \text{ avec } \psi(t, t) = I_n$$

Ceci conduit naturellement au résultat escompté puisque

$$\int_0^t \psi(t, \tau) (M(\tau) - \bar{\Sigma}(\tau)H^T R_o^{-1}) R_o (M(\tau) - \bar{\Sigma}(\tau)H^T R_o^{-1})^T \psi^T(t, \tau) d\tau \geq 0$$

*CQFD*

Ces trois postulats corroborent le résultat 9.2 qui n'est autre qu'une version non stationnaire du  $\mathcal{FKB}$  qui est beaucoup plus appropriée au cas des systèmes linéaires variants dans le temps (2.101) comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat 9.4** *Considérons la classe des systèmes linéaires variants dans le temps (2.101) et posons  $Q(t) = G_o(t)G_o^T(t)$ . Si la réalisation d'état  $(F(t), G_o(t), H(t))$ , où  $Q(t) = G_o(t)G_o^T(t)$  est uniformément commandable et observable, alors on peut réaliser une estimation à variance minimale des variables d'état du système avec le peut être réalisée par le  $\mathcal{FKB}$  donné par les équations*

$$\rho \hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + G(t)u(t) + M(t) (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (9.13)$$

avec

$$M(t) = \Sigma(t)H^T(t)R_o^{-1}(t) \quad (9.14)$$

$$\rho \Sigma(t) = F(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)F^T(t) - \Sigma(t)H^T(t)R_o^{-1}(t)H(t)\Sigma(t) + Q_o(t) \quad (9.15)$$

Le résultat suivant donne le  $\mathcal{FKB}$  pour les systèmes linéaires invariants soumis à des perturbations d'état et des bruits de mesure décrits par des processus stochastiques stationnaires.

**Résultat 9.5** *Considérons la classe des systèmes (9.1)-(9.3) et supposons que la réalisation d'état  $(F, G_o, H)$  est stabilisable et détectable, alors l'estimation optimale peut être réalisée par le système dynamique décrit par les équations*

$$\rho \hat{x}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (9.16)$$

avec

$$M = \Sigma H^T R_o^{-1} \quad (9.17)$$

$$0 = F\Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o \quad (9.18)$$

**Preuve.** *La preuve de ce résultat découle naturellement du résultat C.12 et du fait que l' $\mathcal{EAR}$  (9.18) peut se récrire sous la forme*

$$(F - MH)\Sigma + \Sigma(F - MH)^T = -(Q_o + MR_o M^T)$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Lyapunov associé au  $\mathcal{FKB}$  puisque la solution  $\Sigma$  est unique et définie positive.

*CQFD*

Et en guise d'une belle conclusion, le  $\mathcal{FKB}$  est doté d'une capacité de filtrage adéquate comme le stipule le résultat fondamental suivant.

**Résultat 9.6** Le  $\mathcal{FKB}$  stationnaire (9.16)-(9.18) réalise les propriétés statistiques suivantes

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t) \hat{x}^T(t) \} = 0$$

$$\mathcal{E} \{ \tilde{y}(t) \hat{x}^T(t) \} = 0 \text{ avec } \tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

$$\mathcal{E} \{ \tilde{y}(t) \tilde{y}^T(t - \tau) \} = R_o \delta(\tau)$$

**La preuve** de ce résultat découle naturellement du contexte stochastique considéré, i.e. les propriétés des bruits d'état et de mesure, et de l'objectif d'estimation réalisée, i.e. la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation.

**Remarque 9.3** Les équations du  $\mathcal{FKB}$  sont les mêmes que celles de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  modulo des contextes de synthèses différents qui justifient l'interprétation des matrices  $Q_o$  et  $R_o$  comme des matrices de covariance des perturbations d'état et des bruits de mesure dans le cas du  $\mathcal{FKB}$  et des paramètres de synthèse dans le cas de l'observateur  $\mathcal{LQ}$ . On peut alors postuler naturellement que le  $\mathcal{FKB}$  hérite de tous les propriétés de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  que nous rappelons d'une manière concise.

- Une marge de module maximale qui constitue l'essence de l'excellente robustesse des  $\mathcal{FKB}$  par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives en sortie du système, i.e. la fonction de sensibilité de l'observateur  $\mathcal{LQ}$  vérifie la propriété

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_o(j\omega)) \leq \frac{\sigma_{max}(R_o)}{\sigma_{min}(R_o)} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

- Une vulnérabilité en hautes fréquences due à la structure de la fonction de transfert en boucle ouverte en sortie, i.e. la fonction de transfert  $\mathcal{G}_{oo}(s)$  admet un retard minimal puisque  $HM \neq 0$
- Une reconstruction parfaite des variables d'état du système pourvu que sa fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathcal{R}^{p \times q}$  admette un nombre de sorties au moins aussi grand au nombre de ses entrées et tous ses zéros sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, i.e.

$$p \geq q \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{sw}(s)) \in \mathcal{D}_{sa}$$

- Des performances dynamiques au gré des matrices de covariance des perturbations d'état et des bruits de mesure, i.e.  $(Q_o, R_o)$ .

### 9.3 Applications

L'estimation optimale s'est imposée aux sciences et technologies de l'information et des télécommunications comme en témoignent le nombre considérable de ses applications industrielles. Dans ce qui suit, on considère trois applications principales allant du filtrage à commande  $\mathcal{LQG}$  avec une ? sur l'identification en temps réel des systèmes.

### 9.3.1 Filtrage

L'estimation optimale peut être naturellement utilisée pour réaliser une reconstruction consistante de la vitesse et de l'accélération à partir des mesures de position d'un système newtonien donné par les équations d'état et de sortie

$$\mathcal{SN} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + G\gamma(t) \\ y(t) = Hx(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (9.19)$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (1 \ 0 \ 0) \quad (9.20)$$

où  $\{p(t)\}$ ,  $\{v(t)\}$  et  $\{a(t)\}$  désignent respectivement la position, la vitesse et l'accélération du centre d'inertie d'un mobile donné,  $\{\gamma(t)\}$  (resp.  $\{\eta(t)\}$ ) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\gamma^2$  (resp.  $\sigma_\eta^2$ ) qui représente la méconnaissance de la nature des variations de l'accélération (resp. le bruit de mesure inéluctable).

Comme  $\{\gamma(t)\}$  et  $\{\eta(t)\}$  sont des séquences indépendantes puisque le bruit de mesure est essentiellement différent des variations de l'accélération et que la réalisation d'état du système newtonien est minimale, le  $\mathcal{FKB}$  qui lui est associé est donné par

$$\mathcal{FKBSN} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + My(t) \\ M = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \Sigma H^T \\ 0 = F\Sigma + \Sigma F^T - \frac{1}{\sigma_\eta^2} \Sigma H^T H \Sigma + \sigma_\gamma^2 I_3 \end{cases} \quad (9.21)$$

Outre la vitesse et l'accélération qui sont respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de la position, le  $\mathcal{PK}$  réalise une estimation optimale de la position dont la précision dépend de la valeur choisie pour la variance de l'entrée canonique  $\sigma_\eta^2$ .

**Remarque 9.4** Les applications relevant de la poursuite d'un véhicule spatial requièrent ses mesures d'azimut que l'on peut déterminer à partir de la connaissance de sa vitesse et son accélération. Ces variables sont communément obtenues par une estimation optimale à partir d'un modèle générateur approprié de l'azimut du véhicule spatial. Et cette estimation optimale est communément réalisée par un  $\mathcal{FKB}$ .

### 9.3.2 Identification

L'estimation optimale peut être utilisée pour l'identification en temps réel des systèmes linéaires à partir d'une représentation prédictive de leur comportement d'entrée-sortie, notamment l'équation différentielle

$$A(\rho) y(t) = B(\rho) u(t) + v(t) \quad (9.22)$$

avec

$$A(\rho) = \rho^{na} + a_1 \rho^{na-1} + \dots + a_{na-1} \rho + a_{na} \quad (9.23)$$

$$B(\rho) = b_o \rho^{na} + b_1 \rho^{na-1} + \dots + b_{nb-1} \rho + b_{nb}$$

où  $\{v(t)\}$  est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie qui représente les effets des perturbations et du bruit de mesure. Et si l'on réalise un filtrage du comportement d'entrée-sortie comme suit

$$F(\rho) y_f(t) = y(t), \quad F(\rho) u_f(t) = u(t) \quad \text{et} \quad F(\rho) v_f(t) = v(t) \quad (9.24)$$

où  $F(\rho) \in \mathbb{R}_{sa}[\rho]$ . Le système (9.22) peut alors se récrire comme suit

$$F(\rho) (A(\rho) y_f(t) - B(\rho) u_f(t) - v_f(t)) = 0$$

soit

$$A(\rho) y_f(t) = B(\rho) u_f(t) + v_f(t) + \nu(t) \quad \text{avec} \quad F(\rho) \nu(t) = 0 \quad (9.25)$$

Et comme les paramètres du système sont invariants dans le temps, le système (9.22)-(9.23) peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{MAP} \begin{cases} \rho \theta(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \theta(0) = \theta \\ \rho^{na} y_f = \phi_f^T(t) \theta(t) + v_f(t) + \nu(t) \end{cases} \quad (9.26)$$

avec

$$\phi_f(t) = \begin{pmatrix} \rho^{na-1} y_f(t) \\ \vdots \\ \rho y_f(t) \\ y_f(t) \\ \rho^{nb} u_f(t) \\ \vdots \\ \rho u_f(t) \\ u_f(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na-1} \\ a_{na} \\ b_o \\ \vdots \\ b_{nb-1} \\ b_{nb} \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

**Remarque 9.5** Le filtrage est essentiellement motivé par la détermination des dérivées successives des séquences d'entrée-sortie, i.e. les séquences  $\{\rho^{na} y_f(t)\}$  et  $\{\phi_f(t)\}$ . Il se distingue des autres solutions par sa simplicité et son efficacité dans la pratique de l'identification des systèmes. En effet, on peut spécifier aisément le filtre conformément aux conditions requises par la causalité, les performances dynamiques requises, pour système que l'on cherche à concevoir à partir du modèle recherché, et des conditions de précision requises par le  $\mathcal{FKB}$ . L'ordre du filtre soit être supérieur ou égal à celui du système et sa bande passante doit être comparable à celles des performances dynamiques requises en régulation. Et comme  $\{\nu(t)\}$  est asymptotiquement nulle puisque le filtre doit être stable, le meilleur modelage du filtre est celui qui réalise un blanchiment de  $\{v_f(t)\}$ .

Le résultat suivant montre que l'identification de la classe des systèmes considérée est faisable modulo un choix approprié de la séquence d'entrée  $\{u(t)\}$  du système, notamment une séquence binaire pseudo-aléatoire de moyenne nulle et d'amplitude raisonnable par rapport à la linéarité du système au sein de ses domaines de fonctionnement.

**Résultat 9.7** *Considérons la classe des systèmes linéaires dont le comportement d'entrée-sortie peut se récrire sous la forme (9.26)-(9.27) et supposons que  $\{v_f(t)\}$  est un bruit blanc de variance unitaire et que la séquence d'entrée est telle que*

$$0 < \varphi_{\min} I_{np} \leq \int_t^{t+T} \phi_f(\tau) \phi_f^T(\tau) d\tau \leq \varphi_{\max} I_{np} < \infty \quad (9.28)$$

Alors, on peut réaliser une identification en temps réel de ces systèmes à partir de l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par

$$\text{MITR} \begin{cases} \rho \hat{\theta}(t) = \Sigma(t) \phi_f(t) \varepsilon_f(t) \\ \rho \Sigma(t) = -\Sigma(t) \phi_f(t) \phi_f^T(t) \Sigma(t) \\ \varepsilon_f(t) = y_f(t) - \phi_f^T(t) \hat{\theta}(t) \end{cases} \quad (9.29)$$

où  $\{\hat{\theta}(t)\} \in \mathbb{R}^{np \times 1}$  n'est autre que le vecteur des paramètres estimés à l'instant courant.

**La preuve** de ce résultat est trivial puisque l'algorithme d'identification n'est autre que le  $\mathcal{FKB}$  associé au modèle d'estimation (9.26) – (9.27) avec une matrice de covariance des perturbations d'état identiquement nulle puisque les paramètres sont constants. Quant à la condition 9.28, ce n'est autre que propriété d'observabilité uniforme du système (9.26) – (9.27).

**Remarque 9.6** L'hypothèse faite sur l'erreur de modélisation filtrée  $\{v_f(t)\}$  est essentiellement motivée par des considérations fondamentales. On peut la relâcher dans le cas où  $\mathcal{E}\{v_f^2(t)\} = \sigma_o^2$  en procédant à une normalisation des données sans aucune incidence sur le  $\mathcal{FKB}$  modulo une modification des données filtrées en données filtrées et normalisées, i.e.

$$\left( \phi_f(t) \longrightarrow \phi_{fn}(t) = \frac{\phi_f(t)}{\sigma_o} \right) \quad \text{et} \quad \left( \varepsilon_f(t) \longrightarrow \varepsilon_{fn}(t) = \frac{\varepsilon_f(t)}{\sigma_o} \right)$$

Le résultat suivant précise les propriétés de convergence du  $\mathcal{FKB}$  pour l'estimation des paramètres (9.29) dans le cas où la séquence  $\{v_f(t)\}$  est identiquement nulle.

**Résultat 9.8** *Considérons la classe des systèmes décrits par les équations (9.26)-(9.27) et uniformément observable, i.e  $\{\phi_f(t)\}$  vérifie la propriété (9.28) et supposons que  $\{v_f(t)\}$  est identiquement nulle. Alors le  $\mathcal{FKB}$  (9.29) est doté des propriétés suivantes*



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}1. \Sigma^{-1}(t) \geq \Sigma^{-1}(0) \text{ pour tout } t \geq 0 \\ \mathcal{P}2. \{\Sigma(t)\phi(t)\} \in \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{P}3. \{\Sigma(t)\} \text{ converge} \\ \mathcal{P}4. \Sigma^{-1}(t)\hat{\theta}(t) = \Sigma^{-1}(0)\hat{\theta}(0) \text{ pour tout } t \geq 0 \\ \mathcal{P}5. \{\Sigma(t)\phi(t)\} \in \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{P}5. \{\hat{\theta}(t)\} \text{ converge} \\ \mathcal{P}6. \int_{nT}^{(n+1)T} \phi(\tau)\phi^T(\tau) d\tau \geq \delta I_{np} > 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta \end{array} \right.$$

**La preuve** de ce résultat est un fructueux exercice d'estimation que l'on recommande à faire (voir le problème 9.5).

**Remarque 9.7** L'estimation optimale peut être utilisée pour l'identification en temps réel des systèmes linéaires variants dan le temps décrits par les équations

$$\mathcal{MAP} \left\{ \begin{array}{l} \rho\theta(t) = F\theta(t) + G\theta_\sigma + Ew(t) \text{ avec } \theta(0) = \theta \\ \rho^{na}y_f = \phi_f^T(t)\theta(t) + v_f(t) \end{array} \right. \quad (9.30)$$

où  $(F, G, \phi_f^T(t))$  est une réalisation d'état de la dynamique des paramètres du système et  $\{\Gamma w(t)\}$  et  $v_f(t)$  désigne les perturbations qui affectent les variations de paramètres et les bruits de mesure qui sont supposés être des bruits blancs indépendants de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q_o$  et  $\sigma_o^2$ . En effet, une telle identification en temps réel peut être réalisée par l'algorithme d'adaptation paramétrique

$$\mathcal{MITR} \left\{ \begin{array}{l} \rho\hat{\theta}(t) = F\hat{\theta}(t) + G\theta_\sigma + \Sigma(t)\phi_{fn}(t)\varepsilon_{fn}(t) \\ \rho\Sigma(t) = F\Sigma(t) + \Sigma(t)F^T - \Sigma(t)\phi_{fn}(t)\phi_{fn}^T(t)\Sigma(t) + Q_o \\ \varepsilon_{fn}(t) = y_{fn}(t) - \phi_{fn}^T(t)\hat{\theta}(t) \end{array} \right. \quad (9.31)$$

pourvu que le système soit uniformément observable.

### 9.3.3 Commande $\mathcal{LQG}$

Le problème de commande  $\mathcal{LQG}$  consiste à déterminer la loi de commande qui minimise, sous la contrainte donnée par le représentation d'état du système (9.1)-(9.3), le critère quadratique suivant

$$J(u) = \mathcal{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau) Q_c x(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau \right\} \quad (9.32)$$

où  $Q_c \triangleq H_c^T H_c \geq 0$  et  $R_c = R_c^T > 0$  sont respectivement les matrices de pondération sur l'état et la commande du système. Ce problème a été d'abord résolu en 1960 par Kalman dans le cas où les mesures des variables d'état sont disponibles (resp. ne sont pas nécessairement disponibles) en supposant que la réalisation d'état  $(F, G, H_c)$  est stabilisable et détectable (resp. les réalisations d'état  $(F, G, H_c)$  eu  $(F, G_o, H)$  sont stabilisables et détectables). Les solutions proposées ont été ensuite présentées d'une manière compréhensible et dûment développées dans les ouvrages pédagogiques adoptés dans les prestigieuses écoles d'ingénieurs ([4], [8], [11], [42], [55], [72]). L'appellation  $\mathcal{LQ}$  a été réservée au cas où toutes les variables d'état sont mesurables, alors que la solution issue du cas où les variables d'état ne sont pas nécessairement mesurables est communément appelée commande  $\mathcal{LQ}$ .

Les résultats suivants donnent les lois de commande  $\mathcal{LQ}$  et  $\mathcal{LQG}$  dans le contexte stochastique considéré.

**Résultat 9.9** La loi de commande qui minimise le critère quadratique (9.32) pour la classe des systèmes (9.1)-(9.3), lorsque la réalisation d'état  $(F, G, H_c)$  est stabilisable et détectable et que toutes les mesures des variables d'état sont disponibles, est donnée par

$$\mathcal{RLQ} \left\{ \begin{array}{l} u(t) = -K\hat{x}(t) \\ K = R_c^{-1} G^T P \\ PF + F^T P - PGR_c^{-1} G^T P + Q_c = 0 \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Par ailleurs, le critère quadratique optimal correspondant est donnée par

$$J(u_{opt}(t)) = \text{trace} \left( Q_o \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(\tau) d\tau \right) \quad (9.34)$$

**Résultat 9.10** La loi de commande qui minimise le critère quadratique (9.32) pour la classe des systèmes (9.1)-(9.3), lorsque les réalisations d'état  $(F, G, H_c)$  eu  $(F, G_o, H)$  sont stabilisables et détectables et que l'on ne dispose pas de toutes les mesures des variables d'état, est donnée par

$$\mathcal{RLQG} \left\{ \begin{array}{l} \rho\hat{x}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \\ K = R_c^{-1} G^T P \\ M = \Sigma H^T R_o^{-1} \\ PF + F^T P - PGR_c^{-1} G^T P + Q_c = 0 \\ F\Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H\Sigma + Q_o = 0 \end{array} \right. \quad (9.35)$$

**Les preuves** de ces résultats peuvent être faites en utilisant la démarche adoptée dans le contexte déterministe au chapitre 8 après avoir proprement appliqué le résultat 9.1. C'est un excellent exercice de vulgarisation du calcul différentiel stochastique avec une bonne révision sur la commande  $\mathcal{LQD}$ . La remarque suivante constitue l'essence de la vraisemblance des lois de commande  $\mathcal{LQG}$  et  $\mathcal{LQD}$ .

**Remarque 9.8** On montre que la loi de commande optimale à horizon fini (8.4)-(8.6) minimise la fonction de coût

$$J(u(t)) = \mathcal{E} \left\{ x^T(t+T) P_f x(t+T) + \int_t^{t+T} \left( x^T(\tau) Q_c x(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau) \right) d\tau \right\}$$

pour les systèmes dynamiques (9.1)-(9.3) en supposant que les variables d'état sont mesurables modulo une expression appropriée du minimum de la fonction coût, soit

$$J^T(u(t)) = \text{trace} \left( P(t) \mathcal{M}_o + \int_t^{t+T} Q_o P(\tau) d\tau \right)$$

On retrouve naturellement l'expression de la fonction coût dans un contexte déterministe puisque

$$\left( Q_o = 0 \right) \text{ et } \left( \mathcal{M}_o = \mathcal{E} \{ x(t) x^T(t) \} = x_o x_o^T \right) \implies J^*(u(t)) = \text{trace} \left( P(t) x(t) x^T(t) \right)$$

Pour mieux apprécier le résultat 9.10, on peut le justifier en exploitant les propriétés statistiques du  $\mathcal{FKB}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ x^T(t) Q_c x(t) + u^T(t) R_c u(t) \} &= \mathcal{E} \left\{ (\hat{x}(t) + \tilde{x}(t))^T Q_c (\hat{x}(t) + \tilde{x}(t)) + u(t)^T R_c u(t) \right\} \\ &= \mathcal{E} \{ \hat{x}^T(t) Q_c \hat{x}(t) + u^T(t) R_c u(t) \} \\ &\quad + \mathcal{E} \{ \hat{x}^T(t) Q_c \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) Q_c \hat{x}(t) + \tilde{x}^T(t) Q_c \tilde{x}(t) \} \end{aligned}$$

Et puisque

$$\mathcal{E} \{ \hat{x}(t) Q_c \tilde{x}^T(t) \} = \mathcal{E} \{ \tilde{x}(t) Q_c \hat{x}^T(t) \} = 0$$

et

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}^T(t) Q_c \tilde{x}(t) \} = \text{trace} \left( Q_c \mathcal{E} \{ \tilde{x}(t) \tilde{x}^T(t) \} \right) = \text{trace} (Q_c \Sigma)$$

on aura

$$\mathcal{E} \{ x^T(t) Q_c x(t) + u^T(t) R_c u(t) \} = \mathcal{E} \{ \hat{x}^T(t) Q_c \hat{x}(t) + u^T(t) R_c u(t) \} + \text{trace} (Q_c \Sigma)$$

Et comme l'erreur d'estimation d'état est indépendante de la séquence de commande du système et que l'erreur d'estimation de sortie est une séquence d'innovation caractérisée par une moyenne nulle et une matrice de covariance  $R_o$  qui est indépendante de la séquence d'état estimée  $\{\hat{x}(t)\}$ , la synthèse du système de commande  $\mathcal{LQG}$  peut être effectuée en deux étapes duales et indépendantes.

É1. Synthèse d'un estimateur optimal au sens de la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation, soit

$$V_o(\hat{x}(t)) = \mathcal{E} \{ \tilde{x}^T(t) Q_c \tilde{x}(t) \}$$

Cet estimateur n'est autre que le  $\mathcal{FKB}$  pourvu que l'hypothèse la réalisation d'état  $(F, G_o, H)$  soit stabilisable et détectable.

É2. Synthèse d'un système de commande avec retour d'état qui minimise le critère quadratique

$$\hat{J}(u(t)) = \mathcal{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\hat{x}^T(\tau) Q_c \hat{x}(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau \right\}$$

pour le  $\mathcal{FKB}$  donné par

$$\rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + G u(t) + M (y(t) - H \hat{x}(t))$$

Cette synthèse est réalisée par une approche  $\mathcal{LQ}$  pourvu que la réalisation d'état  $(F, G, H_c)$  soit stabilisable et détectable.

Ainsi, on peut postuler que les systèmes de commande  $\mathcal{LQG}$  héritent de toutes les propriétés et interprétations des systèmes de commande  $\mathcal{LQD}$  que nous rappelons d'une manière concise.

- Une insensibilité aux bruits de mesure puisque le régulateur  $\mathcal{LQG}$  est strictement propre.
- Une perte de la remarquable propriété du systèmes de commande  $\mathcal{LQ}$  (resp. du  $\mathcal{FKB}$ ) sous-jacent, notamment la marge de module maximale en entrée (resp. en sortie). Cette propriété peut être toutefois préservée en réalisant un  $\mathcal{RTB}$  en entrée (resp. en sortie).
- La faisabilité du  $\mathcal{RTB}$  en entrée (resp. en sortie) est réduite au cas des systèmes ayant au moins autant d'entrée (resp. de sorties) que de sortie (resp. que d'entrées) et dont tous les zéros sont situés dans la domaine de stabilité et de performances conformément aux exigences de précision maximale (resp. de reconstruction parfaite des variables d'état du système)
- Des performances dynamiques modulo une spécification adéquate des paramètres de synthèse, notamment les matrices de pondération et de covariance, i.e.  $(Q_o, R_o)$  et  $(Q_c, R_c)$ .

## 9.4 Conclusion

Ce chapitre est une présentation compréhensive du problème d'estimation à variance minimale et des résultats fondamentaux sous-jacents à partir des contributions fondamentales de Kalman et Bucy. Elle permet de découvrir le  $\mathcal{FKB}$  d'une manière progressive à partir d'un estimateur linéaire de structure usuelle en utilisant judicieusement le principe d'équivalence certaine conformément aux résultats techniques 9.1 et 9.3. La version stationnaire du  $\mathcal{FKB}$  a été obtenue à partir du résultat C.12 de convergence de la solution de l' $\mathcal{EDR}$  vers la solution

de l' $\mathcal{EAR}$  sous-jacente. Une attention particulière a été réservée aux propriétés fondamentales du  $\mathcal{FKB}$  stationnaire, en l'occurrence la robustesse intrinsèque en sortie du système et la configuration des zéros de la  $\mathcal{MTBO}$  en sortie. Un résultat fondamental sur la reconstruction parfaite a été présenté avec des remarques pertinentes pour mettre en exergue les limitations intrinsèques à la nature du système, notamment la configuration des zéros et le nombre de ses sorties par rapport au nombre des entrées relatives aux perturbations d'état.

## 9.5 Problèmes

Un ensemble de problèmes est proposé ci après pour permettre à un lecteur potentiel de réaliser une auto évaluation de ses connaissances sur la synthèse d'un estimateur optimal.

**Problème 9.1** Pour mieux appréhender les résultats fondamentaux sur le  $\mathcal{FKB}$ , on suggère de traiter les questions suivantes pour une entrée identiquement nulle.

- Préciser le contexte de synthèse d'un estimateur optimal au sens de la minimisation de la variance d'erreur d'estimation, notamment le modèle de synthèse et les performances requises avec toutes les hypothèses requises.
- Donner les équations usuelles du  $\mathcal{FKB}$  et préciser ses propriétés remarquables d'un point de vue ingénieur ?
- Préciser les propriétés de reconstruction parfaite dans le cas des systèmes où le nombre de sorties est égal au nombre des entrées relatives aux perturbations d'état.

**Problème 9.2** On se propose d'étudier le problème d'estimation d'état pour la classe des systèmes monovariables dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par

$$\text{SYS } \{ A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + C(\rho)\gamma(t) \quad (9.36)$$

où  $\{u(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système,  $\{\gamma(t)\}$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance finie  $\sigma^2$  et  $A(\rho)$ ,  $B(\rho)$  et  $C(\rho)$  sont des polynômes respectivement donnés par

$$A(\rho) = \rho^3 + a_1\rho^2 + a_2\rho + a_3$$

$$B(\rho) = b_1\rho^2 + b_2\rho + b_3$$

$$C(\rho) = \rho^3 + c_1\rho^2 + c_2\rho + c_3$$

Pour ce faire, on demande de procéder d'une manière progressive en supposant que  $C(\rho) \in \mathbb{R}_{sa}(\rho)$ .

1) Montrer que le système peut se mettre sous la forme de la représentation d'état

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = F x(t) + G u(t) + E \gamma(t) \\ y(t) = H x(t) + \gamma(t) \end{cases} \quad (9.37)$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = (1 \ 0 \ 0)$$

en choisissant convenablement les variables d'état  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  qui constituent le vecteur d'état  $x(t) \in \mathcal{R}^3$ .

2) Proposer un estimateur d'état consistant, i.e. qui réalise une erreur d'estimation d'état asymptotiquement nulle. En déduire un estimateur d'état pour les systèmes stables soumis à des perturbations en sortie.

**Problème 9.3** On se propose d'étudier le problème d'estimation pour la classe des processus stochastiques stationnaires dont les modèles générateurs sont décrits par la représentation d'état

$$\text{MGS} \begin{cases} \rho x(t) = F x(t) + G \gamma(t) \\ y(t) = H x(t) + E \gamma(t) \end{cases}$$

où  $\{x(t)\} \in \mathcal{R}^n$  et  $\{y(t)\} \in \mathcal{R}^p$  désignent respectivement l'état et la sortie du système,  $\{\gamma(t)\} \in \mathcal{R}^p$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Gamma_o = \Gamma_o^T > 0$  qui n'est autre que l'entrée du système,  $(F, G, H, E)$  est une réalisation d'état minimale du modèle générateur avec une matrice  $E$  inversible.

Pour ce faire, on demande de procéder d'une manière progressive pour mieux appréhender le problème d'estimation d'état des systèmes.

1) Montrer que la configuration des pôles (resp. des zéros) du modèle générateur des processus stochastiques stationnaires est donnée par

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(z)) = \{s \in \mathcal{C} / \det(sI_n - F) = 0\}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)) = \{s \in \mathcal{C} / \det(sI_n - F + GE^{-1}H) = 0\})$$

Rappeler les propriétés élémentaires des modèles générateurs de processus stochastiques stationnaires.

2) Retrouver la configuration des zéros d'un modèle générateur de processus stochastiques stationnaires à partir de la configuration des pôles du modèle inverse.

- 3) Proposer un observateur d'état qui permet de reconstruire asymptotiquement l'état du système, i.e. qui réalise une erreur d'estimation d'état asymptotiquement nulle. On précisera la configuration des modes d'un tel observateur par rapport aux zéros du modèle générateur.

**Problème 9.4** On se propose d'étudier la convergence de la version stationnaire du FKB donné par les équations (9.16)-(9.18) en adoptant une approche de Lyapunov; on notera qu'une telle étude est une démonstration du résultat 9.5.

**Indication.** La solution de l'ÉARE (9.18) peut être utilisée pour définir une fonction de Lyapunov pour le FKB.

**Problème 9.5** On se propose de faire une démonstration du résultat 9.8 en utilisant les indications suivantes où

$\mathcal{B} \triangleq \{e_1, \dots, e_{np}\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{np}$

$$\tilde{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta$$

$$V(t) \triangleq \tilde{\theta}^T(t) \Sigma^{-1}(t) \tilde{\theta}(t)$$

I1.  $\rho(\Sigma(t) \Sigma^{-1}(t)) = 0$  pour tout  $t \implies \rho \Sigma^{-1}(t) = \phi_f(t) \phi_f^T(t)$  avec  $\Sigma^{-1}(0) > 0$

I2. 
$$\int_0^t \Sigma(\tau) \phi_f(\tau) \phi_f^T(\tau) \Sigma(\tau) d\tau \leq \Sigma(0)$$

I3. 
$$v^T \rho \Sigma^{-1}(t) v \leq 0$$
 pour tout  $v = \sum_{i=1}^{np} \alpha_i e_i$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  pour  $i \in [1, np]$

I4. 
$$\rho(\Sigma(t) \tilde{\theta}(t)) = 0$$
 pour tout  $t$

I5. 
$$\tilde{\theta}^T(t) \Sigma^{-1}(0) \tilde{\theta}(t) = V(t) \leq V(0)$$
 pour tout  $t$

I6. 
$$\Sigma^{-1}((k+1)T) = \Sigma^{-1}(0) + \sum_{i=0}^k \int_{iT}^{(i+1)T} \phi_f(\tau) \phi_f^T(\tau) d\tau$$

**Problème 9.6** Considérons la classe des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie peut être décrit par le modèle que l'on peut récrire sous la forme

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho \theta(t) = 0 \text{ avec } \theta(0) = \theta \\ \sigma(t) = \phi^T(t) \theta(t) \end{cases} \quad (9.38)$$

avec

$$0 < \gamma_{\min} I_{np} \leq \int_t^{t+T} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau \leq \gamma_{\max} I_{np} < \infty \quad (9.39)$$

où  $\{\sigma(t)\} \in \mathbb{R}$  (resp.  $\phi(t) \in \mathbb{R}^{np}$ ) est une fonction continue de la sortie (resp. est composé par des fonctions continue du comportement d'entrée-sortie) du système et  $\theta \in \mathbb{R}^{np}$  est constituée des paramètres du système. On se propose d'étudier le problème d'identification en temps réel des paramètres du système en supposant que les séquences  $\{\sigma(t)\}$  et  $\{\phi(t)\}$  sont bornées et connues à chaque instant à partir de l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par

$$\mathcal{AAP} \begin{cases} \rho \hat{\theta}(t) = P \phi(t) e(t) \text{ avec } P = P^T > 0 \\ e(t) = y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t) \end{cases} \quad (9.40)$$

Pour ce faire, on précisera la nature de l'adaptation paramétrique considérée et on montera qu'elle est dotée des propriétés de convergence suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{P1.} \left( \left\{ \hat{\theta}(t) \right\}, \left\{ \rho \hat{\theta}(t) \right\}, \left\{ e(t) \right\} \right) \in \mathcal{L}_\infty^3 \\ \mathcal{P2.} \left( \left\{ \rho \hat{\theta}(t) \right\}, \left\{ e(t) \right\} \right) \in \mathcal{L}_2^2 \\ \mathcal{P3.} \left\{ \tilde{\theta}(t) \right\} \text{ converge exponentiellement vers l'origine} \end{cases}$$

**Problème 9.7** On se propose d'étudier le problème d'identification aux moindres carrés des systèmes linéaires décrits par l'équation différentielle (9.22)-(9.23) et dont le modèle générateur des perturbations est connu, soit

$$G(\rho) v(t) = F(\rho) \delta_i(t) \quad (9.41)$$

où  $\delta_i(t)$  est une impulsion d'amplitude finie inconnue. Pour ce faire, on suggère de découvrir progressivement le concept des moindres carrés comme suit en supposant que l'ordre du modèle générateur des perturbations est égal à celui du système, i.e.  $na = ng = nf$ .

1) Montrer que le système peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{MID} \begin{cases} \rho \theta(t) = 0 \text{ avec } \theta(0) = \theta \\ y(t) = \phi_f^T(t) \theta(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (9.42)$$

avec

$$\phi_f(t) = \begin{pmatrix} \rho^{na-1} y_f(t) \\ \vdots \\ \rho y_f(t) \\ y_f(t) \\ \rho^{nb} u_f(t) \\ \vdots \\ \rho u_f(t) \\ u_f(t) \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} f_1 - a_1 \\ \vdots \\ f_{nf-1} - a_{na-1} \\ f_{nf} - a_{na} \\ b_o \\ \vdots \\ b_{nb-1} \\ b_{nb} \end{pmatrix} \quad (9.43)$$



2) L'estimateur des moindres carrés, i.e.  $\{\hat{\theta}(t)\}$ , minimise le critère quadratique

$$J(\hat{\theta}(t)) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} (\tau) (y(\tau) - \hat{y}(t, \tau))^2 d\tau \quad \text{avec } \lambda \geq 0 \quad (9.44)$$

où  $\hat{y}(t, \tau)$  désigne la sortie d'un modèle du système à l'instant  $\tau \leq t$  issu de modèle estimé à l'instant  $t$ , soit

$$e(t, \tau) = y(\tau) - \hat{y}(t, \tau) \quad \text{avec } \hat{y}(t, \tau) = \phi_f^T(t) \hat{\theta}(t) \quad (9.45)$$

Montrer que si la séquence d'entrée est choisie de manière à satisfaire la propriété (9.28), alors l'estimateur des moindres carrés est donné par

$$\hat{\theta}(t) = \left( \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_0^t w(\tau) \phi(\tau) y(\tau) d\tau \quad (9.46)$$

3) Montrer que l'identification d'un système aux moindres carrés peut être réalisée en temps réel par l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par

$$\mathcal{AAP} \begin{cases} \rho \hat{\theta}(t) = P(t) \phi_f(t) \varepsilon(t) \\ \rho P(t) = -P(t) \phi_f(t) \phi_f^T(t) P(t) + \lambda P(t) \\ \varepsilon(t) = y(t) - \phi_f^T(t) \hat{\theta}(t) \end{cases} \quad (9.47)$$

avec  $P(0) = P^T(0) \geq p_0 I_{np} > 0$ .

5) Montrer que l'algorithme d'adaptation paramétrique (9.47) vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{P1.} & \mu_{\min} I_{np} \leq P(t) \leq \mu_{\max} \\ \mathcal{P2.} & \left( \{\hat{\theta}(t)\}, \{\rho \hat{\theta}(t)\}, \{\varepsilon(t)\} \right) \in \mathcal{L}_{\infty}^3 \\ \mathcal{P3.} & \left( \{\rho \hat{\theta}(t)\}, \{\varepsilon(t)\} \right) \in \mathcal{L}_2^2 \\ \mathcal{P4.} & \{\tilde{\theta}(t)\} \text{ converge exponentiellement vers l'origine} \end{cases}$$



# Chapitre 10

## Commande robuste

*La commande robuste a été développée d'une manière vigoureuse tout au long des quatre dernières décennies comme en témoignent les fructueuses contributions fondamentales et les réalisations industrielles qui y ont été consacrées. Issue d'un bilan pragmatique de l'apport de l'automatique aux sciences de l'ingénieur en 1980, elle se distingue par un contexte d'analyse et de synthèse soucieux des exigences d'une ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée. La formulation du problème de commande est effectuée à partir d'une représentation unifiée du modèle de synthèse du système de commande et des spécifications de ses performances, en utilisant éventuellement les connaissances disponibles sur les incertitudes du modèle de synthèse. Cette formulation est issue d'une combinaison judicieuse de l'approche d'état et l'approche fréquentielle. L'approche fréquentielle est motivée par des considérations de simplicité de spécification des performances requises, en l'occurrence un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles du système de commande ou de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Quant à l'approche d'état, elle est essentiellement privilégiée par l'efficacité des méthodes d'analyse et de synthèse sous-jacentes.*

*Ce chapitre est une présentation concise des synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  en adoptant une approche d'état. Ces synthèses constituent un complément naturel de la synthèse  $\mathcal{LQD}$  développée au chapitre 8 en vue d'une agréable introduction à la commande robuste. Cette introduction a été principalement rédigée à partir d'un ouvrage, élaboré par trois artisans de la commande robuste, qui est utilisé dans les prestigieuses écoles d'ingénieurs ([89]) et des documents pédagogiques utilisés par des collègues pour l'enseignement de commande robuste à SupAero ([1]), Supelec([25], [26]), l'ENSICAEN ([74]) et dans le cadre de formations continues par des ingénieurs qui ont succombé au charme de la commande robuste ([30]). Le choix des documents pédagogiques a été essentiellement motivé par le dévouement à la formation par la recherche de mes collègues et néanmoins amis que j'ai eu le plaisir de rencontrer au sein du groupe de commande robuste. Ce dévouement est corroboré par l'excellent exercice pédagogique réalisé pour la rédaction des documents pour une lecture agréable. Je n'ai pas résisté au plaisir de remémorer l'ambiance amicale et solidaire des réunions du groupe de commande robuste.*

*Les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  seront présentées d'une manière concise et précise après la définition des problèmes de commande optimale sous-jacents à partir du concept de problème standard en la matière. Une attention particulière est accordée au modelage des fonctions de sensibilité usuelles et de la fonction de transfert en boucle ouverte des systèmes de commande et aux algorithmes de commande robuste. Les démonstrations des résultats fondamentaux n'ont pas été reprises; elles sont rédigées d'une manière élégante dans cette oeuvre pédagogique de Zhou, Doyle et Glover ([89]) que nous recommandons vivement à celles et ceux qui souhaitent développer et/ou conforter leur potentiel d'ingénierie des systèmes.*

## 10.1 Une histoire de l'automatique

*La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  a été initialement introduite d'un bilan décevant sur la synthèse  $\mathcal{H}_2$ , en l'occurrence la fragilité de la robustesse des systèmes de commande  $\mathcal{LQG}$  par rapport aux erreurs de modélisation inéluctables ([19], [73]), la sensibilité des systèmes de commande  $\mathcal{LQG}/\mathcal{LTR}$  aux bruits de mesures inéluctables ([24], [79]), la nature intégrale du problème d'optimisation  $\mathcal{H}_2$  et l'inadéquation des processus stochastiques pour la modélisation des perturbations ([84]). Elle a été d'abord développée en adoptant une approche entrée-sortie dans le cadre d'une collaboration fructueuse entre des mathématiciens intéressés par la théorie des opérateurs et des automaticiens attachés à l'approche fréquentielle ([35], [85]). L'enthousiasme des premiers résultats obtenus pour les systèmes monovariables fut relativement grand pour permettre au pionnier de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  de prôner la fin de l'approche d'état. Cet enthousiasme n'a duré que le temps de s'apercevoir que l'extension de ces résultats au cas des systèmes multivariables n'est point trivial. Cette extension a été réalisée d'une manière élégante par les braves élèves de l'école d'automatique de Kalman en exploitant judicieusement le potentiel fondamental de l'approche d'état pour conforter l'approche entrée-sortie ([20], [33],[34], [36]).*

*La synthèse  $\mathcal{H}_2$ , qui a été reléguée aux oubliettes en dépit d'une recherche méthodologique acharnée dont les bases fondamentales ont été présentées au chapitre 8, a été réhabilitée par une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  basée sur une approche d'état ([22], [38]). La relation entre les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  a été particulièrement mise en évidence au sein d'une école d'automatique soucieuse de la simplicité requise pour une ingénierie des systèmes ambitieuse. Cette simplicité est le fruit d'une exploitation ingénieuse de l'élégance fondamentale de l'approche d'état et de l'ingénierie de l'approche fréquentielle, en l'occurrence la simplicité de spécification des performances au travers du concept de modelage fréquentiel.*

*Les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  ont été ensuite confortées en tirant le meilleur profit des possibilités offertes par l'optimisation convexe dans un contexte caractérisé par des contraintes du type inégalités matricielles linéaires ([5], [12], [37]). C'est l'essence de l'approche  $\mathcal{LMI}$  qui a été vigoureusement développée comme en témoignent les résultats fondamentaux disponibles et l'ingénierie de commande robuste attestée par des applications industrielles réussies ([27]). On notera que les exigences de faisabilité de l'approche  $\mathcal{LMI}$  ne sont pas toujours bien connues a priori comme c'est le cas pour l'approche d'état basée sur la résolution d'équations de Riccati. Il est donc prudent de ne pas succomber au postulat selon lequel l'approche  $\mathcal{LMI}$  a permis de relâcher les hypothèses de synthèse intrinsèques à la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  au travers d'une résolution des équations de Riccati, notamment des hypothèses relatives au rang de certaines matrices. En effet, les conditions de rang ne sont pas nécessaires pour la faisabilité d'une l'approche  $\mathcal{LMI}$  modulo une réduction en matière d'optimalité.*

*..... Et depuis que les hirondelles de l'approche d'état et de l'approche fréquentielle célèbrent ensemble les fêtes de l'automatique au diapason d'une musique composée dans des espaces de culture scientifique favorables à la rigueur mathématique, l'ingénierie des systèmes s'est pleinement émancipée. Ces fêtes ont été corroborées par la formation d'une génération d'ingénieurs et de docteurs en automatique qui ont participé activement aux prouesses technologiques de la commande robuste, notamment le pilotage  $\mathcal{H}_\infty$  d'Ariane 5 et des Véhicules Spatiaux de Transfert Automatique (Automated Transfer Vehicule). Ces prouesses technologiques sont issues d'une collaboration scientifique fructueuse entre des groupes de recherche reconnus en automatique et des entreprises soucieuses d'une ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée, notamment ASTRIUM, EADS-Airbus, aérospatiale, CNES, EDF, PSA et Thalès.*

## 10.2 Transformation linéaire fractionnaire

Le concept de transformation linéaire fractionnaire ( $\mathcal{TLF}$ ) a été principalement introduit pour formuler convenablement les problèmes de modélisation, d'observation et de commande des systèmes dynamiques (incertains) en exploitant judicieusement le fait que toute expression rationnelle peut se récrire naturellement sous forme d'une combinaison adéquate de  $\mathcal{TLF}$  ([20], [21]). Comme tout concept générique, la  $\mathcal{TLF}$  se distingue par une définition et des propriétés fondamentales qui seront présentées dans ce qui suit.

**Définition 10.1** Soient  $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{(n_1+n_2) \times (m_1+m_2)}$  une matrice partitionnée comme suit

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

et  $\Delta_i \in \mathbb{C}^{m_2 \times n_2}$  and  $\Delta_s \in \mathbb{C}^{m_1 \times n_1}$ . Alors, on peut définir une  $\mathcal{TLF}$  inférieure par rapport à  $\Delta_i$  par l'application  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \bullet) : \mathbb{C}^{n_2 \times m_2} \mapsto \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$  avec

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \Delta_i) = M_{11} + M_{12}\Delta_i(I_{n_2} - M_{22}\Delta_i)^{-1}M_{21}$$

pourvu que la matrice  $I_{n_2} - M_{22}\Delta_i$  soit inversible. De même, on peut définir une  $\mathcal{TLF}$  supérieure par rapport à  $\Delta_s$  par l'application  $\mathcal{F}_s(\mathcal{M}, \bullet) : \mathbb{C}^{n_1 \times m_1} \mapsto \mathbb{C}^{n_2 \times m_2}$  avec

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{M}, \Delta_s) = M_{22} + M_{21}\Delta_s(I_{m_1} - M_{11}\Delta_s)^{-1}M_{12}$$

pourvu que la matrice  $I_{m_1} - M_{11}\Delta_s$  soit inversible. Les arguments  $M$  et  $\Delta$ , i.e.  $\Delta_i$  ou  $\Delta_s$ , sont respectivement appelés matrice des coefficients et paramètre de la  $\mathcal{TLF}$ .

**Remarque 10.1**  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, 0)$  et  $\mathcal{F}_e(\mathcal{M}, 0)$  sont bien définies pour tout  $\mathcal{M}$  et donc toute application qui n'est pas définie à l'origine ne peut être exprimée sous forme d'une  $\mathcal{TLF}$ , i.e.  $\frac{1}{s}$  n'est pas une  $\mathcal{TLF}$  en  $s$ .

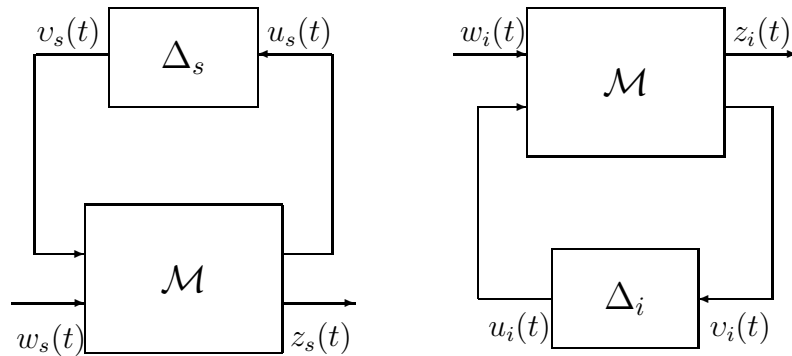


FIGURE 10.1 – Transformation linéaires fractionnaires inférieure et supérieure

Le qualificatif inférieure (resp. supérieure) de la  $\mathcal{TLF}$  est particulièrement motivé par le diagramme fonctionnel de  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \Delta_i)$  (resp.  $\mathcal{F}_s(\mathcal{M}, \Delta_s)$ ) donnée par la figure 10.1. La  $\mathcal{TLF}$  inférieure est caractérisée par les équations

$$\mathcal{TLF}_i \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} Z_i \\ \Upsilon_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_i \\ U_i \end{pmatrix} \\ U_i = \Delta_i \Upsilon_i \end{array} \right.$$

alors que la  $\mathcal{TLF}$  supérieure est caractérisée par les équations

$$\mathcal{TLF}_s \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \Upsilon_s \\ Z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_s \\ W_s \end{pmatrix} \\ U_s = \Delta_s \Upsilon_s \end{array} \right.$$

On utilisera généralement le terme  $\mathcal{TLF}$  sans qualificatif pour se référer aussi bien au cas d'une  $\mathcal{TLF}$  inférieure qu'au cas d'une  $\mathcal{TLF}$  supérieure : la distinction se fera naturellement par le contexte considéré. Quant à l'expression utilisée, elle s'imposera naturellement par des considérations de commodité par rapport au problème considéré modulo une attention à la compatibilité des dimensions.

La signification physique d'une  $\mathcal{TLF}$  dans les problèmes relevant de la commande des système est évidente. Si  $M(s)$  est une fonction de transfert propre, la  $\mathcal{TLF}$   $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \Delta_i(s))$  (resp.  $\mathcal{F}_s(\mathcal{M}(s), \Delta_s(s))$ ) n'est autre que la fonction de transfert de l'opérateur  $\{w_i(t)\} \mapsto \{z_i(t)\}$  (resp.  $\{w_s(t)\} \mapsto \{z_s(t)\}$ ) où  $\mathcal{M}(s)$  représente le modèle de synthèse et  $\Delta_i(s)$  (resp.  $\Delta_s(s)$ ) représente le régulateur (resp. son incertitude). Ceci justifie pourquoi la  $\mathcal{TLF}$  inférieure est principalement utilisée dans la synthèse des systèmes de commande, alors que la  $\mathcal{TLF}$  supérieure est essentiellement utilisée dans l'analyse de robustesse.

Le résultat suivant précise les conditions d'admissibilité physique des  $\mathcal{TLF}$  dans le contexte de la théorie des systèmes.

**Résultat 10.1** On notera que la  $\mathcal{TLF}$   $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \Delta_i(s))$  (resp.  $\mathcal{F}_s(\mathcal{M}(s), \Delta_s(s))$ ) est physiquement admissible si et seulement si la matrice

$$(I_{n_2} - M_{22}(s)\Delta_i(s)) \text{ (resp. } (I_{m_1} - M_{11}(s)\Delta_s(s))\text{)}$$

est inversible.

La preuve de ce résultat découle naturellement de la définition d'une  $\mathcal{TLF}$ . Le résultat suivant donne les propriétés usuelles du contexte général des  $\mathcal{TLFs}$ .

**Résultat 10.2** Soient

$$\mathcal{M}(s) = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{R}(s)$$

des fonctions de transfert et  $\mathcal{G}(s) = \mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s))$ . Alors on a

$\mathcal{P}1$ .  $\mathcal{G}(s)$  est propre si  $\mathcal{M}(s)$  et  $\mathcal{R}(s)$  sont propres et telles que

$$\det \left( \lim_{s \rightarrow \infty} (I_{n_2} - M_{22}(s)\mathcal{R}(s)) \right) \neq 0$$

$\mathcal{P}2$ . Si  $M_{12}(s)$  et  $M_{21}(s)$  sont respectivement de rang plein en colonnes et en lignes dans  $\mathcal{R}_p(s)$ , alors on a

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}_1(s)) = \mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}_2(s)) \implies \mathcal{R}_1(s) = \mathcal{R}_2(s)$$

$\mathcal{P}3$ . Si  $\mathcal{M}(s)$  et  $\mathcal{G}(s)$  sont propres,  $M_{12}(s)$  et  $M_{21}(s)$  sont des matrices carrées et inversibles pour presque tout  $s$ ,

$$\det \left( \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{M}(s) \right) \neq 0 \text{ et } \det \left( \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \mathcal{M}(s) - \begin{pmatrix} \mathcal{G}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \neq 0$$

alors  $\mathcal{R}(s)$  est propre et  $\mathcal{R}(s) = \mathcal{F}_s(\mathcal{M}^{-1}(s), \mathcal{G}(s))$ .

**Preuve.** La propriété  $\mathcal{P}1$  résulte naturellement de la condition d'admissibilité physique de la  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  inférieure  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s))$ . La propriété  $\mathcal{P}2$  découle de l'identité

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}_1(s)) - \mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}_2(s)) \\ &= \\ & M_{12}(s) (I_{m_2} - \mathcal{R}_2(s)M_{22}(s))^{-1} (\mathcal{R}_1(s) - \mathcal{R}_2(s)) (I_{n_2} - M_{22}(s)\mathcal{R}_1(s))^{-1} M_{21}(s) \end{aligned}$$

Quant à la proposition  $\mathcal{P}3$ , il suffit de montrer que la  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  supérieure  $\mathcal{F}_s(\mathcal{M}^{-1}(s), \mathcal{G}(s))$  est physiquement admissible et propre. Posons  $\mathcal{H}(s) = \mathcal{M}^{-1}(s)$ , qui est propre, on aura

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{F}_s(\mathcal{H}(s), \mathcal{G}(s)) = H_{22}(s) + H_{21}(s)\mathcal{G}(s) (I_{m_1} - H_{11}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} H_{12}(s)$$

La  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  supérieure est bien définie et propre puisque

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \det (I_{m_1} - H_{11}(s)\mathcal{G}(s)) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \det \left( I_{m_1} - \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1}(s) \begin{pmatrix} I_{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}(s) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \det \left( \mathcal{M}^{-1}(s) \left( \mathcal{M}(s) - \begin{pmatrix} \mathcal{G}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \neq 0 \end{aligned}$$

Et il en est de même pour  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s))$  comme le montre les manipulations algébriques suivantes

$$\begin{aligned} (I_{m_1} - M_{22}(s)\mathcal{R}(s)) &= (I_{m_1} - M_{22}(s)H_{22}(s)) - M_{22}(s)H_{21}(s)\mathcal{G}(s) (I_{m_1} - H_{11}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} H_{12}(s) \\ &= M_{21}(s)H_{12}(s) + M_{21}(s)H_{11}(s)\mathcal{G}(s) (I_{m_1} - H_{11}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} H_{12}(s) \\ &= M_{21}(s) (I_{m_1} - H_{11}(s)\mathcal{G}(s))^{-1} H_{12}(s) \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\det (I_{m_1} - M_{22}(s)\mathcal{R}(s)) \neq 0$  puisque  $M_{21}(s)$  est inversible et on montre aisément que  $H_{12}^{-1}(s) = (M_{21}(s) - M_{22}(s)M_{12}^{-1}(s)M_{11}(s))$ . Ainsi les  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  sont bien définies

et on a bien  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s)) = \mathcal{G}(s)$  en effectuant les substitutions requises pour  $\mathcal{R}(s)$  et  $I_{m_1} - M_{22}(s)\mathcal{R}(s)$ .

**Remarque 10.2** Le résultat ci dessus stipule que sous certaines conditions, une  $\mathcal{TLF}$  de fonctions de transfert est une application bijective entre deux ensembles de matrices rationnelles propres. Ainsi, étant donné deux fonctions de transfert propres  $\mathcal{M}(s)$  et  $\mathcal{N}(s)$  de dimensions compatibles et satisfaisant les conditions requises par la propriété  $\mathcal{P3}$ , il existe une fonction de transfert propre unique  $\mathcal{R}(s)$  telle que  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s)) = \mathcal{N}(s)$ . Et en plus, le système à rétroaction est physiquement admissible.

**Remarque 10.3** Une interprétation de la propriété  $\mathcal{P3}$  peut être suggérée à partir des signaux mis en jeu dans le système à rétroaction de la figure 10.2 en supposant qu'il est physiquement admissible. On aura alors

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ \Upsilon(s) \end{pmatrix} = \mathcal{M}(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U(s) = \mathcal{R}(s)\Upsilon(s)$$

soit

$$Z(s) = \mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s))W(s) = \mathcal{G}(s)W(s)$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1}(s) \begin{pmatrix} Z(s) \\ \Upsilon(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z(s) = \mathcal{G}(s)W(s)$$

On aura alors

$$U(s) = \mathcal{F}_s(\mathcal{M}^{-1}(s), \mathcal{G}(s))\Upsilon(s)$$

soit

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{F}_s(\mathcal{M}^{-1}(s), \mathcal{G}(s))$$

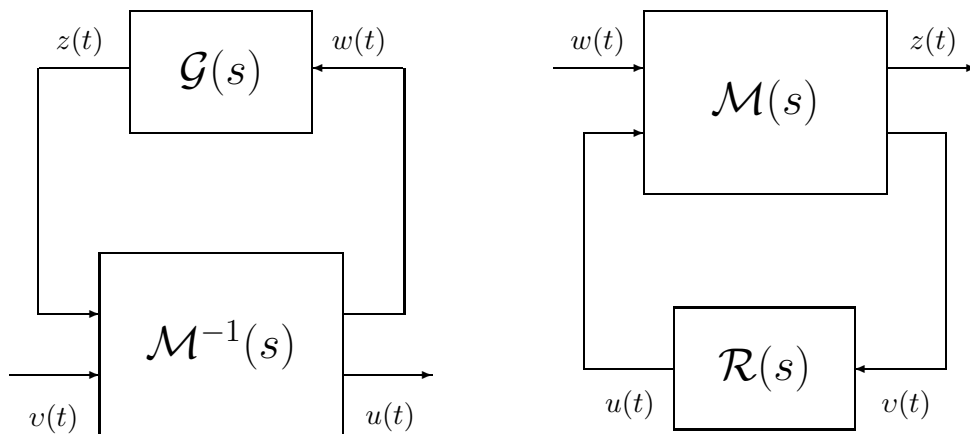


FIGURE 10.2 – Interprétation de la propriété  $\mathcal{P3}$



On distingue cinq propriétés fondamentales qui constituent le potentiel des  $\mathcal{TLF}$ s aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse des systèmes dynamiques. Ces propriétés sont établies en utilisant les résultats d'inversion matricielle A.5 et A.6.

$\mathcal{P}1$ . La composition des  $\mathcal{TLF}$ s, en l'occurrence toute interconnection de  $\mathcal{TLF}$ s est une  $\mathcal{TLF}$ , que l'on peut exprimer comme suit : étant donné trois matrices complexes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{R}$ , on montre aisément qu'il existe une matrice complexe  $\mathcal{P}$  telle que

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \mathcal{F}_i(\mathcal{G}, \mathcal{R})) = \mathcal{F}_i(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \quad (10.1)$$

Et si l'on partitionne les matrices  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  comme suit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Alors on peut déterminer aisément la matrice  $\mathcal{P}$  en fonction des matrices  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ , i.e.

$$P_{11} = M_{11} + M_{12}N_{11}(I - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} \quad (10.3)$$

$$P_{12} = M_{12}(I - G_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \quad (10.4)$$

$$P_{21} = N_{21}(I - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} \quad (10.5)$$

$$P_{22} = N_{22} + N_{21}M_{22}(I - N_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \quad (10.6)$$

Des expressions similaires peuvent être établies pour le cas d'une  $\mathcal{TLF}$  supérieure, en l'occurrence étant donné trois matrices complexes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\Delta$ , on montre aisément qu'il existe une matrice complexe  $\mathcal{P}$  telle que

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{M}, \mathcal{F}_s(\mathcal{N}, \Delta)) = \mathcal{F}_s(\mathcal{P}, \Delta) \quad (10.7)$$

$\mathcal{P}2$ . La relation entre les  $\mathcal{TLF}$  inférieure et supérieure que l'on peut exprimer comme suit : étant donné deux matrices complexes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{R}$ , il existe une matrice complexe  $\mathcal{N}$  telle que

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \mathcal{R}) = \mathcal{F}_s(\mathcal{N}, \mathcal{R}) \quad (10.8)$$

Et cette matrice  $\mathcal{N}$  est donnée par

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

$\mathcal{P}3$ . L'inverse d'une  $\mathcal{TLF}$  que l'on peut exprimer come suit : si la  $\mathcal{TLF}$  est inversible, alors son inverse peut se mettre sous une forme  $\mathcal{TLF}$ .

$$(\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \mathcal{R}))^{-1} = \mathcal{F}_i(\mathcal{N}, \mathcal{R}) \quad (10.10)$$

avec

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}M_{12} \\ M_{21}M_{11}^{-1} & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

$\mathcal{P}4$ . L'expression d'une  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  en fonction de l'inverse de son paramètre. Supposons que le paramètre d'une  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  est inversible, alors on a

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \mathcal{R}) = \mathcal{F}_i(\mathcal{N}, \mathcal{R}^{-1}) \quad (10.12)$$

avec

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ M_{22}^{-1}M_{21} & M_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

$\mathcal{P}5$ . Le produit de Redheffer, dit produit étoilé, de deux matrices complexes a permis de recouvrer toutes les interconnexions des systèmes et généraliser le concept  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$ . Considérons deux matrices complexes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  partitionnées comme suit

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

de manière à ce que  $M_{22}P_{11}$  soit une matrice bien définie et carrée et supposons que  $I - M_{22}P_{11}$  est une matrice inversible. Alors le produit étoilé des matrices  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  par rapport à la partition considérée est défini par

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_i(\mathcal{M}, P_{11}) & M_{12}(I - P_{11}\mathcal{M}_{22})^{-1}P_{12} \\ P_{21}(I - M_{22}P_{11})^{-1}M_{21} & \mathcal{F}_s(\mathcal{P}, M_{22}) \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

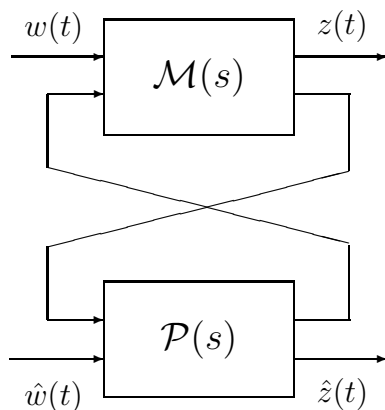
Le choix d'une partition compatible est naturellement suggéré par le contexte et apparaît clairement dans le diagramme fonctionnel comme le montre la figure 10.3. Dans le cas où les arguments du produit étoilé sont des fonctions de transfert  $\mathcal{M}(s)$  et  $\mathcal{P}(s)$ , le produit étoilé n'est autre que la fonction de transfert de l'opérateur

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix}$$

On notera que si l'une des matrices n'est pas partitionnée, alors le bloc qui lui associé n'aurait pas d'entrées externes et de sorties. Ceci correspond à une interconnection maximale qui justifie naturellement la convention suivante.

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) \triangleq \mathcal{F}_i(\mathcal{M}, \mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) \triangleq \mathcal{F}_s(\mathcal{P}, \mathcal{M}) \quad (10.15)$$

L'ordre des matrices dans la dernière équation est du au fait que la dimension du paramètres d'une  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  est relativement petite par rapport à celle de sa matrice des coefficients.

FIGURE 10.3 – Diagramme fonctionnel du produit étoilé  $\mathcal{M} * \mathcal{R}$ 

### 10.3 Formulation du problème standard.

Les problèmes de synthèse d'un système de commande peuvent être considérés comme des problèmes d'optimisation  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  modulo des formulations appropriées. Le problème standard d'automatique se distingue par un système standard, i.e. que l'on peut décrire par la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{(m_w+m_u) \times (p_z+p_v)}(s)$  du système à commander et des performances requises, en rétroaction avec un régulateur, i.e. la fonction de transfert  $\mathcal{R}(s) \in \mathbb{R}^{m_u \times p_v}(s)$ , comme l'indique le diagramme fonctionnel de la figure 10.4.  $\{w(t)\} \in \mathbb{R}^{m_w}$  représente les séquences d'entrée relevant des performances requises en poursuite et des imperfections du modèle, i.e. les perturbations qui affectent le fonctionnement du système et les bruits de mesure inéluctables,  $\{z(t)\} \in \mathbb{R}^{p_z}$  représente les séquences d'erreur qui constituent des quantificateurs appropriés des performances requises en régulation,  $\{u(t)\} \in \mathbb{R}^{m_u}$  est la commande du système et  $\{v(t)\} \in \mathbb{R}^{p_v}$  désigne les mesures disponibles pour la détermination de la commande du système, e.g.

$$v(t) \triangleq \begin{cases} -y_m(t) \\ e_m(t) \triangleq y^*(t) - y_m(t) \end{cases},$$

où  $\{y_m(t)\} \in \mathbb{R}^{p_y}$  (resp.  $\{y^*(t)\} \in \mathbb{R}^{p_y}$ ) désigne la mesure (resp. la séquence de référence) de la sortie du système. L'absence du comparateur usuel des asservissements classiques est intégré dans la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$ , si besoin est.

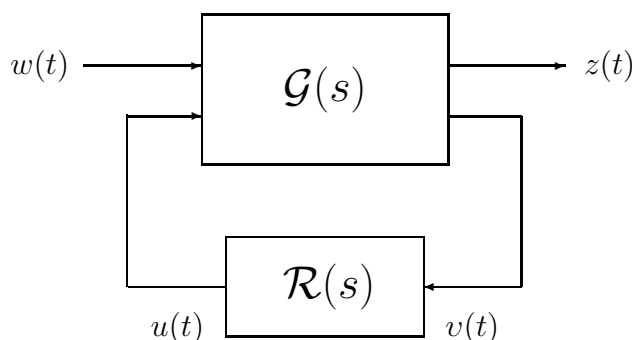


FIGURE 10.4 – Forme standard

Et compte tenu des dimensions des entrées et des sorties du système standard, la fonction de transfert  $\mathcal{G}(s)$  peut être partitionnée comme suit

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{zw}(s) & \mathcal{G}_{zu}(s) \\ \mathcal{G}_{vw}(s) & \mathcal{G}_{vu}(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_w+m_u) \times (p_z+p_v)}(s) \quad (10.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{zw}(s) &\in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}(s), \quad \mathcal{G}_{zu}(s) \in \mathbb{R}^{p_z \times m_u}(s) \\ \mathcal{G}_{vw}(s) &\in \mathbb{R}^{p_v \times m_w}(s) \text{ et } \mathcal{G}_{vu}(s) \in \mathbb{R}^{p_v \times m_u}(s) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Une telle partition permet de déterminer aisément une réalisation d'état appropriée du système standard, soit

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \triangleq \left( \begin{array}{c|cc} F & G_w & G_u \\ \hline H_z & E_{zw} & E_{zu} \\ H_v & E_{vw} & E_{vu} \end{array} \right) \quad (10.18)$$

Le système de commande standard peut être alors décrit par les équations suivantes

$$SCS \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} Z(s) \\ \Upsilon(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{zw}(s) & \mathcal{G}_{zu}(s) \\ \mathcal{G}_{vw}(s) & \mathcal{G}_{vu}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \\ U(s) &= \mathcal{R}(s)\Upsilon(s) \end{aligned} \right. \quad (10.19)$$

La fonction de transfert en boucle fermée de l'opérateur  $w(t) \mapsto z(t)$  est donnée par la  $\mathcal{TLF}$

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s)) = \mathcal{G}_{zw}(s) - \mathcal{G}_{zu}(s)\mathcal{R}(s)(I_{p_v} + \mathcal{G}_{vu}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\mathcal{G}_{vw}(s) \triangleq \mathcal{G}_{zw}^{bf}(s) \quad (10.20)$$

**Remarque 10.4** Un problème de commande est bien posé pourvu que les quantificateurs de performances dépendent de toutes les composantes de la commande, i.e.  $m_u \leq p_z$ , et qu'il y ait au moins autant de mesures que d'entrées exogènes, i.e.  $m_w \geq p_v$ . La matrice d'entrée  $E$  peut être alors partitionnée comme suit

$$E \triangleq \left( \begin{array}{cc|c} E_{zw11} & E_{zw12} & E_{zu1} \\ E_{zw21} & E_{zw22} & E_{zu2} \\ \hline E_{vw1} & E_{vw2} & E_{vu} \end{array} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} E_{zw11} &\in \mathbb{R}^{(p_z-m_u) \times (m_w-p_v)}, \quad E_{zw12} \in \mathbb{R}^{(p_z-m_u) \times p_v}, \quad E_{zw21} \in \mathbb{R}^{m_u \times (m_w-p_v)}, \quad E_{zw22} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_v} \\ E_{zu1} &\in \mathbb{R}^{(p_z-m_u) \times m_u}, \quad E_{zu2} \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}, \quad E_{vw1} \in \mathbb{R}^{p_v \times (m_w-p_v)}, \quad E_{vw2} \in \mathbb{R}^{p_v \times p_v} \text{ et } E_{vu} \in \mathbb{R}^{p_v \times m_u} \end{aligned}$$

Le problème de synthèse consiste à déterminer la classe des régulateurs réalisables et stabilisant qui réalisent les performances requises, en l'occurrence la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  (resp.  $\mathcal{H}_\infty$ ) de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_{zw}^{bf}(s) = \mathcal{F}_i(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s))$  dans un contexte de commande optimale. La synthèse requiert une hypothèse standard qui est nécessaire et suffisante pour la stabilité interne du système de commande standard, soit

$$\mathcal{HS1}. \quad (F, G_u, H_v) \text{ est stabilisable et détectable}$$

Cette hypothèse est particulièrement justifiée par le résultat remarquable de stabilisation d'un système standard donné par le postulat suivant.

**Résultat 10.3** *Considérons le problème de commande standard, le régulateur  $\mathcal{R}(s)$  stabilise le système standard  $\mathcal{G}(s)$  si et seulement si il stabilise sa composante  $\mathcal{G}_{vu}(s)$*

**La preuve** de ce résultat est donnée dans la plupart des ouvrages sur la commande robuste, e.g. [33]. On recommande de la lire attentivement pour mieux apprécier l'essence du résultat de stabilisation du système standard d'une manière élégante.

Par ailleurs, on peut simplifier les problèmes de commande  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  pourvu que l'on puisse se ramener à un système standard satisfaisant les hypothèses suivantes

$$\mathcal{HS2}. \quad E_{zw} = 0_{p_z \times m_w} \quad \text{et} \quad E_{vu} = 0_{p_v \times m_u}$$

$$\mathcal{HS3}. \quad E_{zu}^T H_z = 0_{m_u \times n} \quad \text{et} \quad G_w E_{vw}^T = 0_{n_\sigma \times p_v}$$

$$\mathcal{HS4}. \quad E_{zu}^T E_{zu} = I_{m_u} \quad \text{et} \quad E_{vw} E_{vw}^T = I_{p_v}$$

Ceci est faisable, modulo une série de transformations adéquates, à partir d'une spécification adéquate des performances requises et des interactions entre les perturbations d'état et de sortie. Ces hypothèses structurelles sont nécessaires pour avoir un régulateur propre.

On notera que  $\mathcal{HS2}$  stipule que les fonctions de transfert  $\mathcal{G}_{zw}(s)$  et  $\mathcal{G}_{vw}(s)$  sont strictement propres : une hypothèse impérative dans le cas d'une synthèse  $\mathcal{H}_2$ . Dans le contexte d'une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{HS2}$  n'est pas vitale d'un point de vue fondamental mais elle est très appréciable du point de vue de la simplicité des équations du régulateur.  $\mathcal{HS3}$  est une hypothèse usuelle dans le cas d'une synthèse  $\mathcal{H}_2$ , la première (resp. la seconde) partie, i.e.  $E_{zu}^T H_z = 0_{m_u \times n}$  (resp.  $G_w E_{vw}^T = 0_{n_\sigma \times p_v}$ ) stipule qu'il n'y a pas de termes croisés dans la fonction coût associée (resp. les perturbations d'état et les perturbations de sortie sont décorréélées). L'hypothèse  $\mathcal{HS4}$  est nécessaire pour la propreté du régulateur et peut être obtenue par une normalisation appropriée des signaux d'entrée-sortie. Et comme cette normalisation n'est pas vitale pour la synthèse, l'hypothèse  $\mathcal{HS4}$  peut être légèrement modifiée comme suit

$$\mathcal{HS4}. \quad E_{zu}^T E_{zu} \triangleq R_{zu} > 0 \quad \text{et} \quad E_{vw} E_{vw}^T \triangleq R_{vw}$$

La définition suivante, qui sera utilisée tout au long de ce chapitre, est justifiée par des considérations de réalisation du régulateur.

**Définition 10.2** *Un régulateur est dit admissible s'il est propre et stabilise le système standard.*

Par ailleurs, comme les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  sont réalisées en adoptant une approche d'état pour la détermination de la classe des régulateurs admissibles par rapport aux hypothèses requises pour leur faisabilité, elles sont basées sur deux équations de Riccati respectivement associées à la commande avec retour d'état et l'injection de sortie intrinsèques au régulateur. Les hypothèses suivantes complètent l'hypothèse standard  $\mathcal{HS1}$  en vue d'assurer l'existence des SSDPS des équations de Riccati.

$$\mathcal{HS5}. \quad \text{rang} \begin{pmatrix} F - j\omega I & G_u \\ H_z & E_{zu} \end{pmatrix} = n + m_u \quad \text{pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

$$\mathcal{HS6}. \quad \text{rang} \begin{pmatrix} F - j\omega I & G_w \\ H_v & E_{vw} \end{pmatrix} = n + p_v \quad \text{pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

L'hypothèse  $\mathcal{HS5}$  (resp.  $\mathcal{HS6}$ ) stipule que la fonction de transfert  $\mathcal{G}_{zu}(s)$  (resp.  $\mathcal{G}_{vu}(s)$ ) n'admet aucun zéro sur l'axe imaginaire. Et si  $\mathcal{HS3}$  est satisfaite, alors  $\mathcal{HS5}$  et  $\mathcal{HS6}$  peuvent être remplacées par l'hypothèse suivante.

$$\mathcal{HS7}. \quad (F, G_w, H_v) \text{ est stabilisable et détectable}$$

à la lumière de la remarque C.5.

### 10.4 Le bouquet de problèmes standards

On dispose d'une base de cinq problèmes de commande standards que l'on peut utiliser judicieusement pour élaborer un problème de commande standard admissible par rapport aux spécifications d'un système de commande donné.

**Le premier problème** consiste en une régulation des perturbations que l'on peut ramener en sortie comme l'indique la figure 10.5 où le quantificateur de performance considéré est

$$z(t) = -\mathcal{W}_s(\rho) v(t) \tag{10.21}$$

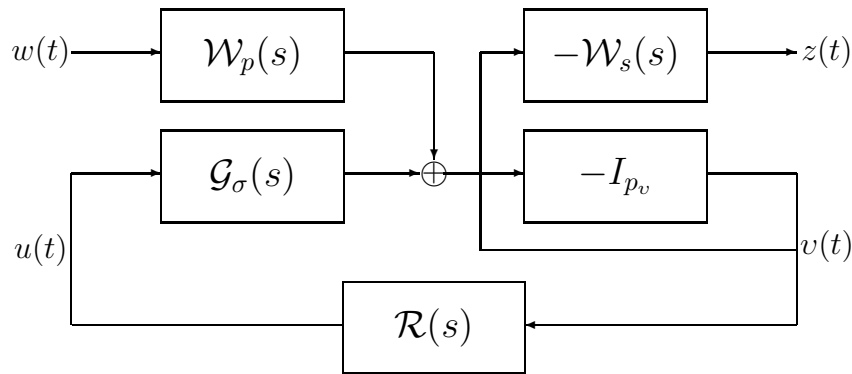


FIGURE 10.5 – Exemple 1

Le système standard sous-jacent est alors donné par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{W}_p(s) & \mathcal{W}_s(s) \mathcal{G}_\sigma(s) \\ -\mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \tag{10.22}$$

Et comme tenu des équations d'entrée-sortie du système de commande considéré, on peut vérifier aisément que

$$Z(s) = \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_p(s) W(s) = \mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s)) W(s) \tag{10.23}$$

On peut donc envisager une synthèse qui minimise la fonction de coût suivante

$$\|\mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_w(s)\|_\infty \tag{10.24}$$

**Le deuxième problème** consiste en une régulation des perturbations que l'on peut ramener en sortie avec une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation additives directes comme l'indique la figure 10.6 où le quantificateur de performance est donné par

$$z(t) \triangleq \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{W}_s(\rho) v(t) \\ -\mathcal{W}_{rs}(\rho) u(t) \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

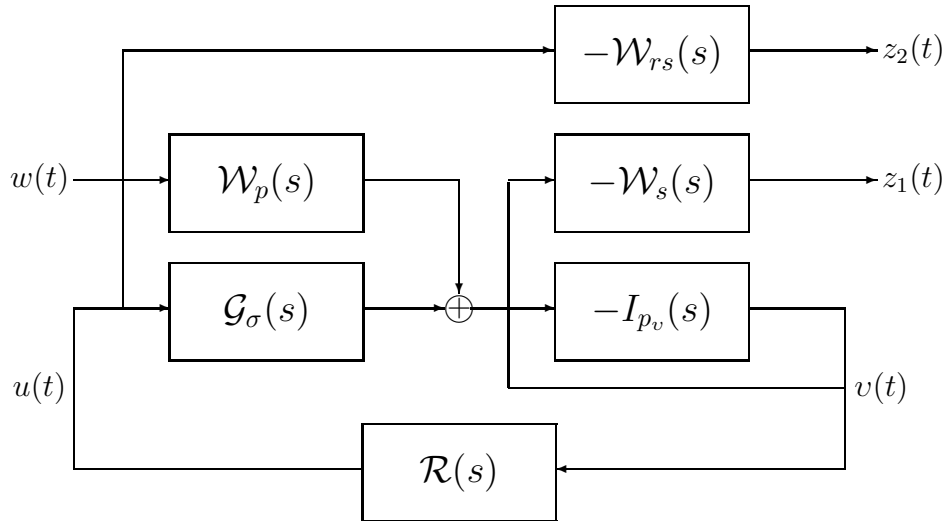


FIGURE 10.6 – Exemple 2

Le système standard sous-jacent est donné par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{W}_p(s) & \mathcal{W}_s(s) \mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0_{p_v \times m_w} & -\mathcal{W}_{rs}(s) \\ -\mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

Et compte tenu des équations d'entrée-sortie du système de commande considéré, on peut vérifier aisément

$$Z(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_p(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s) \mathcal{R} \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_p(s) \end{pmatrix} W(s) = \mathcal{T} \mathcal{L} \mathcal{F} \left( \mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s) \right) W(s) \quad (10.27)$$

On peut donc envisager une synthèse qui minimise la fonction de coût suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_p(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s) \mathcal{R} \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_p(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (10.28)$$

**Le troisième problème** consiste en une poursuite d'une séquence de référence avec une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives en entrée comme l'indique la figure 10.7 où le quantificateur de performance est donné par

$$z(t) \triangleq \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(\rho) v(t) \\ \mathcal{W}_{sc}(\rho) y(t) \end{pmatrix} \quad (10.29)$$

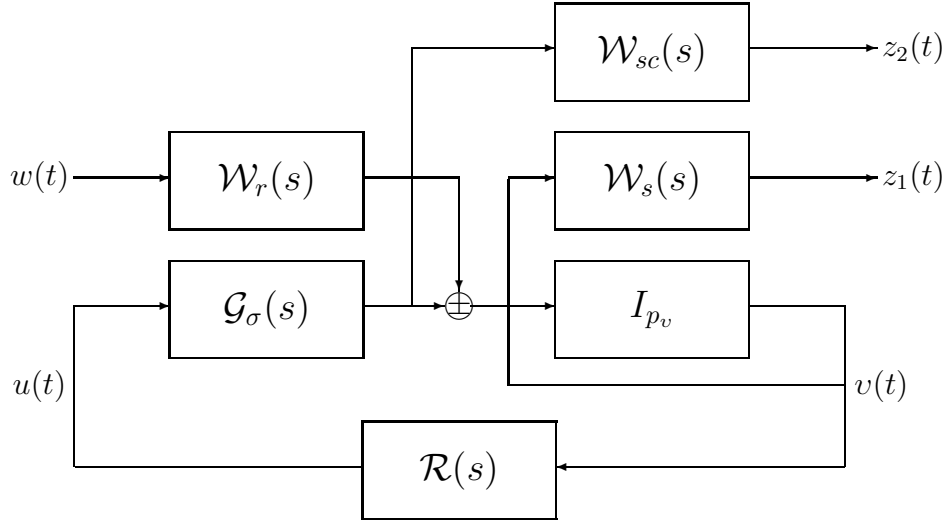


FIGURE 10.7 – Exemple 3

Le système standard sous-jacent est donné par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{W}_r(s) & -\mathcal{W}_s(s) \mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0_{p_v} & \mathcal{W}_{sc}(s) \mathcal{G}_\sigma(s) \\ \mathcal{W}_r(s) & -\mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

Et compte tenu des équations d'entrée-sortie du système de commande considéré, on peut vérifier aisément que

$$Z(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_r(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s) \mathcal{T}_s(s) \mathcal{W}_r(s) \end{pmatrix} W(s) = \mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s)) W(s) \quad (10.31)$$

On peut donc envisager une synthèse qui minimise la fonction de coût suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_r(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s) \mathcal{S}_{sc}(s) \mathcal{W}_r(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (10.32)$$

**Le quatrième problème** consiste en une insensibilité aux bruits de mesure en entrée avec une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation additives et multiplicatives directes en entrée comme l'indique la figure 10.8 où le quantificateur de performance est donné par

$$z(t) \triangleq \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{W}_s(\rho) v(t) \\ -\mathcal{W}_{sc}(\rho) y(t) \\ -\mathcal{W}_{rs}(\rho) u(t) \end{pmatrix} \quad (10.33)$$

Le système standard sous-jacent est donné par

$$\mathcal{G}_s(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{W}_w(s) & \mathcal{W}_s(s) \mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0_{p_v} & -\mathcal{W}_{sc}(s) \mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0_{p_v} & -\mathcal{W}_{rs}(s) \\ -\mathcal{W}_w(s) & -\mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \quad (10.34)$$



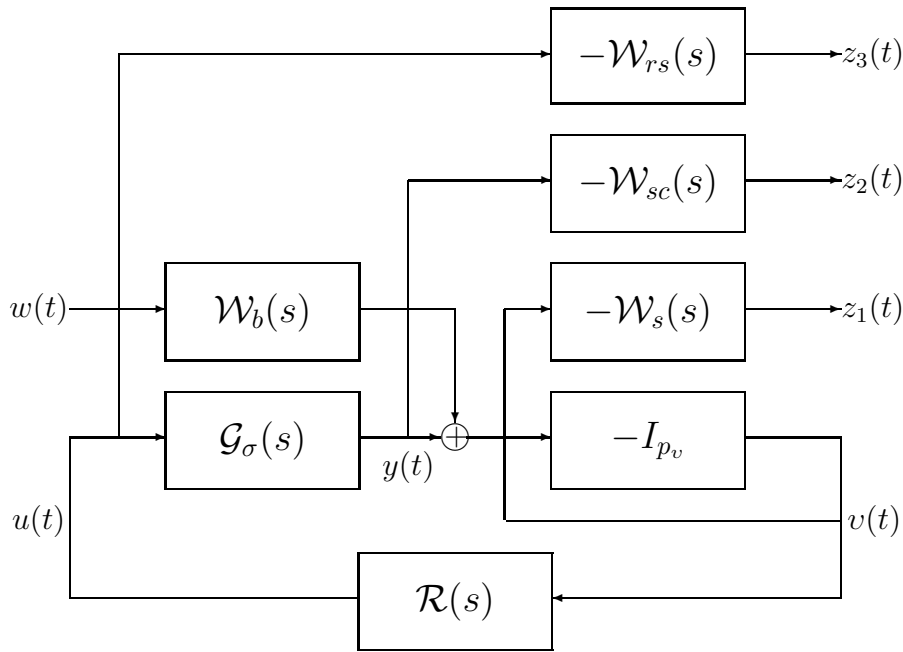


FIGURE 10.8 – Exemple 4

Et compte tenu des équations d'entrée-sortie du système de commande, on peut vérifier aisément que

$$Z(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_b(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s) \mathcal{T}_s(s) \mathcal{W}_b(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s) \mathcal{R} \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_b(s) \end{pmatrix} W(s) = \mathcal{T} \mathcal{L} \mathcal{F} \left( \mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s) \right) W(s) \quad (10.35)$$

On peut donc envisager une synthèse qui minimise la fonction de coût suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s) \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_b(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s) \mathcal{T}_s(s) \mathcal{W}_b(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s) \mathcal{R} \mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_b(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \quad (10.36)$$

**Le cinquième problème** consiste en une insensibilité aux bruits de mesure avec une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation additives et multiplicatives directes en entrée comme l'indique la figure 10.9 où le quantificateur de performance est donné par

$$z(t) \triangleq \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{W}_1(\rho) y_{\sigma}(t) \\ -\mathcal{W}_2(\rho) u_{\sigma}(t) \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

Le système standard sous-jacent est donné par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} 0_{p_v \times m_b} & \mathcal{W}_1(s) \mathcal{G}_{\sigma}(s) \mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{W}_1(s) \mathcal{G}_{\sigma}(s) \\ 0_{m_u \times m_b} & \mathcal{W}_2(s) \mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{W}_2(s) \\ -\mathcal{W}_b(s) & \mathcal{G}_{\sigma}(s) \mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{G}_{\sigma}(s) \end{pmatrix} \quad (10.38)$$

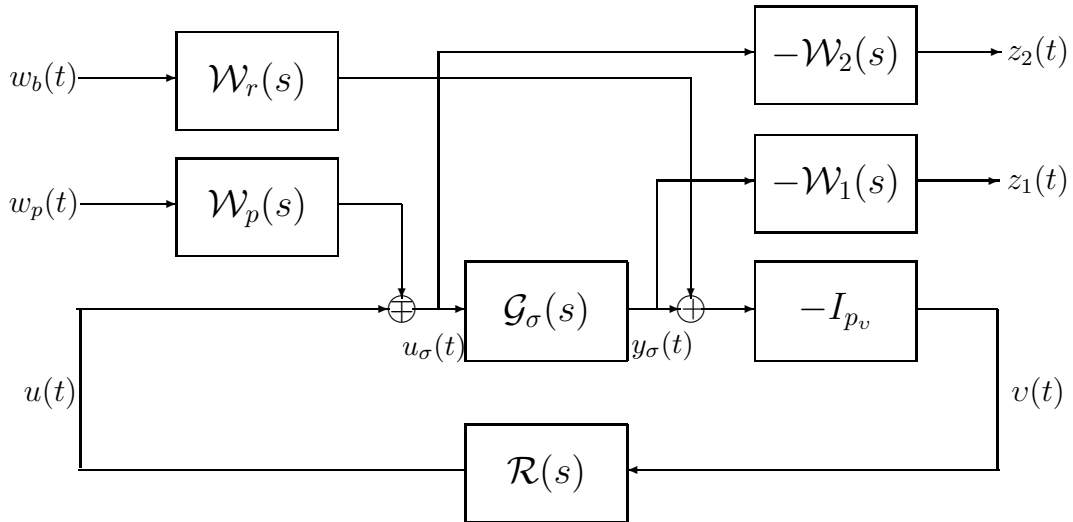


FIGURE 10.9 – Exemple 5

Et compte tenu des équations d'entrée-sortie du système de commande, on peut établir aisément que

$$\begin{aligned} Z(s) &= \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1(s) \mathcal{T}_s(s) \mathcal{W}_b(s) & \mathcal{W}_1(s) \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s) \mathcal{W}_p(s) \\ \mathcal{W}_2(s) \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_b(s) & \mathcal{W}_2(s) \mathcal{S}_e(s) \mathcal{W}_p(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}_b(s) \\ \mathcal{W}_p(s) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s)) W(s) \end{aligned} \quad (10.39)$$

On peut donc envisager une synthèse qui minimise la fonction de coût suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1(s) \mathcal{T}_s(s) \mathcal{W}_b(s) & \mathcal{W}_1(s) \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s) \mathcal{W}_p(s) \\ \mathcal{W}_2(s) \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) \mathcal{W}_b(s) & \mathcal{W}_2(s) \mathcal{S}_e(s) \mathcal{W}_p(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \quad (10.40)$$

**Remarque 10.5** Les cinq problèmes considérés ont permis d'illustrer le postulat selon lequel les performances d'un système de commande avec retour unitaires peuvent être convenablement définies au travers d'un modelage approprié (d'une partie) de ses fonctions de sensibilité usuelles conformément aux recommandations données au chapitre 7. On montrera à la fin de chapitre que ce postulat peut être étendu naturellement aux problèmes d'asservissement qui requièrent des structures plus élaborées, en l'occurrence des système de commande à deux degrés de liberté.

Par ailleurs, le retour unitaire est particulièrement mis en exergue par le bloc de fonction de transfert  $\pm I_{p_v}$ . On montera à la fin du chapitre que ce bloc peut être utilisé pour fixer une partie du régulateur en vue de réaliser une compensation parfaite des perturbations, si besoin est, conformément au concept de modèle interne développé au chapitre 6.

On notera que l'on peut envisager une synthèse  $\mathcal{H}_2$  au lieu d'une synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Le choix de la synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  est essentiellement motivée par la possibilité d'affinement des performances et de la robustesse du système de commande en exploitant judicieusement des informations adéquate relevant de la modélisation du système à commander.

## 10.5 Synthèse $\mathcal{H}_2$

La synthèse  $\mathcal{H}_2$  concerne la classe des systèmes standards qui satisfont les hypothèses  $\mathcal{HS}1$ ,  $\mathcal{HS}2$ ,  $\mathcal{HS}4$ ,  $\mathcal{HS}5$  et  $\mathcal{HS}6$ . L'hypothèse  $\mathcal{HS}3$  n'est pas cruciale pour la faisabilité d'une synthèse  $\mathcal{H}_2$  et sa présence permet de remplacer les hypothèses  $\mathcal{HS}5$  et  $\mathcal{HS}6$  par l'hypothèse  $\mathcal{HS}7$ . On retrouve ainsi les hypothèses conventionnelles d'une synthèse  $\mathcal{LQD}$ , en l'occurrence  $\mathcal{HS}1$ ,  $\mathcal{HS}2$ ,  $\mathcal{HS}3$ ,  $\mathcal{HS}4$  et  $\mathcal{HS}7$ , où l'hypothèse  $\mathcal{HS}3$  est impérative pour les propriétés de robustesse remarquables du système de commande  $\mathcal{LQ}$  et de l'observateur  $\mathcal{LQ}$ . Et compte tenu du résultat ?? qui stipule que la synthèse  $\mathcal{LQD}$  est une synthèse  $\mathcal{H}_2$  spécifique, on considère que la synthèse  $\mathcal{H}_2$  a été d'ores déjà amplement développée au chapitre 8 et on se contentera dans ce chapitre de présenter d'une manière concise le résultat fondamental sur la synthèse  $\mathcal{H}_2$  standard qui a été vigoureusement développé dans [89].

La commande  $\mathcal{H}_2$  concerne la classe des systèmes standards (10.16)-(10.18) satisfaisants les hypothèses  $\mathcal{HS}1$ ,  $\mathcal{HS}2$ ,  $\mathcal{HS}4$ ,  $\mathcal{HS}5$  et  $\mathcal{HS}6$  modulo une hypothèse  $\mathcal{HS}4$  sans normalisation des signaux d'entrée-sortie. Quant au problème de commande  $\mathcal{H}_2$  standard, on peut le formuler naturellement comme suit.

Déterminer un régulateur admissible  $\mathcal{R}(s)$   
qui minimise la norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert en boucle fermée  $\mathcal{G}_{zw}^{bf}(s)$ , soit

$$\|\mathcal{G}_{zw}^{bf}(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} \left( \left( \mathcal{G}_{zw}^{bf}(j\omega) \right)^* \mathcal{G}_{zw}^{bf}(j\omega) \right)} \quad (10.41)$$

Le résultat fondamental suivant précise les propriétés fondamentales qui permettent de conclure la faisabilité du problème standard de commande  $\mathcal{H}_\infty$  à partir des matrices hamiltoniennes

$$\mathcal{H}_{cre} = \begin{pmatrix} (F - G_u R_{zu}^{-1} E_{zu}^T H_z) & -G_u R_{zu}^{-1} G_u^T \\ -H_z^T (I_{p_z} - E_{zu} R_{zu}^{-1} E_{zu}^T) H_z & -(F - G_u R_{zu}^{-1} E_{zu}^T H_z)^T \end{pmatrix} \quad (10.42)$$

et

$$\mathcal{H}_{is} = \begin{pmatrix} (F - G_u E_{vw}^T R_{vw}^{-1} H_v)^T & -H_v^T R_{vw}^{-1} H_v \\ -G_w (I_{m_w} - E_{vw}^T R_{vw}^{-1} E_{vw}) G_w^T & -(F - G_u E_{vw}^T R_{vw}^{-1} H_v) \end{pmatrix} \quad (10.43)$$

**Résultat 10.4** Considérons la classe des systèmes (10.16)-(10.18) satisfaisants les hypothèses  $\mathcal{HS}1$ ,  $\mathcal{HS}2$ ,  $\mathcal{HS}4$ ,  $\mathcal{HS}5$  et posons

$$\mathcal{R}_k(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_k & I_n \\ \hline H_{zk} & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_m(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_m & G_{wm} \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right) \quad (10.44)$$

avec

$$K \triangleq -R_{zu}^{-1} (G_u^T P_{cre} + E_{zu}^T H_z), \quad F_k \triangleq F + G_u K \quad \text{et} \quad H_{zk} \triangleq H_z + E_{zu} K \quad (10.45)$$

$$M \triangleq -(\Sigma_{is} H_v^T + G_u E_{vw}^T) R_{vw}^{-1}, \quad F_m \triangleq F + M H_v \quad \text{et} \quad G_{wm} \triangleq G_w + M E_{vw} \quad (10.46)$$

où la matrice  $P_{cre}$  (resp.  $\Sigma_{is}$ ) n'est autre que la SSDPS de l'équation algébrique de Riccati

associée à la matrice hamiltonienne  $\mathcal{H}_{cre}$  (resp.  $\mathcal{H}_{is}$ ). Alors, le problème de commande optimale  $\mathcal{H}_2$  admet une solution unique donnée par le régulateur optimal

$$\mathcal{R}(s) = \left( \frac{F + G_u K + M H_v}{K} \middle| \frac{-M}{0} \right) \quad (10.47)$$

Et la valeur minimale du scalaire  $\gamma$  est donnée par

$$\gamma_{min} = \sqrt{\text{trace}(G_w^T P_{cre} G_w)^2 + \text{trace}(R_{zu} M \Sigma_{is} M^T)} \quad (10.48)$$

**La preuve** de ce résultat est effectuée d'une manière laborieuse et néanmoins compréhensible dans [88].

**Remarque 10.6** Les deux équations algébriques de Riccati associées à la commande  $\mathcal{H}_2$  standard sont respectivement données par

$$\begin{aligned} (F - G_u R_{zu}^{-1} E_{zu}^T H_z) P_{cre} + (F - G_u R_{zu}^{-1} E_{zu}^T H_z)^T P_{cre} - P_{cre} G_u R_{zu}^{-1} G_u^T P_{cre} \\ + H_z^T (I_{pz} - E_{zu} R_{zu}^{-1} E_{zu}^T) H_z = 0 \\ \Sigma_{is} (F - G_w E_{vw}^T R_{vw}^{-1} H_v)^T + (F - G_w E_{vw}^T R_{vw}^{-1} H_v) \Sigma_{is} - \Sigma_{is} H_v^T R_{vw}^{-1} H_v \Sigma_{is} \\ + G_w (I_{mw} - E_{vw}^T R_{vw}^{-1} E_{vw}) G_w^T = 0 \end{aligned} \quad (10.49)$$

**Remarque 10.7** Le régulateur optimal est strictement propre et son ordre est égal à celui du modèle de synthèse  $\mathcal{G}(s)$ . Il peut être mis en oeuvre sous la forme d'une commande avec retour d'état incorporant un observateur comme suit

$$\mathcal{RH}_2 \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F + G_u K + M H_v) \hat{x}(t) - M y(t) \\ u(t) = K \hat{x}(t) \end{cases} \quad (10.50)$$

Dans le cas particulier où  $E_{zu}^T H_z = E_{vw} G_w^T$ , les équations algébriques de Riccati se simplifient comme suit

$$\begin{aligned} P_{cre} F + F^T P_{cre} - P_{cre} G_u R_{zu}^{-1} G_u^T P_{cre} + H_z^T R_{vw}^{-1} H_z = 0 \\ \Sigma_{is} F^T + F \Sigma_{is} - \Sigma_{is} H_v^T R_{zw}^{-1} H_v \Sigma_{is} + G_w G_w^T = 0 \end{aligned} \quad (10.51)$$

Par ailleurs ; si toutes les variables d'état sont disponibles à la mesure, alors l'observateur n'est plus nécessaire et le régulateur se réduit à la loi de commande avec retour d'état  $u(t) = Kx(t)$ .

## 10.6 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$

Contrairement au problème standard d'optimisation  $\mathcal{H}_2$  qui admet une solution unique que l'on peut obtenir en résolvant deux équations algébriques de Riccati, le problème standard

d'optimisation  $\mathcal{H}_\infty$  est relativement complexe dans la mesure où il admet plusieurs solutions et requiert des procédures itératives appropriées ([38]). Pour contourner cette complexité fondamentale, il est recommandé de se contenter d'une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimale soucieuse des exigences de l'ingénierie des systèmes, en l'occurrence un bon compromis entre la simplicité algorithmique et les performances dynamiques que l'on peut formuler naturellement comme suit :

Etant donné un scalaire  $\gamma > 0$ ,  
déterminer tous les régulateurs admissibles  $\mathcal{R}(s)$ , modulo leur existence,  
satisfaisant la propriété  $\|\mathcal{G}_{zw}^{bf}(s)\|_\infty < \gamma$ .

**Remarque 10.8** L'existence des régulateurs admissibles requiert une spécification adéquate du scalaire  $\gamma$ , notamment  $\gamma \geq \gamma_{min}$  où  $\gamma_{min}$  n'est autre que la valeur minimale de  $\|\mathcal{G}_{zw}^{bf}(s)\|_\infty$ .

Dans ce qui suit, on présente d'une manière concise trois résultats fondamentaux sur la commande  $\mathcal{H}_\infty$  issus d'une approche d'état. Ces résultats constituent un potentiel fondamental de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  pour tout ingénieur soucieux du développement des sciences de l'ingénieur. Rappelons que la commande  $\mathcal{H}_\infty$  concerne la classe des systèmes standards décrits par la représentation d'état

$$\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{S} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + G_w w(t) + G_u u(t) \\ z(t) = H_z x(t) + E_{zw} w(t) + E_{zu} u(t) \\ v(t) = H_v x(t) + E_{vw} w(t) + E_{vu} u(t) \end{cases} \quad (10.52)$$

### 10.6.1 Synthèse usuelle

Considérons le système de régulation usuelle de la figure 10.10 où  $\{v_e(t)\}$  et  $\{v_s(t)\}$  désignent les perturbations qui affectent le fonctionnement du système en entrée et en sortie et supposons qu'il est physiquement admissible. Alors, le système de commande est décrit par les équations

$$\mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{S} \left\{ \begin{pmatrix} Y(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s) \\ -\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{T}_e(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s(s) \\ V_e(s) \end{pmatrix} \right. \quad (10.53)$$

Les recommandations du chapitre sur la synthèse d'un système de commande, qui stipulent que les fonctions de sensibilité usuelles doivent relativement petites, conduisent naturellement au problème de commande suivant : déterminer un régulateur admissible  $\mathcal{R}(s)$  qui assure, pour un scalaire  $\gamma \geq 0$  donné, la propriété suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_s(s) & \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s) \\ \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s) & \mathcal{T}_e(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (10.54)$$

et donc

$$\|\mathcal{S}_s(s)\|_\infty < \gamma, \|\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)\|_\infty < \gamma, \|\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)\|_\infty < \gamma \text{ et } \|\mathcal{T}_e(s)\|_\infty < \gamma \quad (10.55)$$

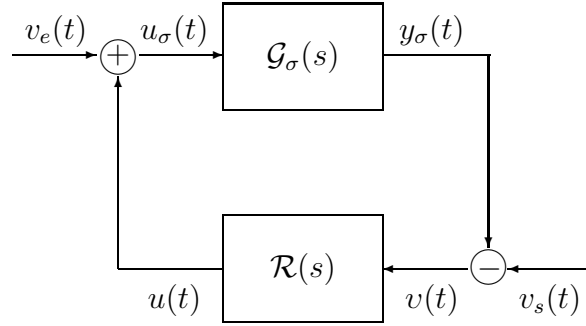


FIGURE 10.10 – Système de régulation usuelle

que l'on peut interpréter comme un quantificateur de performance trivial dans la mesure où il constitue un compromis naturel entre l'évolution de la sortie et celle de la commande du système par rapport aux perturbations qui affectent son fonctionnement aussi bien en entrée qu'en sortie.

Ce problème de commande n'offre aucune possibilité d'affinement des performances dynamiques du système de commande ou de sa robustesse en stabilité sur des bandes de fréquences spécifiques. Néanmoins, il admet une solution remarquable comme l'indique le résultat suivant

**Résultat 10.5** *Considérons le système de commande de la figure 10.10 et supposons que  $(F, G, H)$  est une réalisation d'état minimale de la fonction de transfert du système  $\mathcal{G}_\sigma(s)$ . Alors, la valeur minimal du scalaire  $\gamma$  pour laquelle il existe un régulateur admissible  $\mathcal{R}(s)$  réalisant la propriété 10.55 est donnée par*

$$\gamma_{min} = \sqrt{1 + \lambda_{sup}(\Sigma_{is} P_{cre})} \quad (10.56)$$

où  $\Sigma_{is}$  et  $P_{cre}$  sont les solutions des deux équations de Riccati respectivement données par

$$\begin{aligned} FP_{cre} + F^T P_{cre} - P_{cre} G G^T P_{cre} + H^T H &= 0 \\ \Sigma_{is} F^T + F \Sigma_{is} - \Sigma_{is} H^T H \Sigma_{is} + G G^T &= 0 \end{aligned} \quad (10.57)$$

Par ailleurs, pour tout  $\gamma \geq \gamma_{min}$ , il existe un régulateur admissible unique décrit par la réalisation d'état  $(F_r, G_r, H_r)$  donnée par

$$\begin{aligned} F_r &= F - G G^T P_{cre} + \gamma^2 (I_n + \Sigma_{is} P_{cre} - \gamma^2 I_n)^{-1} \Sigma_{is} H^T H \\ G_r &= -\gamma^2 (I_n + \Sigma_{is} P_{cre} - \gamma^2 I_n)^{-1} \Sigma_{is} H^T \\ H_r &= G^T P_{cre} \end{aligned} \quad (10.58)$$

**La preuve** de ce résultat est donnée dans [39]. Le qualificatif usuelle de la synthèse est particulièrement motivé par le fait que la valeur minimale du scalaire  $\gamma$  peut être préalablement déterminée contrairement au résultats de synthèse qui seront présentés ultérieurement.

Cette synthèse usuelle peut être préalablement confortée par un modelage en boucle ouverte du système à commander en vue d'affiner les performances nominales et la robustesse du système de commande. Ce modelage a été initialement préconisé par McFarlane et Glover ([28], [29]) à partir de deux pondérations fréquentielles  $\mathcal{W}_e(s)$  et  $\mathcal{W}_s(s)$  respectivement placées en amont et en aval du système comme le montre la figure 10.11. Il est réalisé selon une démarche rationnelle en deux étapes.

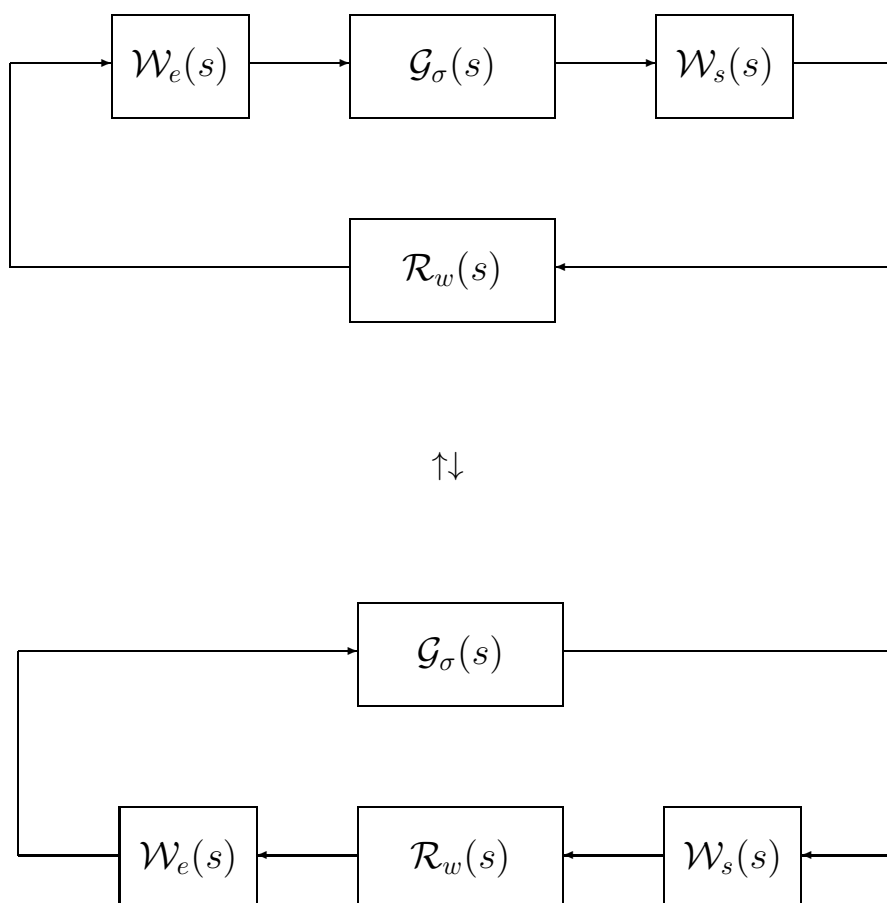


FIGURE 10.11 – "Open loop shapping"

**La première étape** consiste à spécifier les pondérations  $\mathcal{W}_e(s)$  et  $\mathcal{W}_s(s)$ , en vertu des postulats  $\mathcal{P}1$ ,  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}3$  donnés au paragraphe 7.4.2, pour la fonction de transfert du système pondéré

$$\mathcal{G}_p(s) \triangleq \mathcal{W}_e(s)\mathcal{G}(s)\mathcal{W}_s(s)$$

au lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte en sortie (resp. en entrée) du système de commande, i.e.  $\mathcal{G}_{oe}(s)$  (resp.  $\mathcal{G}_{os}(s)$ ). Les conditions de grands gains en basses fréquences (resp. de petits gains en hautes fréquences) peuvent être satisfaites par une action intégrale (resp. une action de filtrage passe-bas) que l'on peut introduire naturellement à partir des pondérations. La bande passante désirée, i.e.  $\omega \in \mathbb{R} / \sigma_{\max}(\mathcal{G}_p(j\omega)) \leq 1$ , peut être aisément obtenue en ajustant le gain de l'une des pondérations considérées. Par ailleurs, on peut ajuster

la pente au voisinage de la fréquence de passage à 0db en introduisant une avance de phase adéquate via les pondérations.

**La deuxième étape** consiste en la détermination d'un régulateur admissible à partir de la synthèse usuelle appliquée au système pondéré, i.e.  $\mathcal{G}_p(s)$ . On aura alors

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_p(s) & \mathcal{S}_p(s)\mathcal{G}_p(s) \\ \mathcal{R}_p(s)\mathcal{S}_p(s) & \mathcal{R}_p(s)\mathcal{S}_p(s)\mathcal{G}_p(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma$$

avec

$$\mathcal{S}_p(s) = (I_{p_p} + \mathcal{G}_p(s)\mathcal{R}_p(s))^{-1}$$

Ceci nous amène naturellement au régulateur que l'on doit mettre en rétroaction avec le système, soit

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{W}_s(s)\mathcal{R}_p(s)\mathcal{W}_e(s)$$

On peut ainsi tirer le meilleur profit de l'approche fréquentielle classique tout en incorporant des actions appropriées pour la compensation parfaite des perturbations dont les pôles du modèle générateur sont connus et l'insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.

**Remarque 10.9** Compte tenu des performances réalisées pour le système pondéré, on montre aisément que le modelage effectué sur la fonction de transfert du système pondéré est semblable au modelage réalisé à posteriori avec la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande pourvu que les valeurs de  $\gamma$  relativement faibles, e.g.  $2 \leq \gamma \leq 3$ . Et comme la valeur minimale de  $\gamma$  peut être préalablement déterminée, soit avant le calcul du régulateur, on peut l'utiliser pour vérifier si la spécification des pondérations est convenable par rapport à la vraisemblance des modelages à priori et à posteriori.

## 10.6.2 Synthèse standard

Le problème de commande  $\mathcal{H}_{\infty}$  standard concerne la classe des systèmes standards satisfaisant les hypothèses  $\mathcal{HS}1, \mathcal{HS}2, \mathcal{HS}3, \mathcal{HS}4$  et  $\mathcal{HS}7$ . L'appellation synthèse standard est motivée par le fait que la classe de systèmes standards recouvre la plupart des problèmes de commande. Le résultat fondamental suivant précise les propriétés fondamentales qui permettent de conclure la faisabilité du problème standard de commande  $\mathcal{H}_{\infty}$  à partir des matrices hamiltonniennes

$$\mathcal{H}_{cre} = \begin{pmatrix} F & \gamma^{-2}G_w G_w^T - G_u G_u^T \\ -H_z^T H_z & -F^T \end{pmatrix} \quad (10.59)$$

et

$$\mathcal{H}_{is} = \begin{pmatrix} F^T & \gamma^{-2}H_z^T H_z - H_v^T H_v \\ -G_w G_w^T & -F \end{pmatrix} \quad (10.60)$$

**Résultat 10.6** Considérons le problème de commande sous optimale décrit par la représentation d'état (10.52) et satisfaisant les hypothèses  $\mathcal{HS}1, \mathcal{HS}2, \mathcal{HS}3, \mathcal{HS}4$  et  $\mathcal{HS}7$ , alors il existe un régulateur admissible  $\mathcal{R}(s)$  tel que  $\|\mathcal{G}_{zu}^{bf}(s)\|_{\infty} < \gamma$  si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites.



$\mathcal{P}1.$   $\mathcal{H}_{cre} \in \text{dom}(\text{Ric})$  et  $P_{cre} \stackrel{\Delta}{=} \text{Ric}(\mathcal{H}_{cre}) \geq 0$

$\mathcal{P}2.$   $\mathcal{H}_{is} \in \text{dom}(\text{Ric})$  et  $\Sigma_{is} \stackrel{\Delta}{=} \text{Ric}(\mathcal{H}_{is}) \geq 0$

$\mathcal{P}3.$   $\varrho(P_{cre}\Sigma_{is}) < \gamma^2$

**Remarque 10.10** Les propriétés  $\mathcal{P}1$  et  $\mathcal{P}2$  stipulent que les équations algébriques de Riccati associées aux matrices hamiltoniennes  $\mathcal{H}_{cre}$  et  $\mathcal{H}_{is}$  admettent des SSDPS, soit

$\mathcal{P}1.$  L'équation algébrique de Riccati

$$F^T P_{cre} + P_{cre} F + P_{cre} (\gamma^{-2} G_w G_w^T - G_u G_u^T) P + H_z^T H_z = 0$$

admet une solution définie positive  $P_{cre} = P_{cre}^T \geq 0$  et stabilisante, i.e.

$$\mathcal{V}(F + (\gamma^{-2} G_w G_w^T - G_u G_u^T) P_{cre}) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

$\mathcal{P}2.$  L'équation algébrique de Riccati

$$F \Sigma_{is} + \Sigma_{is} F^T + \Sigma_{is} (\gamma^{-2} H_z^T H_z - H_v^T H_v) \Sigma_{is} + G_w G_w^T = 0$$

admet une solution définie positive  $\Sigma_{is} = \Sigma_{is}^T \geq 0$  et stabilisante, i.e.

$$\mathcal{V}(F + \Sigma_{is} (\gamma^{-2} H_z^T H_z - H_v^T H_v)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

**Remarque 10.11** Une procédure itérative a été proposée pour déterminer le gain  $\mathcal{H}_\infty$  optimal  $\gamma_{opt}$ , modulo une précision donnée, en utilisant un processus de dichotomie, qui est connu dans la littérature de commande  $\mathcal{H}_\infty$  sous l'appellation  $\gamma$ -itération. Elle consiste à réaliser les étapes suivantes.

$\mathcal{E}1.$  Initialiser le processus de dichotomie avec un intervalle  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  contenant  $\gamma_{opt}$ .

$\mathcal{E}2.$  Tant que la longueur de l'intervalle  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  est supérieure à la précision requise, tester si toutes les propriétés  $\mathcal{P}1$ ,  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}3$  sont satisfaites au point médian

$$\gamma = \frac{1}{2} (\gamma_{min} + \gamma_{max})$$

Et si oui, éliminer la moitié droite de l'intervalle en posant  $\gamma_{max} = \gamma$ . Autrement, éliminer la moitié gauche en posant  $\gamma_{min} = \gamma$ .

Le résultat fondamental suivant caractérise la classe de régulateurs admissibles par rapport au problème de commande  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal.

**Résultat 10.7** Considérons le problème de commande sous optimale et supposons que les propriétés  $\mathcal{P}1$ ,  $\mathcal{P}2$  et  $\mathcal{P}3$  du résultat 10.6 sont vraies, alors la classe des régulateurs admissibles  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimaux est donnée par l'ensemble des fonctions de transfert donné par

$$\mathcal{R}_a(s) = \mathcal{F}_i(\mathcal{G}_a(s), \mathcal{Q}_a(s))$$

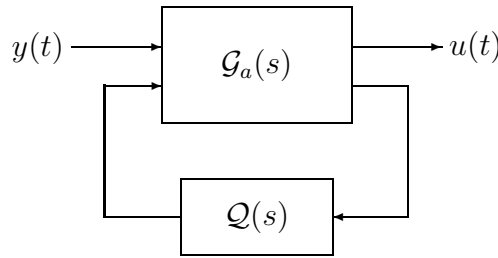
où  $\mathcal{Q}(s)$  est une fonction de transfert stable telle que  $\|\mathcal{Q}(s)\|_\infty < \gamma$  et

$$\mathcal{G}_a(s) = \left( \begin{array}{c|cc} F_c & -\Gamma \Sigma_{is} H_v^T & \Gamma G_u \\ \hline -G_u^T P_{cre} & 0_{m_u \times p_v} & I_{m_u} \\ -H_v & I_{p_v} & 0_{p_v \times m_u} \end{array} \right)$$

avec

$$\Gamma = (I_n - \gamma^{-2} P_{cre} \Sigma_{is})^{-1}$$

$$F_c = F + \gamma^{-2} G_w G_w^T P_{cre} - G_u G_u^T P_{cre} - \Gamma \Sigma_{is} H_v^T H_v$$



Parmi cette famille de régulateurs, on distingue le **régulateur central** qui correspond à la spécification triviale  $\mathcal{Q}(s) = 0$ ; il est donné par

$$\mathcal{R}_c(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_c & -\Gamma \Sigma_{is} H_v^T \\ \hline -G_u^T P_{cre} & 0 \end{array} \right) \quad (10.61)$$

**Remarque 10.12** Le régulateur central est strictement propre et son ordre est égal à l'ordre du modèle de synthèse  $\mathcal{G}(s)$ . Il peut être mis en oeuvre sous la forme d'une commande avec retour d'état incorporant un observateur comme suit

$$\mathcal{REGC} \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + G_u u(t) + \Gamma \Sigma_{is} H_v^T (v(t) - H_v \hat{x}(t)) + G_w \hat{w}(t) \\ \hat{w}(t) = \gamma^{-2} G_w^T P_{cre} \hat{x}(t) \\ u(t) = H_c \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad (10.62)$$

L'observateur d'état du régulateur central et le FK diffèrent par le terme additionnel  $G_w \hat{w}(t)$ ; la séquence  $\{\hat{w}(t)\}$  peut être interprétée comme une estimée des perturbations dans le cas le plus défavorable : le pire cas. Et comme le gain d'observation dépend du gain de commande avec retour d'état, le régulateur central n'hérite pas de la séparation des synthèses du système de commande avec retour d'état et de l'observateur du filtre de Kalman intrinsèque à la commande  $\mathcal{LQD}$ . Le régulateur central peut toutefois tendre asymptotiquement vers un régulateur  $\mathcal{LQD}$  pourvu que le scalaire  $\gamma$  tende vers l'infini, i.e.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mathcal{R}_c(s) = \mathcal{R}_{lqd}(s) \quad (10.63)$$

### 10.6.3 Synthèse générale

On peut étendre le problème de la commande  $\mathcal{H}_\infty$  à la classe des systèmes standards satisfaisants  $\mathcal{HS}1, \mathcal{HS}4, \mathcal{HS}5$  et  $\mathcal{HS}6$  qui est relativement large par rapport à la classe des systèmes considérée pour la synthèse standard. Le résultat fondamental suivant précise les propriétés fondamentales qui permettent de conclure la faisabilité du problème de commande  $\mathcal{H}_\infty$  à partir des matrices hamiltoniennes

$$\mathcal{H}_{cre} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ -H_z^T H_z & -F^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{zw} & G_{zu} \\ -H_z^T E_{zw} & -H_z^T E_{zu} \end{pmatrix} R_{cre}^{-1} \begin{pmatrix} E_{zw}^T H_z & G_w^T \\ E_{zu}^T H_z & G_u^T \end{pmatrix} \quad (10.64)$$

et

$$\mathcal{H}_{is} = \begin{pmatrix} F^T & 0 \\ -G_w G_w^T & -F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_w^T & H_v^T \\ -G_w E_{zw}^T & -G_w E_{vw}^T \end{pmatrix} R_{is}^{-1} \begin{pmatrix} E_{zw} G_w^T & H_z \\ E_{vw} G_w^T & H_v \end{pmatrix} \quad (10.65)$$

où les matrices  $R_{cre}$  et  $R_{is}$  sont des matrices respectivement données par

$$R_{cre} = \begin{pmatrix} E_{zw}^T E_{zw} - \gamma^2 I_{m_w} & E_{zw}^T E_{zu} \\ E_{zu}^T E_{zw} & E_{zu}^T E_{zu} \end{pmatrix} \text{ et } R_{is} = \begin{pmatrix} E_{zw} E_{zw}^T - \gamma^2 I_{p_z} & E_{zw} E_{vw}^T \\ E_{vw} E_{zw}^T & E_{vw} E_{vw}^T \end{pmatrix} \quad (10.66)$$

Les gains du retour d'état et d'injection de sortie associés sont respectivement donnés par les expressions

$$K \triangleq \begin{pmatrix} K_w \\ K_u \end{pmatrix} = -R_{cre}^{-1} \begin{pmatrix} E_{zw}^T H_z + G_w^T P_{cre} \\ E_{zu}^T H_z + G_u^T P_{cre} \end{pmatrix} \quad (10.67)$$

$$M \triangleq \begin{pmatrix} M_z & M_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G_w E_{zw}^T + \Sigma_{is} H_z^T & G_w E_{vw}^T + \Sigma_{is} H_v^T \end{pmatrix} R_{is}^{-1} \quad (10.68)$$

Et comme  $m_w \geq p_v$  et  $p_z \geq m_u$ , les matrices  $K_w$  et  $M_z$  peuvent être décomposées comme suit

$$K_w \triangleq \begin{pmatrix} K_{w1} \\ K_{w2} \end{pmatrix} \text{ et } M_z \triangleq \begin{pmatrix} M_{z1} & M_{z2} \end{pmatrix} \quad (10.69)$$

**Remarque 10.13** Compte tenu du fait que  $p_z \geq m_u$  et  $p_v \leq m_w$ , nous avons adopté la partition matricielle

$$\left( \begin{array}{c|c} \times & K^T \\ \hline M^T & E \end{array} \right) \triangleq \left( \begin{array}{c|cc} \times & K_{w1}^T & K_{w2}^T & K_u \\ \hline M_{z1}^T & E_{zw11} & E_{zw12} & 0_{(p_z-m_u) \times m_u} \\ M_{z2}^T & E_{zw21} & E_{zw22} & I_{m_u} \\ M_v^T & 0_{p_v \times (m_w-p_v)} & I_{p_v} & 0_{p_v \times m_u} \end{array} \right)$$

qui est faisable si  $p_z > m_u$  et  $p_v < m_w$ . Dans le cas  $p_z = m_u$  (resp.  $p_v = m_w$ ) les matrices  $E_{zw11}$  et  $E_{zw12}$  (resp.  $E_{zw12}$  et  $E_{zw22}$ ) disparaissent.

Les deux résultats suivants précisent les conditions d'existence d'un régulateur admissible qui réalise les performances requises d'un système de commande sous-optimal  $\mathcal{H}_\infty$  et donne la classe des régulateurs sous-optimaux  $\mathcal{H}_\infty$  pour la classe des systèmes standards considérée.

**Résultat 10.8** *Considérons le système décrit par la description (10.52) et satisfaisant les hypothèses  $\mathcal{HS}1, \mathcal{HS}4, \mathcal{HS}5$  et  $\mathcal{HS}6$ . Alors, il existe un régulateur admissible satisfaisant la propriété*

$$\|\mathcal{F}(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s))\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si les propriétés suivantes sont vraies.

$\mathcal{P}1$ . *Le scalaire  $\gamma$  doit être convenablement spécifié, i.e.*

$$\gamma > \max \left( \sigma_{\max} \left( \begin{array}{cc} E_{zw_{11}} & E_{zw_{12}} \end{array} \right), \sigma_{\max} \left( \begin{array}{cc} E_{zw_{11}}^T & E_{zw_{21}}^T \end{array} \right) \right)$$

$\mathcal{P}2$ . *L'équation algébrique de Riccati associée à la commande avec retour d'état admet une SSDPS solution, soit*

$$\mathcal{H}_{cre} \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ avec } P_{cre} \triangleq \text{Ric}(\mathcal{H}_{cre}) \geq 0$$

$\mathcal{P}3$ . *L'équation algébrique de Riccati associée à l'injection de sortie admet une SSDPS solution, soit*

$$\mathcal{H}_{ins} \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ avec } \Sigma_{is} \triangleq \text{Ric}(\mathcal{H}_{ins}) \geq 0$$

$\mathcal{P}4$ .  $\varrho(P_{cre}\Sigma_{is}) < \gamma^2$

**Résultat 10.9** *Considérons le système décrit par la description (10.52) et supposons que toutes les propriétés  $\mathcal{P}1, \mathcal{P}2, \mathcal{P}3$  et  $\mathcal{P}4$  du résultat 10.8 soient vraies. Alors, la classe des régulateurs admissibles  $\mathcal{R}(s)$  satisfaisant la propriété*

$$\|\mathcal{F}(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s))\|_\infty < \gamma$$

sont données par

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{F}_\ell(\bar{\mathcal{G}}(s), \bar{\mathcal{Q}}(s)) \text{ pour } \bar{\mathcal{Q}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty / \|\bar{\mathcal{Q}}(s)\| < \gamma \quad (10.70)$$

avec

$$\bar{\mathcal{G}}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \bar{F} & \bar{G}_1 & \bar{G}_2 \\ \hline \bar{H}_1 & \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} \\ \bar{H}_2 & \bar{E}_{21} & 0 \end{array} \right) \quad (10.71)$$

où la matrice  $\bar{E}$  est constituée comme suit

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= -E_{zw_{21}} E_{zw_{11}}^T \left( \gamma^2 I_{(p_z - m_u)} - E_{zw_{11}} E_{zw_{11}}^T \right)^{-1} E_{zw_{12}} - E_{zw_{22}} \\ \bar{E}_{12} \bar{E}_{12}^T &= I_{m_u} - E_{zw_{21}} \left( \gamma^2 I_{(m_w - p_v)} - E_{zw_{11}}^T E_{zw_{11}} \right)^{-1} E_{zw_{21}}^T \\ \bar{E}_{21}^T \bar{E}_{21} &= I_{p_v} - E_{zw_{12}}^T \left( \gamma^2 I_{(p_z - m_u)} - E_{zw_{11}} E_{zw_{11}}^T \right)^{-1} E_{zw_{12}} \end{aligned} \quad (10.72)$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma &= (I_n - \gamma^{-2} \Sigma_{is} P_{cre})^{-1} \\
\bar{G}_2 &= \Gamma (G_u + M_{z2}) \bar{E}_{12} \\
\bar{H}_2 &= -\bar{E}_{21} (H_v + K_{w2}) \\
\bar{G}_1 &= -\Gamma M_{vw} + \bar{G}_2 \bar{E}_{12}^{-1} \bar{E}_{11} \\
\bar{H}_1 &= K_u + \bar{E}_{11} \bar{E}_{21}^{-1} \bar{H}_2 \\
\bar{F} &= F + GK + \bar{G}_1 \bar{E}_{21}^{-1} \bar{H}_2
\end{aligned} \tag{10.73}$$

**La preuve** de ce résultat est effectuée d'une manière laborieuse et néanmoins compréhensible dans [88]. Elle permet d'acquérir une maîtrise de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  que l'on peut exploiter judicieusement lors des formulation des problèmes de commande  $\mathcal{H}_\infty$ .

Les remarques suivantes constituent un complément du résultat fondamental 10.9 qui permet de l'utiliser convenablement et de montrer qu'il est possible de relâcher les hypothèses structurales  $\mathcal{HS2}$  et  $\mathcal{HS4}$ .

**Remarque 10.14** Le gain  $\mathcal{H}_\infty$  optimal  $\gamma_{opt}$  peut être déterminé en utilisant la procédure itérative donnée dans la remarque 10.11.

**Remarque 10.15** On distingue trois problèmes de commande  $\mathcal{H}_\infty$  qui se distinguent par les matrices  $E_{zu}$  et  $E_{vw}$ .

- Le premier concerne le cas  $E_{zu} = I_{m_u}$  où les matrices  $E_{zw11}$ ,  $E_{zw12}$  et  $E_{zu1}$  n'existeraient pas. La condition associée à la propriété  $\mathcal{P1}$  du résultat 10.8 se simplifie comme suit

$$\gamma > \max(\sigma_{max}(E_{zw21}))$$

Et les expressions des matrices  $\bar{E}_{11}$ ,  $\bar{E}_{12}$  et  $\bar{E}_{21}$  du résultat 10.9 deviennent

$$\bar{E}_{11} = -E_{zw22}, \quad \bar{E}_{12} \bar{E}_{12}^T = I_{m_u} - \gamma^{-2} E_{zw21} E_{zw21}^T \quad \text{et} \quad \bar{E}_{21}^T \bar{E}_{21} = I_{p_v}$$

- Le deuxième concerne le cas  $E_{vw} = I_{p_v}$  où les matrices  $E_{zw11}$ ,  $E_{zw21}$  et  $E_{yw1}$  n'existeraient pas. La condition associée à la propriété  $\mathcal{P1}$  du résultat 10.8 se simplifie comme suit

$$\gamma > \max(\sigma_{max}(E_{zw12}))$$

Et les expressions des matrices  $\bar{E}_{11}$ ,  $\bar{E}_{12}$  et  $\bar{E}_{21}$  du résultat 10.9 deviennent

$$\bar{E}_{11} = -E_{zw22}, \quad \bar{E}_{12} \bar{E}_{12}^T = I_{m_u} \quad \text{et} \quad \bar{E}_{21}^T \bar{E}_{21} = I_{p_v} - \gamma^{-2} E_{zw12}^T E_{zw12}$$

- Le troisième concerne le cas  $E_{zu} = I_{m_u}$  et  $E_{vw} = I_{p_v}$  où les matrices  $E_{zw11}$ ,  $E_{zw21}$ ,  $E_{vw1}$ ,  $E_{zw11}$ ,  $E_{zw21}$  et  $E_{vw1}$  n'existeraient pas. La condition associée à la propriété  $\mathcal{P}1$  du résultat 10.8 est supprimée et les expressions des matrices  $\bar{E}_{11}$ ,  $\bar{E}_{12}$  et  $\bar{E}_{21}$  du résultat 10.9 deviennent

$$\bar{E}_{11} = -E_{zw22}, \quad \bar{E}_{12}\bar{E}_{12}^T = I_{m_u} \quad \text{et} \quad \bar{E}_{21}^T\bar{E}_{21} = I_{p_v}$$

**Remarque 10.16** Considérons le système de commande standard dont le diagramme fonctionnel peut être représenté comme le montre la figure 10.12 où  $\{z_p(t)\} \in \mathbb{R}^{p_z}$ ,  $\{v_p(t)\} \in \mathbb{R}^{p_v}$ ,  $\{w_p(t)\} \in \mathbb{R}^{m_w}$ ,  $\{u_p(t)\} \in \mathbb{R}^{m_u}$ .

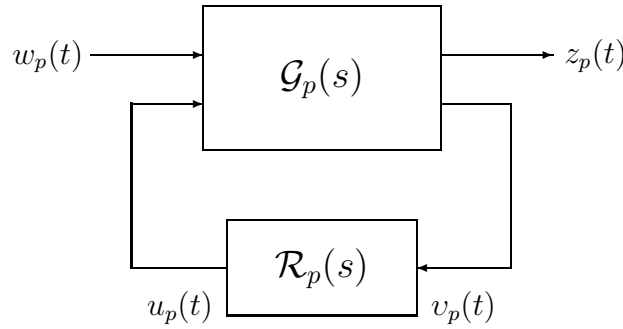


FIGURE 10.12 – Forme standard

On se propose de réaliser une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  sous optimale à partir du résultat ?? en supposant que le système standard correspondant est décrit par la réalisation d'état

$$\mathbb{R}^{(m_w+m_u) \times (p_z+p_v)}(s) \ni \mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_p & G_p \\ \hline H_p & E_p \end{array} \right) \triangleq \left( \begin{array}{c|cc} F_p & G_{pw} & G_{pu} \\ \hline H_{pz} & E_{pzw} & E_{pzu} \\ H_{pv} & E_{pvw} & E_{pvu} \end{array} \right)$$

où la matrice  $E_{pzu}$  (resp. la matrice  $E_{pvw}$ ) est de rang (colonne) (resp. (ligne)) plein. Pour ce faire, il suffit de procéder à une normalisation des matrices  $E_{pzu}$  et  $E_{pvw}$  en procédant à leur factorisation à partir des décompositions en valeurs singulières comme suit

$$E_{pzu} = U_{zu} \begin{pmatrix} 0_{(p_z-m_u) \times m_u} \\ I_{m_u} \end{pmatrix} V_{zu} \quad \text{et} \quad E_{pvw} = V_{vw} \begin{pmatrix} 0_{p_v \times (m_w-p_v)} & I_{p_v} \end{pmatrix} U_{vw}$$

où  $U_{zu} \in \mathbb{R}^{p_z \times p_z}$  et  $U_{vw} \in \mathbb{R}^{m_w \times m_w}$  sont des matrices unitaires et  $V_{zu} \in \mathbb{R}^{p_z \times p_z}$  et  $V_{vw} \in \mathbb{R}^{m_w \times m_w}$  sont des matrices régulières. En effet, si l'on pose

$$z_p = U_{zu}z, \quad v_p = V_{vw}v, \quad w_p = U_{zu}^T w \quad \text{et} \quad u_p = V_{zu}u$$

on aura

$$\mathcal{R}(s) = V_{zu}\mathcal{R}_p(s)V_{vw}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(s) &= \begin{pmatrix} U_{zu}^T & 0 \\ 0 & V_{vw}^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{G}_p(s) \begin{pmatrix} U_{vw}^T & 0 \\ 0 & V_{zu}^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \left( \begin{array}{c|cc} F_{p\sigma} & G_{pw}U_{vw}^T & G_{pu}V_{zu}^{-1} \\ \hline U_{zu}^T H_{pz} & U_{zu}^T E_{pzw}U_{vw}^T & U_{zu}^T E_{pzu}V_{zu}^{-1} \\ \hline V_{vw}^{-1} H_{pv} & V_{vw}^{-1} E_{pvw}U_{zu}^T & V_{vw}^{-1} E_{pvu}V_{zu}^{-1} \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{c|cc} F & G_w & G_u \\ \hline H_z & E_{zw} & E_{zu} \\ \hline H_v & E_{vw} & E_{vu} \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right)
\end{aligned}$$

avec

$$E_{zu} = \begin{pmatrix} 0_{(p_z-m_u) \times m_u} \\ I_{m_u} \end{pmatrix} \text{ et } E_{vw}(s) = \begin{pmatrix} 0_{p_v \times (m_w-p_v)} & I_{p_v} \end{pmatrix}$$

On recouvre bien le contexte de synthèse du résultat 10.9. Par ailleurs, on a

$$\|\mathcal{F}_\ell(\mathcal{G}_p(s), \mathcal{R}_p(s))\|_\infty = \|U_{zu}\mathcal{F}_\ell(\mathcal{G}_p(s), \mathcal{R}_p(s))U_{vw}\|_\infty = \|\mathcal{F}_\ell(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s))\|_\infty$$

et

$$\mathcal{R}_p(s) = V_{zu}^{-1}\mathcal{R}(s)V_{vw}^{-1}$$

**Remarque 10.17** Supposons que  $\mathcal{R}(s)$  est un régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  sous optimal avec  $E_{vu} = 0$ . Alors  $\mathcal{R}(s)(I_{m_u} + E_{vu}\mathcal{R}(s))^{-1}$  est un régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  sous optimal avec  $E_{vu} \neq 0$ . Ce postulat est essentiellement justifié par le fait que si

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_s(s) + \begin{pmatrix} 0_{p_z \times m_w} & 0_{p_z \times m_u} \\ 0_{p_v \times m_w} & E_{vu} \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{R}(s) = \mathcal{R}_s(s)(I_{m_u} + E_{pw}\mathcal{R}(s))^{-1}$$

alors

$$\mathcal{F}_\ell(\mathcal{G}_s(s), \mathcal{R}_s(s)) = \mathcal{F}_\ell(\mathcal{G}(s), \mathcal{R}(s))$$

## 10.7 Sensibilité mixte.

Les recommandations du chapitre 7 sur les performances nominales et la robustesse en stabilité suggèrent de réduire autant que possible les fonctions de sensibilité usuelles en vue de réaliser les spécifications usuelles d'un système de commande, notamment

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_s(\omega j)) \leq \gamma_s \quad (\text{resp. } \sigma_{max}(\mathcal{T}_s(\omega j)) \leq \gamma_{sc}) \quad (10.74)$$

pour réaliser un rejet des perturbations que l'on peut ramener en sortie du système (resp. une

robustesse en stabilité par rapport aux incertitudes multiplicatives directes en sortie). La réduction des fonctions de sensibilité usuelles doit être faite dans des bandes de fréquences appropriées, notamment les basses (resp. hautes) fréquences pour les perturbations de charge (resp. les bruits de mesure) et des bandes de fréquences spécifiques pour les erreurs de modélisation. Ceci nous amène au concept de modelage des fonctions de sensibilité usuelles, communément connu sous l'appellation "loop shaping". Ce dernier consiste à utiliser des pondérations fréquentielles appropriées pour incorporer les connaissances disponibles sur les spectres de la séquence de référence, des perturbations, des bruits de mesure et des erreurs de modélisation dans la formulation du problème. Les objectifs (10.74) deviennent alors

$$\sigma_{\max}(\mathcal{W}_s(\omega j) \mathcal{S}_s(\omega j)) \leq \gamma_{sp} \quad (\text{resp. } \sigma_{\max}(\mathcal{W}_{sc}(\omega j) \mathcal{T}_s(\omega j)) \leq \gamma_{scp}) \quad (10.75)$$

où  $\mathcal{W}_s(s)$  (resp.  $\mathcal{W}_{sc}(s)$ ) désigne une fonction de pondération proprement spécifiée par rapport au spectre des perturbations (resp. des bruits de mesure).

Outre une harmonisation des composantes des différents signaux mis en jeu dans le système de commande, le concept de pondération fréquentielle permet de se focaliser sur une zone de fréquences spécifique par rapport aux spectres des différentes entrées exogènes. Ainsi, on peut spécifier convenablement les performances requises en exploitant convenablement les connaissances disponibles sur la séquence de référence, les perturbations et les bruits de mesure. Les pondérations  $\mathcal{W}_{pe}(s)$ ,  $\mathcal{W}_{ps}(s)$  et  $\mathcal{W}_b(s)$  sont essentiellement utilisées pour refléter les spectres des perturbations et des bruits de mesure. Les pondérations  $\mathcal{W}_s(s)$  et  $\mathcal{W}_e(s)$  sont principalement utilisées pour modéliser les fonctions de sensibilité usuelles  $\mathcal{S}_s(s)$  et  $\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$  avec une éventuelle contrainte sur l'amplitude de la commande. Quant à la pondération  $\mathcal{W}_r(s)$ , elle permet de modéliser la dynamique de poursuite en utilisant un régulateur à deux degrés de liberté si besoin est.

La spécification des pondérations n'est pas triviale, elle requiert un savoir faire acquis par la pratique et que l'on peut initier en étudiant tous les problèmes traités dans les ouvrages pédagogiques, notamment [77] et [89]. Dans le cas des objectifs de commande (10.75),  $\mathcal{W}_s(s)$  (resp.  $\mathcal{W}_{sc}(s)$ ) est une fonction de pondération donnée du type passe-haut (resp. passe bas) qui permet de réaliser l'atténuation désirée pour la fonction de sensibilité (resp. de sensibilité complémentaire) et que l'on peut spécifier comme suit

$$\mathcal{W}_s(s) = W_s(s)I_{p_v} \quad (\text{resp. } \mathcal{W}_{sc}(s) = W_{sc}(s)I_{m_u})$$

avec

$$W_s(s) = \left( \frac{\frac{1}{\mu_s} s + \omega_b}{s} \right) \longrightarrow \left( \frac{\frac{1}{\mu_s} s + \omega_b}{s + \varepsilon_s \omega_b} \right)$$

$$\left( \text{resp. } W_{sc}(s) = \left( \frac{s + \frac{\omega_b}{\mu_{sc}}}{\omega_{bc}} \right) \longrightarrow \left( \frac{s + \frac{\omega_b}{\mu_{sc}}}{\varepsilon_{sc} s + \omega_{bc}} \right) \longrightarrow \left( \frac{s + \frac{\omega_b}{\sqrt[k]{\mu_s}}}{\sqrt[k]{\varepsilon_{sc}} s + \omega_b} \right)^k \right)$$

Ces problèmes de commande ne sont bien posés d'un point de vue pratique dans la mesure où



ils se focalisent sur une seule fonction de sensibilité usuelle et qu'ils requièrent des hypothèses relativement restrictives sur la classe des systèmes à commander, en l'occurrence tous les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité. Les objectifs correspondants peuvent être toutefois impliqués par la réduction d'une matrice composée de deux, trois ou quatre fonctions de sensibilité usuelles, que l'on peut formuler sous la forme d'un problème standard. Ceci nous amène naturellement au concept de sensibilité mixte permet de réaliser un modelage de la fonction de sensibilité avec une, deux ou trois autres fonction de sensibilité usuelle du système de commande. On donne ci-dessous les deux problèmes de commande  $\mathcal{H}_\infty$  remarquables relevant du concept de sensibilité mixte

- Le premier problème concerne la recherche d'un régulateur admissible qui réalise la propriété suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}(s)\mathcal{W}_w(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s)\mathcal{RS}(s)\mathcal{W}_w(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

et donc

$$\|\mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}(s)\mathcal{W}_w(s)\|_\infty < \gamma \text{ et } \|\mathcal{W}_{rs}(s)\mathcal{RS}(s)\mathcal{W}_w(s)\|_\infty < \gamma$$

- Le second problème concerne la recherche d'un régulateur admissible qui réalise la propriété suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}(s)\mathcal{W}_w(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}(s)\mathcal{W}_w(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

et donc

$$\|\mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}(s)\mathcal{W}_w(s)\|_\infty < \gamma \text{ et } \|\mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}(s)\mathcal{W}_w(s)\|_\infty < \gamma$$

où  $\mathcal{W}_s(s)$ ,  $\mathcal{W}_{rs}(s)$  et  $\mathcal{W}_{sc}(s)$  sont des pondérations appropriées des fonctions de sensibilité usuelles  $\mathcal{S}(s)$ ,  $\mathcal{RS}(s)$  et  $\mathcal{T}(s)$ , alors que la pondération  $\mathcal{W}_w(s)$  n'est autre qu'un modèle générateur de la séquence  $\{w(t)\}$ .

Compte tenu de l'approche systémique présentée au chapitre 7, on peut dire que le problème de sensibilité mixte  $\mathcal{S}/\mathcal{RS}$  (resp.  $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ ), peut être obtenu à partir d'une formulation adéquate d'un problème de rejet des perturbations ramenées en sortie du système (resp. de poursuite d'une séquence de référence) avec une insensibilité du système de commande par rapport aux bruits de mesure en entrée (resp. en sortie) ou une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation additives directes (resp. multiplicatives directes en sortie); comme le montre la figure 10.6 (resp. la figure 10.7). Il est important de noter que le concept de sensibilité mixte  $\mathcal{S}/\mathcal{RS}$  (resp.  $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ ) n'est pas relativement versatile pour réaliser un bon compromis performances-robustesse ([77]). En effet, il engendre naturellement une simplification des pôles du système par les zéros du régulateur qui limite les performances dynamiques du système de commande dans le cas des systèmes relativement lents et/ou flexibles. Cette problématique a été rigoureusement étudiée dans [75] où le résultat principal est donné ci-dessous.

**Résultat 10.10** Considérons le problème de sensibilité mixte  $\mathcal{S}/\mathcal{RS}$  pour la classe des systèmes standards satisfaisant les hypothèses  $\mathcal{H}1$  à  $\mathcal{H}6$  et supposons que les pondérations  $\mathcal{W}_s(s)$  et  $\mathcal{W}_{rs}(s)$  sont stables et admettent des inverses stables. Alors le système de commande  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal associé exhibe les propriétés de simplification pôles-zéros suivantes

- Chaque pôle stable du système, i.e. de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_{vu}(s)$ , est un zéro de transmission du régulateur i.e. de la fonction de transfert  $\mathcal{R}(s)$ .
- Si  $p_i$  est un pôle instable du système, alors  $-p_i^T$  est un pôle de la fonction de sensibilité  $\mathcal{S}_o$ .
- Chaque pôle de  $\mathcal{W}_s(s)$  est un pôle du régulateur et chaque pôle de  $\mathcal{W}_{rs}(s)$  est un zéro de transmission du régulateur  $\mathcal{R}(s)$ .

Pour pallier cette simplification des pôles et des zéros, il suffit de conforter la fonction coût en incorporant une ou deux autres fonctions de sensibilité usuelles dans la fonction coût. Ceci nous amène naturellement au concert de sensibilité généralisée que l'on peut présenter à partir des trois problèmes de commande standard donnés ci-dessous.

- Le premier problème concerne la recherche d'un régulateur admissible qui réalise la propriété suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_w(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s)\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_w(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}_s(s)\mathcal{W}_w(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_w(s)\|_{\infty} < \gamma, \quad \|\mathcal{W}_{rs}(s)\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_w(s)\|_{\infty} < \gamma \\ \text{et } \|\mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}_s(s)\mathcal{W}_w(s)\|_{\infty} < \gamma \end{aligned}$$

- Le second problème concerne la recherche d'un régulateur admissible qui réalise la propriété suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}_e(s)\mathcal{W}_w(s) \\ \mathcal{W}_{gs}(s)\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)\mathcal{W}_w(s) \\ \mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}_e(s)\mathcal{W}_w(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}_e(s)\mathcal{W}_w(s)\|_{\infty} < \gamma, \quad \|\mathcal{W}_{gs}(s)\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)\mathcal{W}_w(s)\|_{\infty} < \gamma, \\ \text{et } \|\mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}_e(s)\mathcal{W}_w(s)\|_{\infty} < \gamma \end{aligned}$$

- Le troisième problème concerne la recherche d'un régulateur admissible qui réalise la propriété suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_d(s) & \mathcal{W}_{gs}(s)\mathcal{S}\mathcal{G}(s)\mathcal{W}_d(s) \\ \mathcal{W}_{rs}(s)\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_d(s) & \mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}_e(s)\mathcal{W}_d(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}_s(s)\mathcal{S}_s(s)\mathcal{W}_d(s)\|_{\infty} < \gamma, \quad \|\mathcal{W}_{gs}(s)\mathcal{S}\mathcal{G}(s)\mathcal{W}_d(s)\|_{\infty} < \gamma, \\ \|\mathcal{W}_{gs}(s)\mathcal{S}\mathcal{G}(s)\mathcal{W}_d(s)\|_{\infty} < \gamma \text{ et } \|\mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{T}_e(s)\mathcal{W}_d(s)\|_{\infty} < \gamma \end{aligned}$$

où  $\mathcal{W}_s(s)$ ,  $\mathcal{W}_{rs}(s)$  et  $\mathcal{W}_{sc}(s)$  sont des pondérations appropriées des fonctions de sensibilité usuelles  $\mathcal{S}(s)$ ,  $\mathcal{R}\mathcal{S}(s)$  et  $\mathcal{T}(s)$ , alors que  $\mathcal{W}_w(s)$  peut être interprété comme un modèle générateur des perturbations.

## 10.8 Éléments de synthèse

Le contexte de synthèse  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  considéré a été utilisé dans de nombreuses études allant de la régulation industrielle au pilotage des véhicules spatiaux en passant par des problèmes de conduite de procédés industriels. Ces études ont été essentiellement réalisées dans le cadre de collaborations fructueuses entre les prestigieux centre de recherche en automatique et des centres de développement technologiques dans tous les secteurs industriels. Plusieurs exemples ont été traités d'une manière compréhensible dans des ouvrages pédagogiques ([1], [25], [26], [30], [74], [77]). On se propose, dans ce qui suit de mettre en exergue quatre aspects de synthèse intrinsèques aux synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ .

**La détermination d'une réalisation d'état minimale du modèle de synthèse standard à partir de sa fonction de transfert n'est pas faisable par les algorithmes de réalisation disponibles. En effet, ces algorithmes ne tiennent pas compte de l'apparition répétée de la fonction de transfert du système au sein du modèle de synthèse standard ; ils procèdent à une duplication des modes du système qui conduit naturellement à une réalisation d'état non minimale.**

Pour pallier ce problème, on effectue une décomposition de la fonction de transfert du modèle de synthèse standard en un produit de fonctions de transfert où la fonction de transfert et les pondérations n'apparaissent qu'une seule fois avant de procéder à une multiplication des réalisations (voir paragraphe 2.5). On obtient ainsi une réalisation d'état minimale du modèle de synthèse standard pourvu que les réalisations d'état du système et des pondérations soient minimales. Pour illustrer cette démarche, considérons le cas du premier problème de sensibilité mixte généralisée avec une pondération  $\mathcal{W}_w(s) = I$ , la fonction de transfert du modèle de synthèse standard peut être décomposée comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s) &= \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{W}_s(s) & -\mathcal{W}_s(s)\mathcal{G}(s) \\ 0 & \mathcal{W}_{rs}(s) \\ 0 & \mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{G}_\sigma(s) \\ \hline I & -\mathcal{G}_\sigma(s) \end{array} \right) \\ &= \text{diag} \{ \mathcal{W}_s(s), \mathcal{W}_{rs}(s), \mathcal{W}_{sc}(s), I \} \left( \begin{array}{c|c} I & -\mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0 & I \\ 0 & \mathcal{G}_\sigma(s) \\ \hline I & -\mathcal{G}_\sigma(s) \end{array} \right) \\ &= \text{diag} \{ \mathcal{W}_s(s), \mathcal{W}_{rs}(s), \mathcal{W}_{sc}(s), I \} \begin{pmatrix} I & 0 & -I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et si l'on considère les réalisations d'état minimales pour le système à commander et les pondérations

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_\sigma & G_\sigma \\ \hline H_\sigma & E_\sigma \end{array} \right)$$

$$\mathcal{W}_s(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_{ws} & G_{ws} \\ \hline H_{ws} & E_{ws} \end{array} \right), \quad \mathcal{W}_{rs}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_{wrs} & G_{wrs} \\ \hline H_{wrs} & E_{wrs} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{sc}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_{wsc} & G_{wsc} \\ \hline H_{wsc} & E_{wsc} \end{array} \right),$$

alors on aura

$$\text{diag} \{F_{ws}, F_{wrs}, F_{wt}, I\} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \text{diag}(F_{ws}, F_{wrs}, F_{wt}) & & & \text{diag}(G_{ws}, G_{wrs}, G_{wt}) & & 0 \\ \text{diag}(H_{ws}, H_{wrs}, H_{wt}) & & & \text{diag}(E_{ws}, E_{wrs}, E_{wt}) & & I \\ 0 & & & 0 & & I \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \mathcal{G}_\sigma(s) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} F_g & 0 & G_g \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline H_g & 0 & G_g \end{array} \right)$$

Et en vertu des règles multiplication des réalisations, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s) &= \text{diag} \{ \mathcal{W}_s(s), \mathcal{W}_{rs}(s), \mathcal{W}_{sc}(s), I \} \left( \begin{array}{c|c|c} F_g & 0 & G_g \\ \hline -H_g & I & -E_g \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline H_g & 0 & E_g \\ \hline -H_g & 0 & -E_g \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cccc|ccc} F_g & 0 & 0 & 0 & 0 & G_g \\ -G_{ws}H_g & F_{ws} & 0 & 0 & G_{ws} & -G_{ws}E_g \\ 0 & 0 & F_{wrs} & 0 & 0 & G_{wrs} \\ G_{wsc}H_g & 0 & 0 & F_{wsc} & 0 & G_{wsc}E_g \\ \hline -E_{ws}H_g & H_{ws} & 0 & 0 & E_{ws} & -E_{ws}E_g \\ 0 & 0 & H_{wrs} & 0 & 0 & E_{wrs} \\ E_{wsc}H_g & 0 & 0 & H_{wsc} & 0 & E_{wsc}E_g \\ \hline -H_g & 0 & 0 & 0 & I & -E_g \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10.76)$$

Cette réalisation du système standard est bien minimale et son ordre n'est autre que la somme de l'ordre du système et des ordres des pondérations fréquentielles considérées, soit

$$n_{g_s} = n_\sigma + n_{w_s} + n_{w_s} + n_{w_s}$$

On peut ainsi utiliser cette réalisation comme un modèle de synthèse  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système de commande en fonction des spécifications requises, en l'occurrence une réduction des perturbations (resp. une insensibilité aux bruits de mesure) admissible avec les performances dynamiques désirées.

**Une spécification des fonctions pondérations soucieuse** des spécifications requises du système de commande et de la faisabilité de sa synthèse, i.e. la satisfaction des hypothèses standards HS1 à HS6. Cette spécification n'est pas triviale, elle requiert une lecture attentive de la littérature pour une meilleure perception des performances admissibles des systèmes de commande linéaire. Cette perception est vitale pour une inscription dans l'ordre des architectes des systèmes de commande susceptibles de contribuer au développement d'une ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée.

Une lecture assidue de la littérature nous enseigne que l'on ne peut pas façonner arbitrairement

le comportement d'un système de commande, en l'occurrence une réduction des performances dynamiques et de robustesse lorsque le système admet des pôles (resp. des zéros) situés dans le demi plan complexe de droite et relativement éloignées (resp. proches) de l'axe imaginaire ([36], [40], [76], [77], [86], [89]). Ainsi, on ne peut pas négocier un compromis performances-robustesse admissible sans acquérir un potentiel fondamental pour avoir l'habileté requise pour ce faire. Le résultat le plus populaire concerne l'intégrale de sensibilité de Bode.

**Résultat 10.11** *Considérons un système de commande dont la fonction de transfert en boucle ouverte en sortie admet  $n_{pi}$  pôles instables et son degré relatif est supérieur ou égal à 2, alors le système de commande est asymptotiquement stable si*

$$\int_0^{\infty} \text{Ln}(\det(\mathcal{S}(j\omega))) d\omega = \sum_{i=1}^{n_{pi}} \int_0^{\infty} \text{Ln}(\det(\mathcal{S}(j\omega))) d\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_{pi}} \mathcal{R}_e(p_i)$$

**La preuve** de ce résultat faite d'une manière élégante dans [36] en exploitant judicieusement les résultats de l'analyse complexe ; elle a été reprise dans la littérature relevant des limitations des performances et de robustesse.

En vertu de ce résultat, on peut postuler qu'une réduction de la fonction de sensibilité d'un système de commande en basses fréquences est naturellement accompagnée par son augmentation en hautes fréquences. La spécification des pondérations doit être conforme à ce phénomène naturel de la fonction de sensibilité d'un système de commande. Une étude particulière a été réservée à la satisfaction de la condition de rang  $\mathcal{HS4}$ , qui est impérative pour avoir un régulateur propre ([64]). Elle préconise d'utiliser une pondération impropre si besoin est dans les limites intrinsèques à la mise en oeuvre du régulateur.

Par ailleurs, compte tenu de la réalisation minimale (10.76) du modèle de synthèse standard associé au premier problème de sensibilité mixte généralisée avec une pondération  $\mathcal{W}_w(s) = I$ , on peut en déduire aisément que

$$\mathcal{G}_{vw}(s) = I_p$$

Les modes de  $\mathcal{W}_s(s)$ ,  $\mathcal{W}_{rs}(s)$  et  $\mathcal{W}_{sc}(s)$  sont des modes non observables de  $(H_v, F)$

et

$$E_{zu} = \begin{pmatrix} -G_{ws}H_g \\ G_{wrs} \\ G_{wsc}E_g \end{pmatrix}$$

Les conditions de synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  requièrent alors des contraintes sur les pondérations et le système à commander, en l'occurrence  $\mathcal{W}_s(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$ ,  $\mathcal{W}_{rs}(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$  et  $\mathcal{W}_{sc}(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$ , en vertu de l'hypothèse  $\mathcal{HS1}$ , et que tout pôle de  $\mathcal{G}_{\sigma}(s)$  est un zéro de  $\mathcal{G}_{vw}(s)$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{G}_{vu}(s)$  est strictement propre, i.e.  $E_{vu} = 0$ , l'hypothèse  $\mathcal{HS4}$  n'est satisfaite que si  $E_{wrc}$  est de rang plein ou que le produit  $\mathcal{W}_{sc}(s)\mathcal{G}_{\sigma}(s)$  est strictement propre. Ces contraintes réduisent la faisabilité de la synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  aux systèmes qui n'admettent aucun pôle sur l'axe imaginaire et ne permettent pas d'incorporer naturellement une action intégrale dans la synthèse du système de commande au travers des pondérations fréquentielles.

**On ne peut pas incorporer une action intégrale** dans une synthèse  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  à partir d'une spécification appropriée des fonctions pondérations en vertu du concept de modèle interne, en l'occurrence une pondération en entrée avec un pôle à l'origine. En effet, cette spécification n'est point soucieuse des hypothèses de synthèse, notamment  $\mathcal{W}_u(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , et justifie une spécification communément utilisée dans la pratique de la commande robuste

$$\mathcal{W}_u(s) = \frac{1}{s + \varepsilon} \text{ avec } 0 < \varepsilon \ll 1$$

qui permet de réduire directement la fonction de sensibilité du système de commande en basses fréquences.

Néanmoins, on peut postuler qu'il est toujours possible d'incorporer une action intégrale dans une synthèse  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  à partir d'une structure appropriée du régulateur. Ce postulat peut être illustrée en considérant le système de commande de la figure 10.19, qui décrit un problème de sensibilité mixte  $\mathcal{S}/\mathcal{T}$  pourvu que  $\mathcal{W}_i(s) = -I_{p_v}$ , où la fonction de transfert du régulateur est donnée par

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}_w(s)\mathcal{W}_i(s)$$

Il apparaît clairement qu'un tel régulateur admet une action intégrale pourvu que le paramètre de synthèse  $\mathcal{W}_i(s)$  est spécifié comme suit

$$\mathcal{W}_i(s) = \frac{s + \lambda}{s} I_{p_v} \text{ avec } \lambda > 0$$

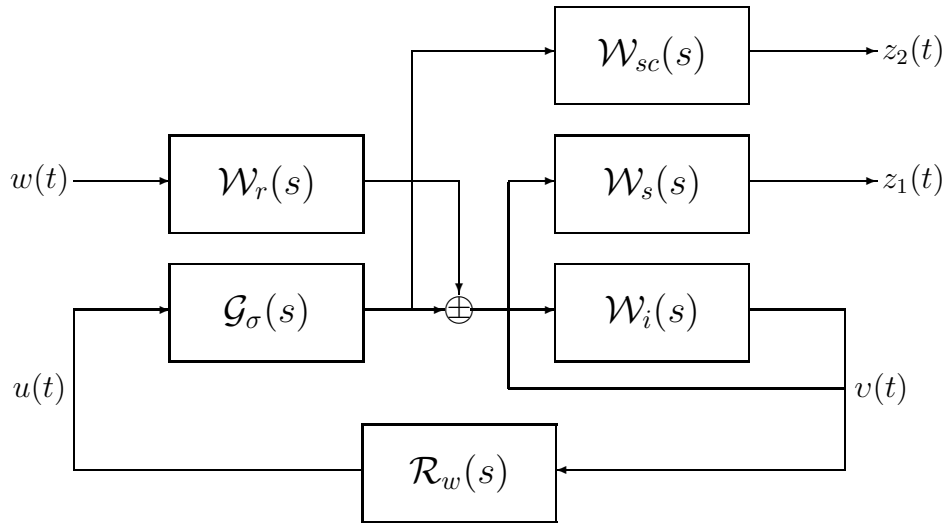


FIGURE 10.13 – Sensibilité mixte  $\mathcal{S}/\mathcal{T}$  avec action intégrale

Le problème d'asservissement peut être formulé sous la forme d'un problème standard défini à partir des variables suivantes

$$w(t) \triangleq \begin{pmatrix} \delta_p(t) \\ \delta_c(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}, v(t) \triangleq \begin{pmatrix} u_r(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix} \text{ et } z(t) \triangleq \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_e(\rho) e(t) \\ \mathcal{W}_2(\rho) u(t) \end{pmatrix} \quad (10.77)$$

dont le modèle de synthèse standard est donné par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_e(s)\mathcal{G}_p(s)\mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{W}_e(s)\mathcal{M}_r(s)\mathcal{W}_c(s) & 0 & -\mathcal{W}_e(s)\mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0 & 0 & 0\mathcal{W}_u(s) & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_r(s)\mathcal{W}_c(s) & 0 & 0 \\ \mathcal{G}_p(s)\mathcal{W}_p(s) & 0 & \mathcal{W}_b(s) & \mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \quad (10.78)$$

On recouvre ainsi le problème d'automatique standard que l'on peut étudier à partir du potentiel fondamental offert par le contexte de synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ , en l'occurrence les résultats 10.5,10.6,10.7, 10.8 et 10.9.

**Asservissements  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ .** Les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  considérées sont réduites à la conception des systèmes de commande avec retour unitaire qui ne sont pas bien appropriés pour des problèmes d'asservissement où les dynamiques de poursuite et de régulation doivent être fondamentalement indépendantes. Néanmoins, le contexte de problème de commande standard est relativement versatile pour formuler convenablement des problèmes d'asservissement qui sont naturellement réalisés par un système de commande à deux degrés de liberté. Ces systèmes de commande se distinguent essentiellement, des systèmes de commande avec retour unitaire, par le fait que les mesures de la sortie et de la séquence de référence entrent séparément dans le bloc du régulateur, comme le montre la figure 10.14.  $\mathcal{G}_\sigma(s)$  (resp.  $\mathcal{G}_p(s)$ ) est la fonction de transfert du modèle du système (resp. des perturbations) et  $\mathcal{R}(s)$  est la fonction de transfert du régulateur.  $\mathcal{W}_d(s)$  (resp.  $\mathcal{W}_b(s)$ ) est la fonction de transfert qui représente le spectre des perturbations (resp. des bruits de mesure) et  $\mathcal{M}_r(s)$  (resp.  $\mathcal{W}_c(s)$ ) est la fonction de transfert qui représente les performances requises en poursuite (resp. le spectre des consignes) et  $\mathcal{W}_e(s)$  (resp.  $\mathcal{W}_u(s)$ ) est la fonction de transfert qui représente le spectre désiré de l'erreur de poursuite de l'asservissement (resp. du signal de commande).

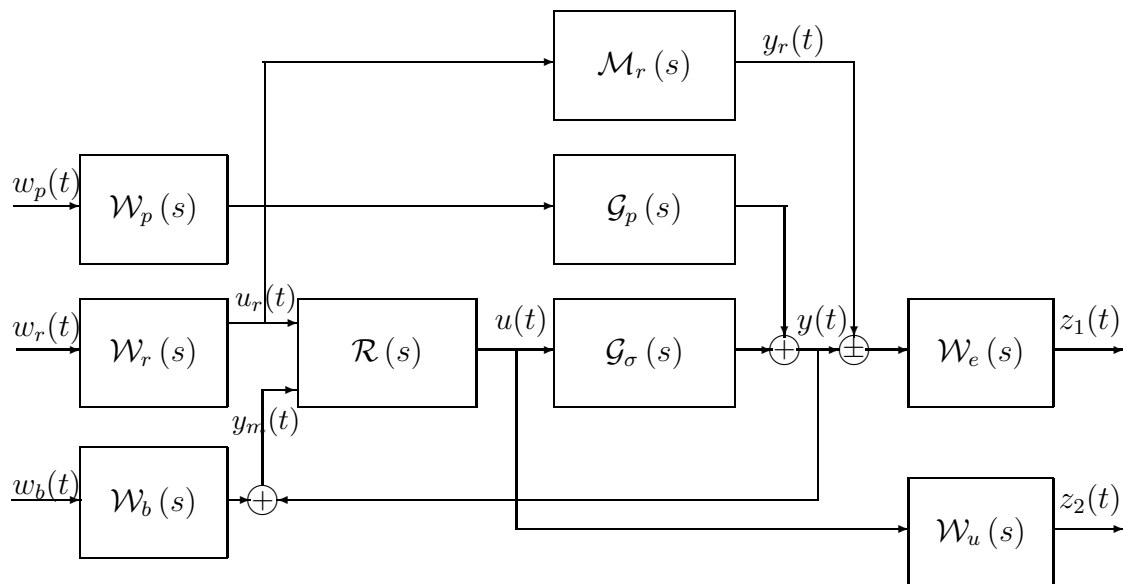


FIGURE 10.14 – Problème d'asservissement standard

Le problème d'asservissement peut être formulé sous la forme d'un problème standard défini à partir des variables suivantes

$$w(t) \triangleq \begin{pmatrix} \delta_p(t) \\ \delta_c(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) \triangleq \begin{pmatrix} u_r(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z(t) \triangleq \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_e(\rho) e(t) \\ \mathcal{W}_2(\rho) u(t) \end{pmatrix} \quad (10.79)$$

dont le modèle de synthèse standard est donné par

$$\mathcal{G}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_e(s)\mathcal{G}_p(s)\mathcal{W}_p(s) & -\mathcal{W}_e(s)\mathcal{M}_r(s)\mathcal{W}_c(s) & 0 & -\mathcal{W}_e(s)\mathcal{G}_\sigma(s) \\ 0 & 0 & 0\mathcal{W}_u(s) & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_r(s)\mathcal{W}_c(s) & 0 & 0 \\ \mathcal{G}_p(s)\mathcal{W}_p(s) & 0 & \mathcal{W}_b(s) & \mathcal{G}_\sigma(s) \end{pmatrix} \quad (10.80)$$

On recouvre ainsi le problème d'automatique standard que l'on peut étudier à partir du potentiel fondamental offert par le contexte de synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ , en l'occurrence les résultats 10.5, 10.6, 10.7, 10.8 et 10.9.

## 10.9 Conclusion

Ce chapitre est un panorama sur les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  qui a été élaboré en adoptant une approche d'état pour la détermination de la classe des régulateurs admissibles réalisant les performances requises. Ce panorama a été conçu comme un complément du chapitre 8 (resp. 9) sur la synthèse  $\mathcal{LQD}$  (resp.  $\mathcal{LQG}$ ) pour le conforter et comme une découverte guidée de la commande robuste à partir d'une lecture ingénieur des célèbres ouvrages pédagogiques en la matière. Rappelons que l'ultime motivation de ce chapitre est de permettre aux (élèves) ingénieurs d'effectuer une lecture agréable de la littérature sur la commande robuste pour participer activement à cette révolution continue des sciences et technologies de l'information.

Une attention particulière a été accordée à la formulation de problème standard et au concept de loop shaping qui constituent l'essence de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , à la vraisemblance entre les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{LQD}$  et aux relations entre les synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_2$ . Les résultats fondamentaux des synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  ont été présentés d'une manière concise sans preuves car elles sont rédigées d'une manière agréable dans les ouvrages pédagogiques. Cette attention est confortée par des remarques pertinentes pour mieux apprécier les conditions de faisabilité d'une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  (resp.  $\mathcal{H}_2$ ).

On envisage de conforter ce chapitre dans une prochaine édition par des résultats fondamentaux sur la robustesse par rapports aux erreurs de modélisation non structurée avec un panorama sur l'approche  $\mathcal{LM}$  et un ensemble d'applications pour une meilleure perception des problématiques de synthèse considérées. En attendant, nous recommandons une lecture attentive des ouvrages [30], [74] et [77].

## 10.10 Problèmes

On propose un ensemble de problèmes qui permettent de réaliser une évaluation active des connaissances acquises sur la commande robuste, allant de la formulation du problème de commande standard à la mise en oeuvre de l'algorithme de commande.

**Problème 10.1** Montrer que le terme  $E + W\Delta W^T$  peut être exprimée sous une forme  $\mathcal{TLF}$  pourvu que la matrice  $E$  soit inversible.

**Problème 10.2** Montrer que le système à rétroaction de la figure 10.15 peut être mis sous la forme  $\mathcal{TLF}$



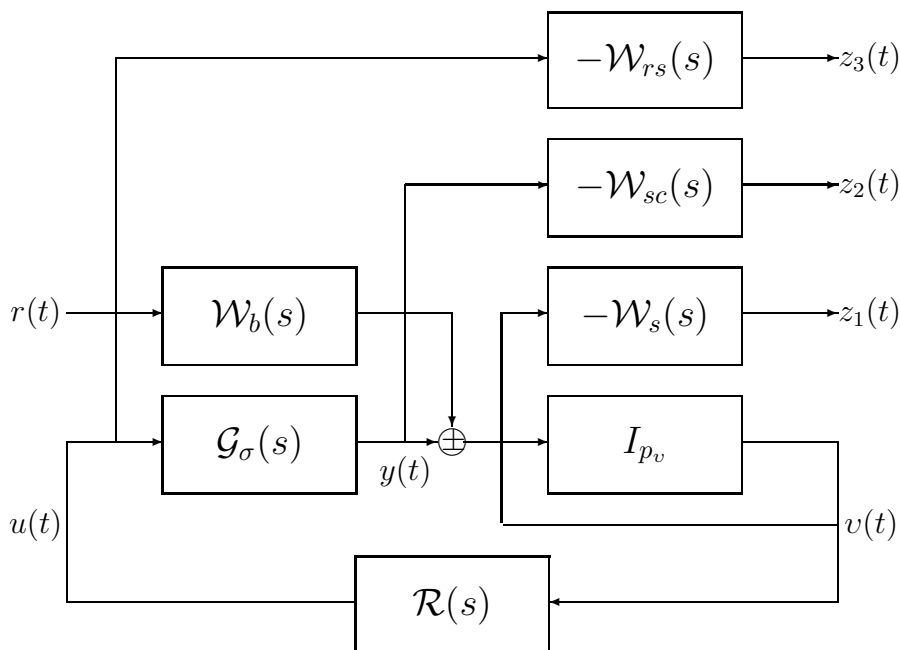


FIGURE 10.15 – Exemple de système à rétroaction

**Problème 10.3** Considérons le système mécanique décrit par l'équation différentielle

$$(A_o \rho^2 + A_1 \rho + A_2) y_m(t) = B_o u(t)$$

où  $A_o, A_1, A_2$  et  $B_o$  sont des matrices réelles de dimensions compatibles. On se propose d'établir une forme  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  de ce système lorsque la matrice  $A_o$  est soumise à une incertitude  $\Delta$ . Pour ce faire, on suggère de procéder comme suit

- 1) Donner un diagramme fonctionnel du système qui fait apparaître l'incertitude  $\Delta$  sur la matrice  $A_o$  d'une manière unique.
- 2) En déduire une forme  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  du système.

**Problème 10.4** Soient  $(F_m, G_m, H_m, E_m)$  et  $(F_p, G_p, H_p, E_p)$  deux réalisations d'état des fonctions de transfert  $\mathcal{M}(s)$  et  $\mathcal{P}(s)$ . Déterminer la réalisation d'état du produit étoilé  $\mathcal{M}(s) \star \mathcal{P}(s)$  pour une partition compatible donnée.

**Problème 10.5** Montrer que l'objectif d'une compensation parfaite des perturbations ramenées en entrée avec une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives inverses en sortie peut être formulé sous un problème standard de sensibilité mixte que l'on précisera.

**Problème 10.6** Montrer que les fonction de sensibilité  $\mathcal{S}_s(s)$ ,  $\mathcal{T}_s(s)$ ,  $\mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$  et  $\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$  peuvent se mettre sous une forme  $\mathcal{T}\mathcal{L}\mathcal{F}$  inférieure  $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}(s), \mathcal{R}(s))$ .

**Problème 10.7** On se propose de montrer que le problème de commande  $\mathcal{LQD}$  est un problème de commande  $\mathcal{H}_2$  particulier conformément au résultat 8.9. Pour ce faire, on suggère de procéder d'une manière progressive comme suit.

- 1) Rappeler d'une manière concise le problème de commande  $\mathcal{LQD}$  et montrer qu'il peut être formulé sous la forme d'un problème de commande standard comme l'indique la figure 10.16.
- 2) Donner une preuve de résultat 8.9.
- 3) Retrouver les équations du régulateur  $\mathcal{LQD}$  à partir du résultat fondamental de synthèse  $\mathcal{H}_2$ .

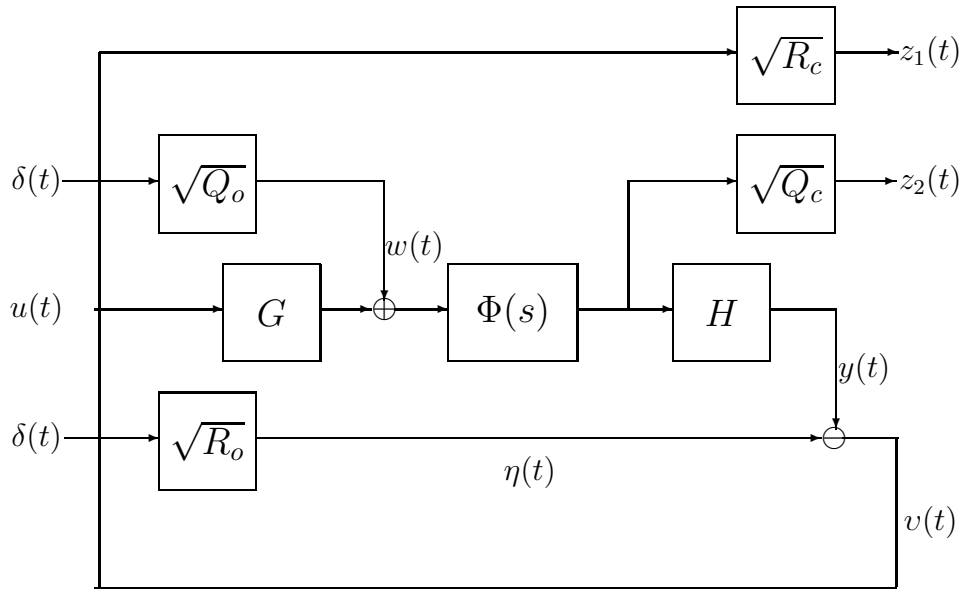


FIGURE 10.16 – Problème  $\mathcal{LQD}$  standard

**Problème 10.8** Considérons le problème de sensibilité mixte  $\mathcal{S}/\mathcal{RS}$  et supposons que les système à commander et les pondérations polynomiales sont décrits par les réalisations d'état minimales données par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & 0 \end{array} \right),$$

$$\mathcal{W}_s(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_{ws} & G_{ws} \\ \hline H_{ws} & E_{ws} \end{array} \right), \mathcal{W}_{rs}(s) = \left( \begin{array}{c|c} F_{wrs} & G_{wrs} \\ \hline H_{wrs} & E_{wrs} \end{array} \right) \text{ et } \mathcal{W}_r(s) = I$$

Montrer que le système standard est donnée par

$$\mathcal{G}(s) = \left( \begin{array}{ccc|cc} F_{ws} & G_{ws}H & 0 & G_{ws} & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & F_{wrs} & 0 & -G_{wrs} \\ \hline H_{ws} & E_{ws}H & 0 & E_{ws} & 0 \\ 0 & 0 & H_{wrs} & 0 & E_{wrs} \\ 0 & H & 0 & I & 0 \end{array} \right) \quad (10.81)$$

On précisera si ce modèle vérifie les hypothèses requises pour une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Problème 10.9** On se propose d'étudier le problème de synthèse d'un système de commande dont le diagramme fonctionnel est donné par la figure 10.17 où  $\{v(t)\}$  et  $\{y_r(t)\}$  désignent respectivement les perturbations et la séquence de référence désirée de la sortie du système.

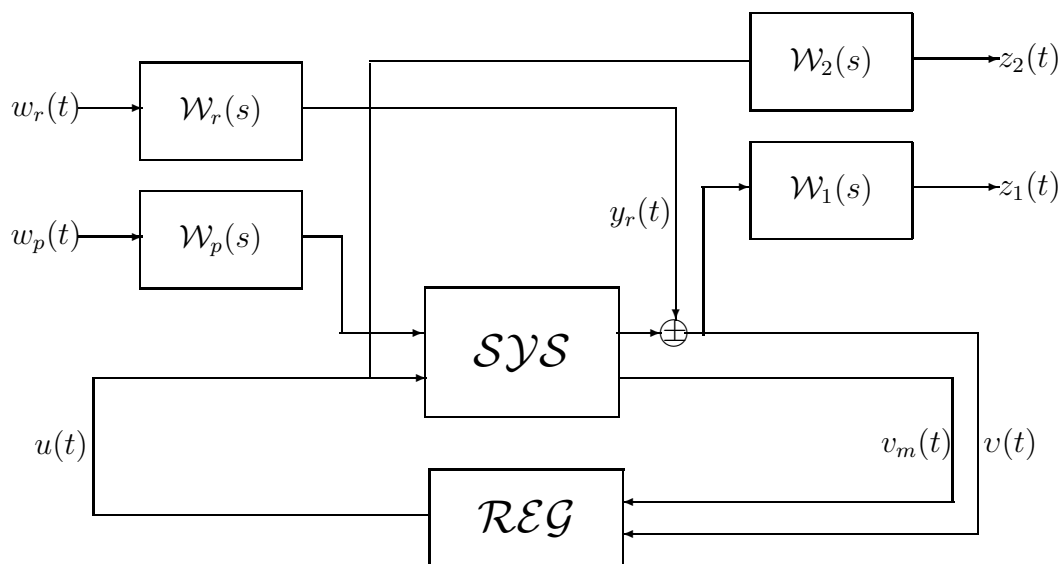


FIGURE 10.17 – Système de commande standard avec des perturbations mesurables

Pour ce faire, on suggère d'adopter une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et de procéder d'une manière progressive comme suit.

- 1) Préciser la connaissance remarquable requise par ce système de commande et les fonctions de transfert du système et du régulateur.
- 2) Préciser les composantes du problème de commande standard sous-jacent tout en motivant le pourquoi des pondérations  $\mathcal{W}_1(s)$  et  $\mathcal{W}_2(s)$  et des modèles générateurs  $\mathcal{W}_p(s)$  et  $\mathcal{W}_r(s)$ .
- 3) Proposer un régulateur réalisant une précision maximale et préciser les hypothèses requises pour la faisabilité de la synthèse.

**Problème 10.10** On se propose d'étudier le problème de synthèse d'un asservissement dont le diagramme fonctionnel est donné par la figure 10.18 où  $\{v(t)\}$  et  $\{y_r(t)\}$  désignent respectivement les perturbations et la séquence de référence désirée de la sortie du système. Pour ce faire, on suggère d'adopter une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et de procéder d'une manière progressive comme suit.

- 1) Préciser la nature du système de commande et les fonctions de transfert du système et du régulateur.
- 2) Préciser les composantes du problème d'asservissement standard sous-jacent tout en motivant le pourquoi des pondérations  $\mathcal{W}_1(s)$  et  $\mathcal{W}_2(s)$  et des modèles générateurs  $\mathcal{W}_p(s)$  et  $\mathcal{W}_b(s)$ .

- 3) Proposer un régulateur réalisant une poursuite admissible et préciser les hypothèses requises pour la faisabilité de la synthèse.

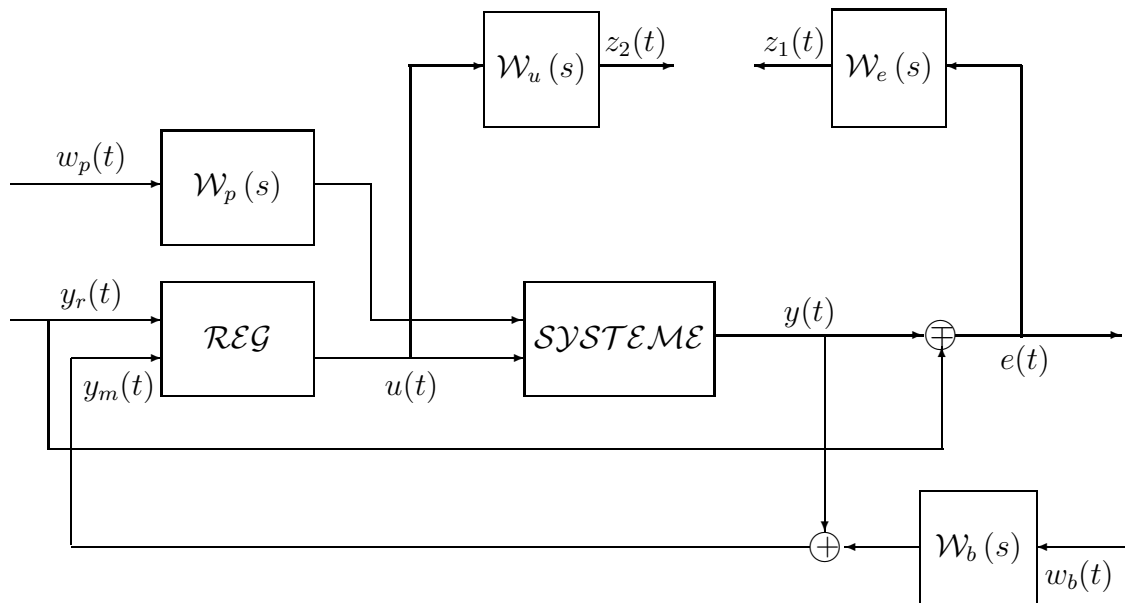


FIGURE 10.18 – Asservissement standard

**Problème 10.11** On se propose de montrer que l'on peut incorporer une action intégrale dans une synthèse  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ , modulo une formulation appropriée du problème de commande en vertu du concept du modèle interne, au travers d'un problème de régulation dans le cas où toutes les perturbations sont du type échelon et peuvent être ramenées en sortie du système. L'ultime motivation du système de commande est de réaliser une compensation parfaite des perturbations avec une séquence de commande admissible par rapport aux contraintes inévitables des actionneurs. Pour ce faire, on suggère d'adopter une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et de procéder d'une manière progressive comme suit.

- 1) Rappeler le concept de modèle interne et préciser la structure du régulateur dans le cas du problème de régulation considéré.
- 2) Montrer que le problème de régulation peut être formulé comme un problème standard de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  à partir du système de commande de la figure 10.19. On motivera toutes les composantes du système de commande par rapport aux performances requises et on précisera comment spécifier les pondérations et le générateur des perturbations.
- 3) Proposer un régulateur réalisant les performances requises.

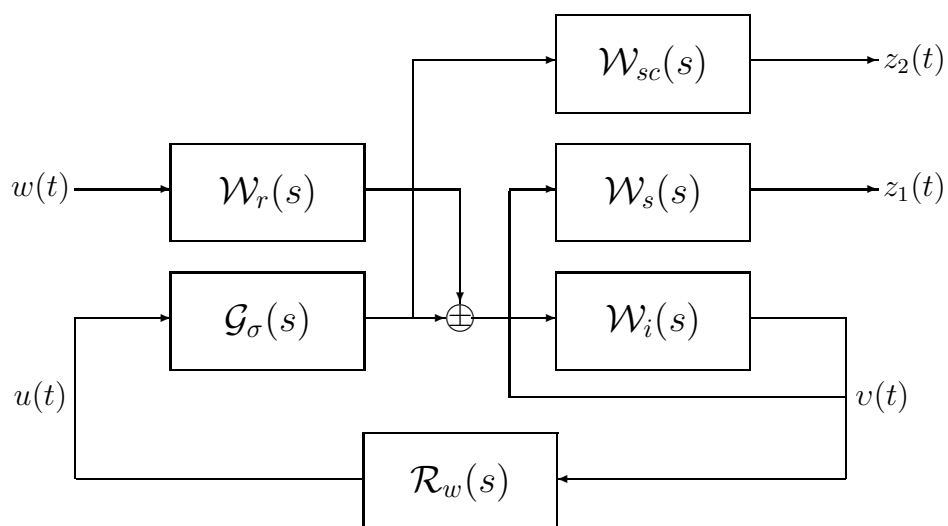


FIGURE 10.19 – Système de commande incorporant une action intégrale



# Chapitre 11

## Conclusion

*L'automatique a atteint un niveau de maturité pour répondre aux exigences d'une ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée comme en témoigne la révolution acharnée et continue des sciences et technologies de l'information et des communications. Des conceptions assistées par ordinateur ont été développées pour réaliser toutes les étapes de la synthèse d'un système de commande, en l'occurrence l'identification d'un modèle de commande et sa validation, la synthèse de régulateurs en fonction des performances requises, l'analyse de la robustesse et des performances du système de commande et la mise en oeuvre du régulateur retenu sur un système embarqué. Elles sont utilisées aussi bien comme une base d'apprentissage de l'automatique que comme des stations de travail pour des ingénieurs soucieux de tirer le meilleur profit de cette discipline de la modélisation, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques que constitue l'automatique. La recherche fondamentale sur la théorie des systèmes a été accompagnée par un développement vigoureux d'une recherche méthodologique essentiellement réalisée dans le cadre de collaborations fructueuses entre les prestigieux centres de recherche en automatique et des centres de développement technologiques dans tous les secteurs industriels. Outre les belles réalisations des activités de recherche en automatique, cette collaboration a permis de former une génération de docteurs ingénieurs capables d'élaborer des méthodologies de synthèse rationnelles et efficaces qui ont favorisé la réalisation de bons compromis performances-robustesse et performances-simplicité.*

*Cet ouvrage est issu d'une laborieuse compilation d'un ensemble de documents pédagogiques qui ont été réalisés pour l'enseignement d'automatique linéaire au sein des Ecoles d'Ingénieurs en exploitant judicieusement les connaissances élémentaires requises pour y accéder. Ces connaissances ont été confortées par une présentation concise et précise des préliminaires mathématiques en guise d'une remise à niveau pour les élèves qui ont été admis sur titre. Ces préliminaires mathématiques sont consacrés aux résultats d'algèbre linéaire qui se sont révélés imposés à la théorie des systèmes. Ces connaissances ne figurent plus dans les programmes des Instituts Universitaires de Technologie dont les lauréats constituent un bon vivier des élèves admis sur titre.*

*Cette judicieuse compilation est essentiellement consacrée aux bases fondamentales des systèmes linéaires en adoptant une approche d'état soutenue par des interprétations fréquentielles et physiques pertinentes qui justifie le titre de l'ouvrage. Les concepts et résultats fondamentaux ont été présentés d'une manière rigoureuse à partir d'une lecture ingénieur des ouvrages pédagogiques rédigés par des enseignants-chercheurs qui ont participé activement aux contributions fondamentales et méthodologiques et leurs réalisations au travers d'un ensemble d'applications industrielles réussies. Outre l'acquisition d'un potentiel de connaissances qui permet d'effec-*

*tuer une lecture agréable de la littérature disponible pour initier une activité de recherche en automatique, il offre une opportunité aux ingénieurs de développer et conforter leur savoir faire en automatique industrielle pour relever les défis d'une ingénierie des systèmes de plus en plus exigeante en matière de performances dynamiques.*

*Chacun des chapitres de cet ouvrage est une synthèse compréhensible sur les contributions fondamentales réalisées pour une problématique particulière des systèmes linéaires, en l'occurrence la représentation, la structure, la stabilité, Les observateurs avec injection de sortie et les systèmes de commande avec retour d'état, la compensation des perturbations et la poursuite parfaite des séquences de référence, les asservissements, la commande linéaire quadratique, l'estimation à variance minimale et la commande robuste. La rédaction de ces chapitres constitue un investissement pédagogique soucieux des exigences de l'ingénierie des systèmes, en l'occurrence une compensation des perturbations (resp. une précision maximale) avec une dynamique de régulation donnée et une robustesse admissible en stabilité par rapport aux erreurs de modélisation inéluctables. Nous énumérons ci-après les aspects d'analyse et de synthèse remarquables qui ont été privilégiés.*

- *Les atouts de la représentation d'état et de la matrice système par rapport aux représentations polynomiales ont été particulièrement mis en exergue avec une attention particulière au passage d'une réalisation d'état aux autres représentations et deux focus sur le problème de réalisation, i.e. le passage d'une fonction de transfert à une réalisation d'état, et la linéarisation des systèmes dynamiques avec une illustration au travers d'un ensemble de systèmes approprié.*
- *Les propriétés structurelles, notamment l'observabilité et la détectabilité (resp. la commandabilité et la stabilisabilité), sont agréablement introduites à partir du concept d'injection de sortie (resp. du concept de commande avec retour d'état) en exploitant judicieusement la pluralité de la représentation d'état, la dualité entre la commande et l'observation des systèmes et les grammians d'observabilité et de commandabilité. Elles conduisent naturellement à une interprétation physique pertinente des modes (resp. des des zéros) d'un système donné à partir des trajectoires d'état du système autonome sous-jacent (resp. la classe des séquences d'entrée qui conduisent à des trajectoires de sortie identiquement nulles).*
- *Le concept de stabilité externe (resp. interne) des systèmes linéaires a été présenté d'une manière progressive à partir de leurs réponse impulsionnelle (resp. matrices de transition) avec un focus sur la vraisemblance (resp. la nuance) entre la stabilité externe (resp. interne) et la stabilité  $\mathcal{EBSB}$ . Les résultats fondamentaux ont été confortés par l'approche de stabilité au sens de Lyapunov pour élaborer des procédures efficaces pour l'analyse de stabilité des systèmes de commande et de convergence des algorithmes d'estimation (d'adaptation) paramétrique. Un panorama sur le concept de passivité a été réalisé pour une meilleure perception des systèmes positifs avec des interprétations physiques pertinentes de la passivité.*
- *Une meilleure perception des concepts de commande avec retour d'état et d'estimation avec injection de sortie et une approche systemique pour l'analyse des systèmes asservis à partir de ses fonctions de sensibilité usuelles qui constituent des quantificateurs de performances nominales et la robustesse en stabilité.*



- *Une contribution à l'ingénierie de la commande  $\mathcal{LQD}$  à partir d'un affinement admissible de la robustesse en stabilité et des performances dynamiques du système de commande sous-jacent. La robustesse en stabilité est particulièrement rehaussée par des pondérations fréquentielle appropriées dont la spécification est réalisée conformément aux résultats fondamentaux sur le  $\mathcal{RTB}$ . L'affinement des performances dynamiques est naturellement réalisée par un assignement des modes du système de commande dans un domaine de stabilité et de performances donnée par  $\mathcal{D}_{sp} \triangleq \{\mu \in \mathbb{C} / \Re(\mu) \leq -\lambda\}$  où le scalaire  $\lambda$  désigne la partie réelle du mode dominant désiré.*
- *Une introduction motivée à la commande robuste à partir du concept du problème standard d'automatique et des résultats fondamentaux disponibles sur les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Une attention particulière est accordée à la formulation du problème standard, au modelage de la fonction de transfert en boucle ouverte et des fonctions de sensibilité usuelles d'un système de commande, à la vraisemblance entre les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{LQD}$  et aux relations entre les synthèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ .*

*L'ultime ambition de cet ouvrage est de montrer que tout élève ingénieur, soucieux du développement des sciences de l'ingénieur, peut acquérir les connaissances intrinsèques au potentiel fondamental de l'automatique linéaire modulo une bonne motivation. Pour ce faire, il suffit de contempler les ingénieuses réalisations industrielles relevant de la théorie des systèmes dans tous les domaines, en l'occurrence la conduite des procédés industriels, la gestion optimale des ressources énergétiques et hydrauliques, la maintenance préventive, la sécurité routière, le pilotage des véhicules, la chirurgie non évasive, les télécommunications ... Il est important de noter que cet ouvrage est nécessaire pour acquérir les bases fondamentales de l'automatique mais il n'est pas suffisant pour s'approprier des compétences requises pour participer aux innovations de l'ingénierie des systèmes. Un investissement supplémentaire est nécessaire pour se forger un savoir faire sous la bénédiction de la culture du travail, notamment*

- ♠ *Lire attentivement les célèbres ouvrages pédagogiques de commande robuste, en l'occurrence [27], [77] et [89]. C'est une belle opportunité pour apprécier les démonstrations élégantes des résultats fondamentaux de ce chapitre et la démarche adoptée pour traiter les exemples d'application.*
- ♠ *Elaborer des méthodologies spécifiques de commande de procédés en exploitant judicieusement toutes les connaissances disponibles sur ces procédés, notamment les modèles disponibles et la nature des erreurs de modélisation qui leurs sont associées et des perturbations qui affectent leur fonctionnement.*
- ♠ *Développer des logiciels efficaces disponibles, e.g. Silab pour ne citer que les logiciels en libre service, pour concevoir un contexte de simulation réaliste par rapport aux problèmes rencontrés dans les applications industrielles.*
- ♠ *Suivre les activités de recherche fondamentales et méthodologiques sur la commande robuste et leurs réalisations au sein des directions des études et de recherche soucieuses de l'ingénierie des systèmes au sein de l'industrie, e.g. AIRBUS, AREVA, AEROSPATIAL, CNES, EDF et PSA pour ne citer que les industriels qui ont été impliqués dans des collaborations fructueuses en automatique avec les laboratoires de recherche en France.*

*Nul homme ne peut vous révéler quoi que ce soit qui ne sommeille déjà dans l'aube de votre connaissance.*

*Le maître qui marche à l'ombre du temple, parmi ses disciples, ne donne pas de sa sagesse mais plutôt de sa foi et sa tendresse.*

*S'il est vraiment sage, il ne vous invitera pas à entrer dans le logis de la sagesse, mais il vous guidera plutôt jusqu'au seuil de votre esprit.*

*L'astronome peut vous parler de sa propre compréhension de l'espace, mais il ne pourrait vous la donner.*

*Le musicien peut vous chanter le rythme qui palpite dans tout espace, mais il ne pourrait vous donner l'oreille qui saisit le rythme, ni la voix qui lui fait écho.*

*Et celui qui est versé dans la science des nombres peut vous parler des confins du mesurable, mais ne saurait vous y conduire.*

*Car la vision d'un homme ne prête pas ses ailes à un autre homme.*

*Et comme chacun de vous se tient seul dans le savoir de Dieu, ainsi chacun de vous doit rester seul dans sa connaissance de Dieu et dans sa compréhension du monde.*

*Le Prophète, Gibran Khalil Gibran*





# Annexe A

## Calcul matriciel

*La théorie des systèmes a été principalement développée à partir du potentiel de l'algèbre linéaire qui est disponible dans d'excellents ouvrages aussi bien d'un point de vue pédagogique et d'un point de vue fondamental. Dans ce chapitre, on présente d'une manière concise tous les aspects algébriques qui se sont avérés vitaux pour le développement de la théorie des systèmes et de l'ingénierie des systèmes à haute valeur ajoutée qui lui est associée. Les définitions sont présentées au moment opportun par rapport aux résultats qui y sont concernés. Les principaux résultats sont particulièrement mis en exergue avec des remarques pertinentes si besoin est. Une attention particulière a été réservée aux outils algébriques des sciences de l'ingénieur, en l'occurrence ceux qui ont été utilisés pour l'analyse de la robustesse en stabilité et en performance des asservissements et de la synthèse des systèmes de commande et de filtrage.*

### A.1 Généralités

*Pour traiter d'une manière unifiée les matrices réelles et complexes, on désignera par  $\mathbb{F}^{n_l \times n_c}$  l'ensemble des matrices de dimension  $n_l \times n_c$  dont les éléments sont des nombres réels, i.e.  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , ou des nombres complexes, i.e.  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Ainsi, une matrice  $M \in \mathbb{F}^{n_l \times n_c}$  est particulièrement représentée à partir de ses éléments indexés  $m_{ij} \in \mathbb{F}$  comme suit*

$$M = [m_{ij}]$$

*où  $i \in [1, n_l]$  et  $j \in [1, n_c]$  sont respectivement l'indice de ligne et l'indice de colonne comme le montre la forme suivante*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n_c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{in_c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n_l 1} & \dots & m_{n_l j} & \dots & m_{n_l n_c} \end{pmatrix}$$

*Les lignes de la matrice  $A$  sont respectivement données par les covecteurs*

$$m_{li} = ( m_{i1} \quad \dots \quad m_{ij} \quad \dots \quad m_{in_c} ) \quad \text{pour } i \in [1, n_l]$$

*alors que les colonnes de la matrice  $A$  sont respectivement données par les vecteurs*

$$m_{cj} = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ pour } j \in [1, n_c]$$

On distingue deux fonctions matricielles propres aux matrices carrées, i.e.  $n_l = n_c = n$ , en l'occurrence la trace et le déterminant.

**La trace d'une matrice** est une fonction, i.e.  $\text{trace} : \mathbb{F}^{n \times n} \mapsto \mathbb{F}$ , définie par

$$\text{trace}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii} \quad (\text{A.1})$$

et vérifie la propriété suivante pour deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{F}^{n \times n}$  et deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{F}$  donnés.

$$\text{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{trace}(A) + \beta \text{trace}(B)$$

**Le déterminant d'une matrice** est une fonction, i.e.  $\det : A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mapsto \det(A) \in \mathbb{F}$ , que l'on évalue par récurrence à partir d'un développement suivant une ligne  $i$  ou une colonne  $j$  de la matrice en utilisant le fait que le déterminant d'une matrice scalaire est égal à ce scalaire, i.e.  $\det(a_{11}) = a_{11}$ . Le développement selon la ligne  $i$  est donné par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

alors que le développement selon la colonne  $j$  est donné par

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad (\text{A.3})$$

$A_{ij} \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}$  est la sous-matrice de  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice  $A$ ,  $\mu_{ij} = \det(A_{ij})$  (resp.  $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ ) est appelé mineur (resp. cofacteur) de l'élément  $a_{ij}$  et la matrice des cofacteurs  $[\gamma_{ij}]$  est appelée comatrice. On notera que la comatrice, que l'on désigne par  $\text{Com}(A)$ , vérifie la propriété usuelle

$$\det(A) I_n = A (\text{Com}(A))^T = (\text{Com}(A))^T A \quad (\text{A.4})$$

qui permet d'en déduire naturellement l'axiome suivant

$$\det(A) \neq 0 \iff A \left( \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T \right) = \left( \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T \right) A = I_n$$

On notera que la notion de mineur n'est pas spécifique aux matrices carrées, elle peut être définie pour des matrices rectangulaires comme suit.

**Les mineurs d'une matrice** ne sont autres que les déterminants de l'ensemble de ses sous-matrices carrées. Plus précisément, on appelle mineur d'ordre  $k$  d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , le déterminant d'une sous-matrice carrée de taille  $k$  obtenue en supprimant  $m - k$  lignes et  $n - k$  colonnes de la matrice  $A$ , ce que l'on peut noter  $A_{I,J}$  où  $I$  (resp.  $J$ ) est une partie de  $k$  éléments de  $\{1, \dots, m$  (resp.  $n$ )}. Par ailleurs, un mineur est dit principal si les parties  $I$  et  $J$  qui lui sont associées sont égales. Et si la partie  $I$  est de la forme  $\{1, \dots, k\}$ , on dira que le mineur principal est dominant.

Par ailleurs, l'ensemble  $\mathbb{F}^n$  est un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{F}$  dans lequel on peut définir un ensemble indexé de  $k$  vecteurs comme suit

$$\mathcal{V}_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{F}^n \text{ avec } k \leq n$$

Cet ensemble permet de définir des notions vitales telles que la génération de sous-espaces, l'indépendance (resp. la dépendance) linéaire, les bases d'un sous-espace et les sous-espaces orthogonaux.

**L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de  $\mathcal{V}_k$**  est donné par

$$\mathcal{G}(\mathcal{V}_k) = \left\{ x \in \mathbb{F}^n / x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$$

La notation  $\mathcal{G}(\mathcal{V}_k)$  est essentiellement motivée par le fait que cet ensemble n'est autre que le sous-espace engendré par les vecteurs de  $\mathcal{V}_k$ . On notera que l'ensemble engendré par les colonnes (resp. les lignes) d'une matrice  $M$  est un sous-espace que l'on désignera par  $\mathcal{C}(M)$  (resp.  $\mathcal{L}(M)$ ).

**Les vecteurs de  $\mathcal{V}_k$  sont linéairement indépendants** si et seulement si la propriété suivante est vérifiée

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \text{ pour } i \in [1, k]$$

Autrement, les vecteurs de  $\mathcal{V}_k$  sont linéairement dépendants.

$\mathcal{V}_k$  est une base du sous-espace  $\mathcal{E}$  si et seulement si les vecteurs de cette base sont linéairement indépendants et engendrent le sous-espace  $\mathcal{E}$ , soit  $\mathcal{E} = \mathcal{G}(\mathcal{V}_k)$ . On notera qu'un sous-espace  $\mathcal{E}$  a une infinité de bases et que toutes ces bases ont le même nombre d'éléments appelé dimension du sous-espace  $\mathcal{E}$  et désigné par  $\dim(\mathcal{E})$ . On notera que

$$\dim(\mathcal{E}) = k \leq n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

**Les vecteurs de  $\mathcal{V}_k$  sont mutuellement orthogonaux** (resp. orthonormaux) si la propriété suivante est vraie

$$v_i^* v_j = 0 \text{ pour tout } i \neq j \left( \text{resp. } v_i^* v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \right)$$

Le complément orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}^n$  est défini comme suit

$$\mathcal{E}^\perp \triangleq \{x \in \mathbb{F} / x^* v = 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{E}\}$$

On en déduit naturellement que pour tout sous-espace  $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}^n$ , on a

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp = \{0\}, \quad \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^\perp = \mathbb{F}^n \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}^\perp)^\perp = \mathcal{E}$$

Et on notera qu'il est toujours possible de compléter une base  $\mathcal{V}_k$  d'un sous-espace  $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}^n$  en vue de former une base  $\mathcal{V}_n$  de  $\mathbb{F}^n$ .

## A.2 Opérations matricielles.

On se focalisera sur cinq opérations matricielles élémentaires, notamment le produit matriciel, le produit et la somme de Kronecker, la transposition et la transconjugaison et l'inversion.

**Le produit matriciel usuel** d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  par une matrice  $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$  est donné par

$$AB = \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right] \in \mathbb{F}^{m \times p}$$

Il requiert que le nombre de lignes de la matrice  $A$  et le nombre de colonnes de la matrice  $B$  soient égaux et peut se récrire comme suit

$$AB = [a_{li} b_{cj}] = \sum_{i=1}^n a_{ci} b_{li}$$

La première égalité est triviale, alors que la seconde égalité découle d'une décomposition des matrices  $A$  et  $B$  comme suit

$$A = \begin{pmatrix} a_{c1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{cn} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} b_{l1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{ln} \end{pmatrix}$$

On notera que le produit matriciel n'est pas une opération commutative, i.e.  $BA \neq AB$ , dans le cas général, et que

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$$

**Transposition et transconjugaison.** La notion de transposition résulte naturellement du produit scalaire. La transposée de la matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  n'est autre que la matrice  $A^T \in \mathbb{F}^{n \times m}$  satisfaisant l'équation

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle \quad \text{pour } (x, y) \in \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$$

On aura alors

$$A = [a_{ij}] \iff A^T = [a_{ji}]$$

Quant à la notion de transconjugaison, elle a été particulièrement introduite dans le cas des



matrices complexes : la transconjugée d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , que l'on notera  $M^* \in \mathbb{F}^{n \times m}$ , est la transposée de la matrice conjuguée de la matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , soit

$$M^* = \overline{M}^T \text{ avec } \overline{M} = [\overline{m}_{ji}]$$

Ces notions permettent d'introduire naturellement les classes de matrices symétriques, antisymétriques, hermitiennes et antihermitiennes.

- Une matrice  $M \in \mathbb{F}^{n \times n}$  est dite symétrique (resp. antisymétrique) si elle est égale à sa transposée, soit  $M^T = M$  (resp. si elle est égale à l'opposée de sa transposée, soit  $M^T = -M$ ).
- Une matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est dite hermitienne (resp. antihermitienne) si elle est égale à sa transconjugée, soit  $M^* = M$  (resp. si elle est égale à l'opposée de sa transconjugée, soit  $M^* = -M$ ).

Par ailleurs, on distingue quatre axiomes de la transconjugaison que l'on peut vérifier aisément.

$$A1. (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$A2. (A^*)^T = (A^T)^* = \overline{A}$$

$$A3. (A^*)^T = (A^T)^* = \overline{A}$$

$$A4. (AB)^* = B^*A^*$$

$$A5. \text{trace}(A^*) = \overline{\text{trace}(A)}$$

**Le produit de Kronecker** d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  par une matrice  $B \in \mathbb{F}^{p \times q}$  est donnée par

$$A \otimes B \triangleq \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1j}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}B & \dots & a_{ij}B & \dots & a_{in}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mj}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mp \times nq} \quad (A.5)$$

**La somme de Kronecker** de deux matrices carrés  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$  est définie à partir du produit de Kronecker comme suit

$$A \oplus B \triangleq (A \otimes I_m) + (I_n \otimes B) \in \mathbb{C}^{nm \times nm} \quad (A.6)$$

On distingue quatre axiomes remarquables du produit de Kronecker pour des matrices  $A, B, C$  et  $D$  de dimensions appropriées et un scalaire  $\alpha$ .

$$A1. (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

$$A2. A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$\mathcal{A}3. (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

$$\mathcal{A}4. (A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$

Outre le fait de généraliser la multiplication par un scalaire donné qui en toute rigueur doit s'écrire

$$\alpha A = \alpha \otimes A$$

le produit de Kronecker est particulièrement utilisé pour transformer une équation linéaire matricielle en un système d'équations linéaires comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat A.1** Soient trois matrices  $A \in \mathbb{F}^{k \times m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$  et  $C \in \mathbb{F}^{k \times p}$ , l'équation linéaire matricielle

$$AXB = C \tag{A.7}$$

où  $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$  est l'inconnue. Cette équation est équivalente au système d'équations linéaires

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C) \tag{A.8}$$

où  $\text{vec}(X)$  et  $\text{vec}(C)$  désignent les vecteurs formés en enfilant respectivement les colonnes des matrices  $X$  et  $C$ , soit

$$\text{vec}(X) = \begin{pmatrix} x_{c1} \\ \vdots \\ x_{cj} \\ \vdots \\ x_{cn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn} \text{ et } \text{vec}(C) = \begin{pmatrix} c_{c1} \\ \vdots \\ c_{cj} \\ \vdots \\ c_{cn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{kp} \tag{A.9}$$

**Preuve.** On notera d'abord que

$$C = AXB = AX \begin{pmatrix} AXb_1 & \dots & AXb_j & \dots & AXb_p \end{pmatrix}$$

où  $b_j \in \mathbb{F}^n$  désigne la  $j$ ème colonne de la matrice  $B$ . La  $j$ ème colonne de la matrice  $C$  est alors donnée par

$$c_j = AXb_j = A(Xb_j) = A \left( \sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n b_{ij} Ax_i$$

soit

$$c_j = \begin{pmatrix} b_{1j}A & \dots & b_{ij}A & \dots & b_{nj}A \end{pmatrix} \text{cov}(X)$$

Et si l'on empile les colonnes de la matrice  $C$ , on trouve bien

$$\text{vec}(C) = \text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A) \text{vec}(X)$$

**Inversion.** Une matrice carrée  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  admet une inverse, que l'on désignera par  $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , si la propriété suivante est vraie

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

On dispose de deux axiomes remarquables qui permettent de simplifier le calcul en supposant que les inverses requises existent.

$$A1. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A2. (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Par ailleurs, le concept d'inversion permet d'introduire plusieurs types de matrices carrées issus du concept d'inversion, en l'occurrence

- Une matrice carrée est régulière si elle est inversible. Autrement, elle est singulière.
- Une matrice carrée  $A$  est orthogonale ou unitaire si  $A^{-1} = A^*$ , soit  $A^*A = AA^* = I_n$ .
- Une matrice carrée  $A$  est involutive si  $A^{-1} = A$ , soit  $A^2 = I_n$ .

**Remarque A.1** Le calcul de l'inverse d'une matrice peut être effectué en utilisant la propriété (A.4) de la comatrice, soit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left( \text{Com}(A) \right)^T$$

On retrouve alors le fait qu'une matrice carrée est régulière si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

### A.3 Déterminants et lemmes d'inversion.

Considérons les matrices carrées constituées par quatre blocs  $A = \{A_{ij}\}_{(i,j) \in [1,2] \times [1,2]}$  où  $A_{11}$  et  $A_{22}$  sont des matrices carrées, on peut en déduire naturellement les deux faits suivants.

*F1.* Si  $A_{11}$  est régulière, alors la matrice  $A$  peut être décomposée comme suit

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec

$$\Delta_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

et on peut conclure que la matrice  $A$  est régulière si et seulement si la matrice  $\Delta_{11}$  est régulière. Dans ce dernier cas, l'inverse de la matrice  $A$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\Delta_{11}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\Delta_{11}^{-1} \\ -\Delta_{11}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \Delta_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

*F2. Si  $A_{22}$  est régulière, alors la matrice  $A$  peut être décomposée comme suit*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{22} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix}$$

avec

$$\Delta_{22} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

*et on peut conclure que la matrice  $A$  est régulière si et seulement si la matrice  $\Delta_{22}$  est régulière. Dans ce dernier cas, l'inverse de la matrice  $A$  est donnée par*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{22}^{-1} & -\Delta_{22}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\Delta_{22}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\Delta_{22}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

*La matrice  $\Delta_{11}$  (resp.  $\Delta_{22}$ ) est appelée le complément de Schur de la matrice  $A_{11}$  (resp.  $A_{22}$ ) dans la matrice  $A$ .*

*Ces faits constituent l'essence de deux ensembles de résultats. Le premier ensemble est constitué de trois résultats sur le calcul des déterminants des matrices partitionnées.*

**Résultat A.2** *Soit  $A$  une matrice carrée de dimension  $n + m$  que l'on peut partitionner comme suit*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

*où  $A_{11}$  et  $A_{22}$  sont des matrices carrées de dimensions respectives  $n$  et  $m$ , alors on a*

$$\det(A_{11}) \neq 0 \implies \det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

et

$$\det(A_{22}) \neq 0 \implies \det(A) = \det(A_{22}) \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$$

**Résultat A.3** *Soient deux matrices  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , on a*

$$\det \begin{pmatrix} I_m & B \\ -A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + AB) = \det(I_m + BA)$$

**Résultat A.4** *Soient des matrices  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$  et  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , alors on aura*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

*On notera que les résultats A.3 et A.4 ont été naturellement obtenus à partir du résultat A.2.*

*Le deuxième ensemble de résultats est consacré aux lemmes d'inversion matriciel communément utilisés dans la théorie des systèmes.*

**Résultat A.5** Soient deux matrices  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  telles que les matrices  $(I_n + AB)$  et  $(I_m + BA)$  sont régulières. Alors l'identité usuelle

$$(I_n + AB)^{-1} A = A (I_m + BA)^{-1}$$

est toujours vérifiée.

**Résultat A.6** Soient  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{F}^{m \times m}$  et  $D \in \mathbb{F}^{m \times n}$  des matrices complexes et supposons que  $A$  et  $C$  sont régulières, alors l'identité usuelle

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B (DA^{-1}B + C^{-1})^{-1} DA^{-1}$$

est toujours vérifiée.

## A.4 Transformation linéaire.

Soit une transformation  $T : x \in \mathbb{F}^n \mapsto T(x) \in \mathbb{F}^m$  et  $\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $\mathcal{B}_m = \{v_1, \dots, v_m\}$  deux bases de  $\mathbb{F}^n$  et  $\mathbb{F}^m$ . Alors on peut exprimer les vecteurs  $x$  et  $T(x)$  à partir de leur coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{B}_m$  comme suit

$$[x]_{\mathcal{B}_n} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad [y]_{\mathcal{B}_m} = T(x) = \sum_{i=1}^n y_i v_i$$

Et si  $T$  est une transformation linéaire, on aura

$$T(x) = T \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i)$$

Ainsi une transformation linéaire est complètement caractérisée par l'image de la base  $\mathcal{B}_n$  sous-jacente, soit

$$T(\mathcal{B}_n) = \{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$$

que l'on peut exprimer dans la base  $\mathcal{B}_m$  sous la forme

$$T(e_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} v_k \quad \text{pour } i \in [1, n]$$

On aura donc

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{k=1}^m a_{ki} v_k \right) = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right) v_k = \sum_{k=1}^m y_k v_k$$

soit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il apparaît clairement qu'une transformation linéaire est essentiellement une transformation matricielle  $x \mapsto y = Ax$  où  $A$  est une matrice dont les colonnes sont constituées par les vecteurs de l'image de la matrice  $A$ , soit

$$A = [a_{ij}] = ( T(e_1) \quad \dots \quad T(e_j) \quad \dots \quad T(e_n) )$$

Cette transformation matricielle peut être judicieusement interprétée comme une application linéaire  $A : \mathbb{F}^n \mapsto \mathbb{F}^m$  à laquelle on peut associer deux sous-espaces vectoriels. Le premier sous-espace est le noyau de la matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , que l'on note  $\mathcal{N}(A)$ , défini par

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n / Ax = 0\} \subset \mathbb{F}^n$$

Cette définition montre clairement que le noyau d'une matrice peut être interprété comme le sous-espace orthogonal à ses lignes. Le second sous-espace est l'image de la matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , que l'on note  $\mathcal{I}(A)$ , définie par

$$\mathcal{I}(A) = \{y \in \mathbb{F}^m / y = Ax \text{ avec } x \in \mathbb{F}^n\} \subset \mathbb{F}^m$$

Cette définition permet de postuler que l'image d'une matrice n'est autre que le sous-espace engendré par ses colonnes. Par ailleurs, on peut en déduire aisément que les dimensions des sous-espaces  $\mathcal{N}(A)$  et  $\mathcal{I}(A)$  vérifient les propriétés suivantes

$$\mathcal{P}1. \dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{I}(A)) = n$$

et

$$\mathcal{P}2. \dim(\mathcal{I}(A)) = \dim((\mathcal{N}(A))^\perp)$$

Et compte tenu de ces propriétés, on peut associer deux nombres à une matrice donnée  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , en l'occurrence le rang en colonnes et le rang en lignes respectivement donnés par

$$\text{rang}_c(A) = \dim(\mathcal{I}(A))$$

et

$$\text{rang}_l(A) = n - \dim(\mathcal{N}(A)) = \dim(\mathcal{I}(A^*))$$

On notera que  $\text{rang}_c(A)$  est le nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $A$ , alors  $\text{rang}_l(A)$  est le nombre de ses lignes linéairement indépendantes. Et compte tenu du fait que le nombre de colonnes indépendantes d'une matrice est égal au nombre de ses lignes indépendantes, i.e.  $\text{rang}_l(A) = \text{rang}_c(A)$ , on peut définir **le rang d'une matrice**, que l'on notera  $\text{rang}(A)$ , comme le nombre maximal de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes que l'on peut extraire de cette matrice, soit

$$\text{rang}(A) = \dim(\mathcal{I}(A)) = \dim(\mathcal{N}(A^*))$$

On distingue quatre propriétés fondamentales du rang d'une matrice qui sont satisfaites pour toutes les matrices  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$  et deux matrices régulières  $R_d \in \mathbb{F}^{n \times n}$  et  $R_g \in \mathbb{F}^{m \times m}$ .

$$\mathcal{P}1. \text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n \leq \text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$$

$$\mathcal{P}2. \text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$$

$$\mathcal{P}3. \text{rang}(A^*) = \text{rang}(A)$$

$$\mathcal{P}4. \text{rang}(AA^*) = \text{rang}(A^*A)$$

$$\mathcal{P}5. \text{rang}(AR_d) = \text{rang}(R_gA) = \text{rang}(A)$$

Les propositions suivantes donnent respectivement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une application linéaire  $A : \mathbb{F}^n \mapsto \mathbb{F}^m$  soit injective, i.e. tout élément de  $\mathbb{F}^m$  est l'image d'au plus un élément de  $\mathbb{F}^n$ , ou surjective, i.e. chaque élément de  $\mathbb{F}^m$  est l'image d'au moins un élément de  $\mathbb{F}^n$ .

$\mathcal{P}1.$   $A$  est une application injective si et seulement si les colonnes de la matrice  $A$  sont linéairement indépendantes, soit  $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ .

$\mathcal{P}2.$   $A$  est une application surjective si et seulement si les colonnes de la matrice  $A$  engendrent l'ensemble  $\mathbb{F}^m$ , soit  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{F}^m$ .

Le concept de transformation linéaire permet d'introduire naturellement la notion de **sous-espace invariant** par un endomorphisme  $A : \mathbb{F}^n \mapsto \mathbb{F}^n$  : Un sous-espace  $\mathcal{E}$  est dit invariant par rapport à une application linéaire  $A : \mathbb{F}^n \mapsto \mathbb{F}^n$  si son image par cette application est une partie de lui-même, soit

$$A(S) \subset S \iff Ax \in \mathcal{E} \text{ pour tout } x \in \mathcal{E}$$

Par ailleurs, la pluralité du concept de base conduit naturellement à la question de passage d'une base à une autre. Pour mieux apprécier la problématique sous-jacente, considérons deux bases  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{F}^n$ . Tout vecteur  $x \in \mathbb{F}^n$  peut être exprimé à partir de **ses coordonnées** aussi bien dans la base  $\mathcal{B}$  que dans la base  $\overline{\mathcal{B}}$  comme suit

$$[x]_{\mathcal{B}} = \sum_{k=1}^n x_k e_k \text{ et } [x]_{\overline{\mathcal{B}}} = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{e}_i$$

Et comme chaque vecteur de la base  $\mathcal{B}$  peut s'exprimer à partir de ses coordonnées dans la base  $\overline{\mathcal{B}}$  comme suit

$$[e_k]_{\overline{\mathcal{B}}} = \sum_{i=1}^n p_{ik} \overline{e}_i$$

on peut élaborer aisément la relation entre les coordonnées du vecteur  $x$  dans les deux bases, soit

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_i \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ainsi le passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\overline{\mathcal{B}}$  est réalisé par une transformation linéaire caractérisée par la matrice  $P = [p_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$  dont les colonnes sont constituées par les coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\overline{\mathcal{B}}$ . Pour mieux apprécier les choses, on peut exprimer la relation de passage d'une base à une autre comme suit

$$[x]_{\overline{\mathcal{B}}} = [P]_{\mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}} [x]_{\mathcal{B}}$$

Il est important de noter que la matrice de passage est régulière par construction compte tenu des propriétés d'une base.

## A.5 Equivalence et similitude.

Les concepts d'équivalence et de similitude ont été particulièrement utilisés pour simplifier l'analyse et la synthèse des systèmes.

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  sont deux matrices équivalentes s'il existent deux matrices régulières  $T_a \in \mathbb{F}^{m \times m}$  et  $T_b \in \mathbb{F}^{n \times n}$  telles que

$$B = T_a A T_b$$

Les deux matrices sont dites semblables si  $T_a = T_b^{-1}$ , soit il existe une matrice  $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$  telle que

$$B = T A T_b$$

On distingue deux formes remarquables d'une matrice donnée. La première est la forme de Smith, que l'on désignera par  $S$ , qui découle du résultat suivant

**Résultat A.7** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang  $r$ , il existe deux matrices régulières  $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$  et  $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$  telles que

$$A = P S Q \text{ avec } S = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi toute matrice est équivalente à sa forme de Smith  $S$ .

La seconde est la forme de Schur, que l'on désigne par  $H$ , qui est issue du résultat suivant.

**Résultat A.8** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , il existe une matrice unitaire  $U \in \mathbb{F}^{m \times m}$  et une matrice triangulaire supérieure  $H \in \mathbb{F}^{m \times m}$  tel que

$$A = U H U^* \text{ avec } H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1m} \\ 0 & H_{22} & \dots & H_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & H_{mm} \end{pmatrix}$$

où les  $H_{ii}$  pour  $i \in [1, m]$  sont soit des blocs réels de dimension  $1 \times 1$  ou des blocs réels de dimension  $2 \times 2$  avec des valeurs propres complexes. Ainsi toute matrice est semblable à sa forme de Schur réelle  $H$ .

On notera que la décomposition de Smith de la matrice  $A$  peut se récrire sous la forme

$$A = P S Q = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = \left( P \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left( (I_r \ 0) Q \right)$$

ou d'une manière équivalente

$$A = F G \text{ avec } F = P \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } G = (I_r \ 0) Q$$

Et compte tenu du fait que  $F^* A G^* = F^* F G G^* = (F^* F) (G G^*)$ , on en déduit naturellement que la matrice  $F^* A G^* \in \mathbb{F}^{r \times r}$  est de rang plein. Cette propriété justifie l'appellation de factorisation de rang maximal  $A = F G$  qui a été particulièrement introduite à partir du résultat suivant.



**Résultat A.9** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang  $r$ , il existent deux matrices  $F \in \mathbb{F}^{m \times r}$  et  $R \in \mathbb{F}^{r \times n}$  de rang plein telles que

$$A = FG$$

## A.6 Valeurs propres et valeurs singulières.

Les valeurs propres d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  sont les scalaires qui vérifient son équation caractéristique, soit

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

L'équation caractéristique admet  $n$  racines qui constituent le spectre de la matrice  $A$ , soit

$$\mathcal{V}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \text{ avec } \det(\lambda_i I_n - A) = 0 \text{ pour } i \in [1, n]$$

Le **rayon spectral** d'une matrice est la plus grande valeur prise par les modules de ses valeurs propres, i.e.

$$\rho(A) = \max_{i \in [1, n]} |\lambda_i(A)|$$

Les valeurs propres d'une matrice  $A$  sont liées aux directions invariantes par la transformation linéaire associée à cette matrice. A chaque valeur propre  $\lambda_i$ , il correspond un vecteur propre à droite  $v_{di}$  et un vecteur propre à gauche  $v_{gi}$  respectivement définis par

$$Av_{di} = \lambda_i v_{di} \text{ et } v_{gi}^T A = \lambda_i v_{gi}^T$$

On distingue cinq propriétés spectrales qui permettent de calculer aisément les valeurs propres des matrices pour toute matrice régulière  $T$ .

$$\mathcal{P1.} \quad \mathcal{V}(A^*) = \mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(TAT^{-1})$$

$$\mathcal{P2.} \quad \text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) \text{ et } \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A)$$

$$\mathcal{P3.} \quad \lambda_i(\alpha A^k) = \alpha (\lambda_i(A))^k \text{ pour } i \in [1, n]$$

$$\mathcal{P4.} \quad \lambda_i(A + \alpha I_n) = \lambda_i(A) + \alpha \text{ pour } i \in [1, n]$$

$$\mathcal{P5.} \quad \mathcal{V}(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1(A)}, \frac{1}{\lambda_2(A)}, \dots, \frac{1}{\lambda_n(A)} \right\}$$

Les deux résultats fondamentaux suivants constituent l'essence de la factorisation spectrale d'une matrice. Le premier résultat est le théorème de Cayley-Hamilton

**Résultat A.10** Toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  est une solution de sa propre équation caractéristique, soit

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n = 0$$

On aura donc

$$A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} A^k$$

Le second résultat concerne la décomposition spectrale d'une matrice dans le cas général, i.e. des valeurs propres multiples dans  $\mathbb{F}$ .

**Résultat A.11** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , il existe une matrice régulière  $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$  et une matrice bloc diagonale  $J \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tel que

$$T^{-1}AT = J = \text{diag} \{ J_1, J_2, \dots, J_\ell \}$$

avec

$$J_i = \text{diag} \{ J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{ik_i} \}$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

où les matrices  $J_{ij} \in \mathbb{F}^{n_{ij} \times n_{ij}}$  désignent les blocs de Jordan associés à la valeur propre  $\lambda_i$  d'ordre de multiplicité  $m_i$ , on a alors

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n \text{ avec } m_i = \sum_{j=1}^{k_i} n_{ij}$$

**Remarque A.2** La matrice de transformation  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est particulièrement donnée par

$$T = [ T_1 \quad \dots \quad T_i \quad \dots \quad T_\ell ]$$

avec

$$T_i = [ T_{i1} \quad \dots, T_{ij} \quad \dots \quad T_{ik_i} ]$$

$$T_{ij} = [ T_{ij1} \quad \dots \quad T_{ijk} \quad \dots \quad T_{ijk_i} ]$$

où  $T_{ij1}$  pour  $(i, j) \in [1, \ell] \times [1, k_i]$  et  $T_{ijk}$  pour  $(i, j, k) \in [1, \ell] \times [1, k_i] \times [2, n_{ij}]$  sont respectivement les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés associés à la valeur propre  $\lambda_i$ . Ils sont donnés par les équations linéaires

$$AT_{ij1} = \lambda_i T_{ij1}$$

et

$$(A - \lambda_i I_n) T_{ijk} = T_{ij(k-1)} \text{ pour } k \in [2, n_{ij}]$$

Les deux définitions usuelles suivantes sont spécifiques aux cas des valeurs propres multiples.

- Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de multiplicité  $m \leq n$ , tout vecteur non nul  $v$  satisfaisant la propriété

$$(A - \lambda I)v = 0 \text{ pour tout } k \in [1, n]$$

est dit vecteur propre généralisé de la matrice  $A$ .

- Une valeur propre multiple  $\lambda_i$  est dite non défective si la matrice  $J_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$  qui lui est associé est diagonale, soit

$$J_i = \lambda_i I_{m_i} \implies n_{ij} = 1 \text{ pour tout } (i, j) \in [1, \ell] \times [1, k_i]$$

En d'autres termes, il lui correspond exactement  $m_i$  vecteurs propres.

- Une matrice est dite cyclique si les matrices  $J_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ , associées aux différentes valeurs propres  $\lambda_i$  pour  $i \in [1, \ell]$ , qui constituent sa forme de Jordan sont des blocs de Jordan, soit

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$$

Compte tenu du résultat relatif à la décomposition spectrale d'une matrice, l'assertion suivante est vraie

$$\left( A \text{ est une matrice cyclique} \right) \iff \left( k_i = 1 \text{ pour tout } i \in [1, \ell] \right)$$

Rappelons que  $k_i$  désigne le nombre de blocs de Jordan associés à la valeur propre  $\lambda_i$  d'ordre de multiplicité  $m_i$ .

**Remarque A.3** Un sous-espace  $A$  invariant est essentiellement un sous-espace propre de la matrice  $A$ . En effet, considérons un sous-espace  $\mathcal{E} \neq \{0\}$ , alors la proposition suivante est vraie

$$\mathcal{E} \text{ est un sous-espace invariant} \implies \text{il existe } v \in \mathcal{E} \text{ et } \lambda \in \mathbb{F} / Av = \lambda v$$

On distingue  $\mathcal{E}_1 = \{v\}$  et  $\mathcal{E}_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  deux sous-espaces propres respectivement constitués d'un vecteur propre associé à une valeur propre simple  $\lambda$  et du vecteur propre et vecteurs propres généralisés associés à une valeur propre multiple  $\mu$  d'ordre de multiplicité  $m$ , on aura

$$Av = \lambda v \text{ et } Av_i = \mu v_i + v_{i-1} \text{ pour } i \in [1, m] \text{ avec } v_0 = 0$$

Par ailleurs,  $\mathcal{E}_k = \{v_i \text{ pour tout } i \in [1, k] \text{ avec } k \leq m\}$  est un sous-espace  $A$  invariant, alors que  $\mathcal{E}_k^j = \{v_i \text{ pour tout } i \in [1, j-1] \cup [j+1, k] \text{ avec } k \leq m\}$  n'est pas un sous-espace  $A$  invariant.

**Remarque A.4** Si les valeurs propres de la matrice  $A$  sont distinctes, alors la matrice  $J$  n'est autre que la matrice diagonale  $\Lambda = \text{diag} \{\lambda_i\}$  et les matrices  $T$  et  $T^{-1}$  sont particulièrement données par

$$T = ( V_1 \quad \dots \quad V_i \quad \dots \quad V_n ) \quad \text{et} \quad T^{-1} = ( W_1 \quad \dots \quad W_i \quad \dots \quad W_n )^T$$

où  $V_i$  et  $W_i$  sont respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche associés à la valeur propre  $\lambda_i$ . On notera que la matrice  $J$  pourrait être diagonale même dans le cas où les valeurs propres ne sont pas simples, e.g. le cas où  $A$  est une matrice hermitienne.

Le résultat suivant permet de mieux percevoir le cas des valeurs propres complexes multiples.

**Résultat A.12** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  telle que

$$\mathcal{V}(A) = \{\alpha_1 + j\beta_1, \alpha_1 + j\beta_1, \dots, \alpha_n + j\beta_n, \alpha_n + j\beta_n\} \subset \mathbb{C}$$

où  $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , il existe une matrice régulière  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  telle que la propriétés suivante est satisfaite

$$A = PWP^{-1} + PNP^{-1} \quad \text{avec} \quad W = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \right\}$$

où  $N$  est une matrice nilpotente d'ordre  $k \leq 2n$  qui commute avec la matrice  $W$ .

Avant de présenter les résultats basés sur les valeurs singulières, rappelons que les valeurs singulières d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $A^*A$  si  $m > n$  ou de la matrice  $AA^*$  si  $n \leq m$ . Ainsi une matrice de rang  $r$  admet  $r$  valeurs singulières positives qui sont généralement notées  $\sigma_i(A)$  et ordonnées dans le sens décroissant. On aura alors

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$$

et

$$\sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_r(A) = \sigma_{\min}(A) > 0$$

Le résultat suivant donne une décomposition en valeurs singulières d'une matrice complexe.

**Résultat A.13** Toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang  $r \leq \ell \triangleq \min(p, m)$  peut être décomposée en valeurs singulières comme suit

$$A = V\Sigma W^* \quad \text{avec} \quad \Sigma = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Sigma_\ell \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } p \geq m \\ \begin{pmatrix} \Sigma_\ell & 0 \end{pmatrix} & \text{si } p < m \end{cases}$$

où  $\Sigma_\ell \in \mathbb{F}^{\ell \times \ell}$  est une matrice diagonale composée des valeurs singulières de la matrice  $A$ , soit

$$\Sigma_\ell = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_\ell) \quad \text{avec} \quad \sigma_i = 0 \quad \text{pour } i > r$$

et  $V \in \mathbb{F}^{p \times p}$  et  $W \in \mathbb{F}^{m \times m}$  sont des matrices unitaires satisfaisant les propriétés suivantes

$$AU = Y\Sigma \quad \text{et} \quad A^*Y = U\Sigma^*$$

**Remarque A.5** Posons  $W \triangleq (w_1 \dots w_i \dots w_m)$  et  $V \triangleq (v_1 \dots v_i \dots v_p)$ , on peut vérifier aisément que les relations suivantes sont vraies

$$Aw_i = \sigma_i v_i \text{ et } A^* v_i = \sigma_i w_i$$

et donc

$$A^* A w_i = \sigma_i^2 w_i \text{ et } A A^* v_i = \sigma_i^2 v_i$$

Ainsi, les vecteurs  $\{w_i\}_{i \in [1, m]}$  (resp.  $\{v_i\}_{i \in [1, p]}$ ) forment une des bases orthonormales de  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ) à partir des vecteurs propres de la matrice  $A^* A$  (resp.  $A A^*$ ) associés aux valeurs propres  $\{\sigma_i^2\}_{i \in [1, \ell]}$ ; ils constituent les vecteurs singuliers en entrée (resp. en sortie) de la matrice  $A$ .

**Remarque A.6** Les valeurs singulières d'une matrice contiennent une information métrique sur la transformation linéaire sous-jacente. En effet, la boule unité est transformée en un ellipsoïde dont les longueurs des axes principaux sont égales au double des valeurs singulières de la matrice de transformation, soit

$$\mathcal{E} = \{y \in \mathbb{F}^p / y = Ax \text{ avec } x \in \mathbb{F}^m / \|x\| = 1\}$$

Cette information métrique sera particulièrement mise en exergue à la fin du paragraphe sur les normes.

## A.7 Exponentielle d'une matrice

L'exponentielle d'une matrice est définie naturellement à partir de la série convergente

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Elle vérifie les propriétés usuelles suivantes que nous recommandons de prouver en guise d'un bon exercice d'algèbre.

$$\mathcal{P}1. \quad e^{0_n} = I_n$$

$$\mathcal{P}2. \quad A e^A = e^A A$$

$$\mathcal{P}3. \quad \lambda \in \mathcal{V}(A) \implies e^\lambda \in \mathcal{V}(e^A)$$

$$\mathcal{P}4. \quad e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau} \text{ pour tout } (t, \tau) \in \mathcal{R}^2$$

$$\mathcal{P}5. \quad e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} \iff AB = BA$$

$$\mathcal{P}6. \quad [e^{At}]^{-1} = e^{-At} \text{ pour tout } t \in \mathcal{R}$$

$$\mathcal{P}7. \quad \rho e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \text{ pour tout } t \in \mathcal{R}$$

$$\mathcal{P}8. \quad \mathcal{L}(e^{At}\alpha(t)) = (sI_n - A)^{-1}$$

Par ailleurs, on notera que la matrice  $(zI_n - A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est inversible puisque son déterminant, qui n'est autre que le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , n'est pas nul. Le résultat suivant donne un algorithme pour calculer  $(zI_n - A)^{-1}$  qui est communément appelée matrice résolvante associée à la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Résultat A.14** La matrice résolvante associée à une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est donnée par

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI_n - A)} \text{Adj}(sI_n - A)$$

avec

$$\det(sI_n - A) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

et

$$\text{Adj}(sI_n - A) = A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + A_3 s^{n-3} + \dots + A_{n-1} s + A_n$$

où  $\{a_k\}_{k \in [0, n]}$  et  $\{A_k\}_{k \in [1, n]}$  sont respectivement données par les algorithmes suivants

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_k = -\frac{1}{k!} \text{trace}(M_k A) \quad \text{pour } k \in [1, n]$$

avec

$$M_0 = 0_n \quad \text{et} \quad M_k = M_{k-1} A + a_{k-1} I_n \quad \text{pour } k \in [1, n]$$

et

$$A_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i A^{k-i-1} \quad \text{pour } k \in [1, n]$$

## A.8 Matrices définies positives ou non négatives.

Le concept de matrices définies positives ou non négatives a été particulièrement introduit pour des considérations d'ordre dans les ensembles de matrices.

Une matrice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  est définie positive (resp. non négative), i.e.  $A > 0$  (resp.  $A \geq 0$ ), si  $x^* A x > 0$  (resp.  $x^* A x \geq 0$ ) pour tout  $0 \neq x \in \mathbb{F}^n$

**Remarque A.7** Comme  $x^* A x = (x^* A x)^* = x^* A^* x$ , les matrices définies positives ou non négatives sont supposées être hermitiennes.

On accordera une attention particulière à cinq résultats sur les matrices hermitiennes définies positives ou non négatives qui ont été vitales pour la théorie des systèmes. Le premier résultat est une conséquence naturelle de la factorisation spectrale sous-jacente.

**Résultat A.15** Toute matrice hermitienne définie non négative  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  peut être décomposée comme suit

$$A = U\Lambda U^* \text{ avec } \Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i \} \text{ et } \lambda_i \geq 0$$

où les  $\lambda_i$  pour  $i \in [1, n]$  ne sont autres que les valeurs propres de  $A$  et  $U$  est une matrice unitaire de  $\mathbb{F}^{n \times n}$  dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de  $A$ .

Cette factorisation permet de déterminer aisément la racine carrée d'une matrice hermitienne définie positive ou non négative, en l'occurrence

$$\sqrt{A} = U \sqrt{\Lambda} U^* \text{ avec } \sqrt{\Lambda} = \text{diag} \{ \sqrt{\lambda_i} \}$$

Le deuxième résultat est une décomposition usuelle des matrices hermitiennes définies non négatives.

**Résultat A.16** Soit  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  une matrice hermitienne définie non négative de rang  $r$ , alors il existe une matrice  $E \in \mathbb{F}^{m \times n}$  avec  $m \geq r$  telle que  $A = E^*E$ .

On notera que cette décomposition matricielle n'est pas unique comme le montre le troisième résultat.

**Résultat A.17** Soient deux matrices  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  et  $C \in \mathbb{F}^{p \times n}$  avec  $m \geq p$  telles que  $B^*B = C^*C$ , alors il existe une matrice  $U \in \mathbb{F}^{m \times p}$  telle que  $U^*U = I_p$  et  $B = UC$ .

**Preuve.** Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux matrices unitaires telles que

$$B = V_1 \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = V_2 \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $B_1$  et  $C_1$  sont de rang plein en lignes. Alors  $B_1$  et  $C_1$  ont le même nombre de lignes et la matrice  $V_3 \triangleq B_1 C_1^* (C_1 C_1^*)^{-1}$  vérifie  $V_3 V_3^* = I$  puisque  $B^*B = C^*C$ . Et donc  $V_3$  est une matrice unitaire et  $V_3^* B_1 = C_1$ . La matrice  $U$  est donc définie comme suit

$$U = V_1 \begin{pmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & V_4 \end{pmatrix} V_2^*$$

avec une matrice unitaire  $V_4$ .

CQFD

Le quatrième résultat donne une condition nécessaire et suffisante pour que la différence entre deux matrices hermitiennes définies positives soit définie positive.

**Résultat A.18** Considérons deux matrices hermitiennes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Alors on a  $A > B$  si et seulement si  $\rho(BA^{-1}) < 1$ .

**Preuve.** Notons d'abord que puisque  $A > B$ , on a aura

$$I - A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = I - A^{-\frac{1}{2}}(BA^{-1})A^{\frac{1}{2}} > 0$$

et comme les matrices  $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$  et  $BA^{-1}$  sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres, soit

$$\lambda_i \left( A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \right) = \lambda_i (BA^{-1}) \text{ pour tout } i \in [1, n]$$

On aura donc

$$0 < I - A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \iff \rho \left( A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \right) < 1 \iff \rho (BA^{-1}) < 1$$

*CQFD*

Le cinquième résultat est consacré à deux propriétés usuelles du complément de Shur qui se sont avérées fondamentales pour la robustesse des systèmes linéaires.

**Résultat A.19** Soit une matrice hermitienne  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  que l'on peut partitionner comme suit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

Alors on a les propriétés suivantes.

*P1.*  $A$  est définie positive si et seulement si  $A_{22}$  et  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^*$  sont des matrices hermitiennes définies positives

*P2.*  $A$  est définie positive si et seulement si  $A_{11}$  et  $A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12}^*$  sont des matrices hermitiennes définies positives

**Preuve.** Pour prouver la propriété *P1*, il suffit de remarquer que

$$\left( A_{22} > 0 \text{ et } A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^* > 0 \right) \iff \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} > 0$$

et

$$\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{12}^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

Et on procède de la même manière pour prouver la propriété *P2*.

*CQFD*

Le sixième résultat est une propriété naturelle des bases de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}^n$

**Résultat A.20** Soit une base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{F}^n$ , alors on les propriétés suivantes.

$$e_i e_i^* \geq 0 \text{ pour tout } i \in [1, n] \text{ et } \sum_{i=1}^n e_i e_i^* > 0$$



**Preuve.** La première propriété est triviale puisque  $e_i e_i^*$  est une matrice symétrique de rang un. Quant à la seconde propriété, elle découle naturellement du fait que

$$\sum_{i=1}^n e_i e_i^* = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_1 \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_i^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} \text{ et } \text{Rang} \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_1 \dots & e_n \end{pmatrix} = n$$

*CQFD*

## A.9 Normes.

Soit  $\mathcal{V}$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{F}$ . La fonction  $\nu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}^+$  est une norme sur  $\mathcal{V}$  si elle vérifie les propriétés suivantes.

*P1. Positivité stricte*

$$\nu(x) = 0 \implies x = 0$$

*P2. Homogénéité*

$$\nu(\alpha x) = |\alpha| \nu(x) \text{ pour tout } x \in \mathcal{V} \text{ et pour tout } \alpha \in \mathcal{K}$$

*P3. Inégalité triangulaire*

$$\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$$

Par ailleurs, une norme  $\nu_1(\cdot)$  sur  $\mathcal{V}$  est dite multiplicative si elle vérifie la propriété

$$\nu(xy) \leq \nu(x) \nu(y)$$

Et deux normes  $\nu_1(\cdot)$  et  $\nu_2(\cdot)$  sur  $\mathcal{V}$  sont dites équivalentes si on peut trouver deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\alpha \nu_1(x) \leq \nu_2(x) \leq \beta \nu_1(x)$$

On donne ci-dessous les exemples de normes considérées dans la théorie des systèmes.

- Les normes de Hölder sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}^n$  définies par

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty$$

On distingue plus particulièrement la norme de la somme des modules, la norme euclidienne et la norme du maximum respectivement définies par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$$

et

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

**Remarque A.8** Les normes de Hölder sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}^n$  ont plus particulièrement les propriétés d'équivalence suivantes

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

et vérifient l'inégalité de Hölder qui stipule que pour tout couple  $(p, q)$  de réels supérieurs ou égaux à un tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

la propriété suivante est vraie

$$|x^* y| \leq \|x\|_p \|y\|_q \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n$$

- Les normes de Hölder sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}^{m \times n}$  définies par

$$\|A\|_{(p)} = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty$$

On distingue plus particulièrement la norme de la somme des modules, la norme euclidienne et la norme du maximum respectivement définies par

$$\|A\|_{(1)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{(2)} = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{trace}(A^* A)} = \sqrt{\text{trace}(A A^*)}$$

et

$$\|A\|_{(\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|A\|_{(p)} = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}| = \max_{(i,j) \in [1,m] \times [1,n]} |a_{ij}|$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes sur les normes de Hölder sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}^{m \times n}$

$\mathcal{P}1$ . Pour tout couple de matrices  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ , les propriétés suivantes sont satisfaites

$$\|AB\|_{(p)} \leq \|A\|_{(p)} \|B\|_{(p)} \text{ pour tout } p \text{ fini}$$

et

$$\|AB\|_{(\infty)} \leq n (\|A\|_{(\infty)} \|B\|_{(\infty)})$$

$\mathcal{P}2$ . La norme sur l'ensemble des matrices carrées de dimension  $n$  définie par

$$\|A\| = n \|A\|_{(\infty)}$$

est multiplicative.

$\mathcal{P}3$ . Les normes multiplicatives sur l'ensemble des matrices carrées sont minorées par le rayon spectral, soit

$$\|A\| \geq \rho(A) = |\lambda_{\max}(A)|$$

**Remarque A.9** Le rayon spectral d'une matrice ne constitue pas une norme dans le cas des matrices non hermitiennes, e.g.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2 \implies \rho(A) = 0$$

- Les normes matricielles induites définies pour les matrices en tant que transformations linéaires  $A : \mathbb{F}^n \mapsto \mathbb{F}^m$ . En effet, comme toute transformation linéaire de dimension finie est bornée, i.e.

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^+ / \|Ax\| \geq \alpha \|x\| \text{ pour tout } x \in \mathbb{F}^n$$

on peut définir une norme de matrices induite par deux normes  $\nu_1(\cdot)$  et  $\nu_2(\cdot)$  comme suit

$$\|A\|_{\nu_1, \nu_2} = \inf \{ \alpha \in \mathcal{R}^+ / \nu_1(Ax) \leq \alpha \nu_2(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{F}^n \}$$

Cette norme matricielle induite  $\|\cdot\|_{\nu_1, \nu_2}$  est dite compatible avec les normes vectorielles  $\nu_1(\cdot)$  et  $\nu_2(\cdot)$ . Lorsque  $\nu_1(\cdot)$  et  $\nu_2(\cdot)$  sont des normes de Hölder, i.e.  $\nu_1(\cdot) = \|\cdot\|_p$  et  $\nu_2(\cdot) = \|\cdot\|_q$ , la norme induite correspondante sera notée  $\|\cdot\|_{p,q}$ . Si en plus  $p = q$ , alors la norme induite correspondante sera notée  $\|\cdot\|_p$ . Les normes induites usuelles sont données par

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) = \max_{1 \leq j \leq n} (\|c_j\|_1)$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i(A^*A)) = \sigma_{\max}(A)$$

et

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_{1 \leq i \leq n} (\|\ell_j^T\|_1) = \|A^*\|_1$$

où  $\ell_i$  et  $c_j$  désignent respectivement la  $i$ ème ligne et la  $j$ ème colonne de la matrice  $A$ .

On montre aisément que pour toute matrice  $A$ , on a

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$$

et que toute norme matricielle induite est multiplicative, i.e. pour tout couple de matrice de matrices  $(A, B)$  de produit compatible, on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Par ailleurs, il existe un ensemble de relations d'équivalence entre les normes matricielles et les normes matricielles induites associées pour une matrice  $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$ .

- La norme de Frobenius d'une matrice  $A$  définie par

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2(A)}$$

Comme il a été mentionné au paragraphe sur les valeurs propres et valeurs singulières d'une matrice, les valeurs singulières contiennent une information métrique sur la transformation linéaire sous-jacente. Cette information métrique est particulièrement mise en exergue par les résultats suivants.

**Résultat A.21** On distingue deux propriétés remarquables des valeurs singulières

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

et

$$\sigma_{\min}(A) = \min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. On peut alors en déduire naturellement la propriété fondamentale suivante

$$\sigma_{\min}(A) \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sigma_{\max}(A) \text{ pour tout } x \neq 0$$

**Résultat A.22** La valeur singulière maximale d'une matrice complexe est une norme induite par la norme euclidienne qui est communément connue sous l'appellation de norme spectrale, soit

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$$

On distingue quatre résultats qui constituent l'essence des outils d'analyse et de synthèse des systèmes asservis. Le premier concerne deux paires d'inégalités remarquables sur les valeurs singulières maximales et minimales d'une matrice donnée.

**Résultat A.23** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , on a

$$\sigma_{\max}(A) - 1 \leq \sigma_{\max}(A + I_n) \leq \sigma_{\max}(A) + 1 \quad (\text{A.10})$$

et

$$\sigma_{\max}(A) \leq \sigma_{\max}(A + I_n) + \sigma_{\max}(I_n) = \sigma_{\max}(A + I_n) + 1 \quad (\text{A.11})$$

**Preuve.** Considérons d'abord les inégalités A.10. Comme la valeur singulière maximale est une norme, elle vérifie l'inégalité triangulaire

$$\sigma_{\max}(A + I_n) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(I_n)$$

qui permet de déduire naturellement l'inégalité de droite puisque  $\sigma_{\max}(I_n) = 1$ . Par ailleurs, comme  $A = A + I_n - I_n$  pour toute matrice  $A$ , on aura

$$\sigma_{\max}(A) \leq \sigma_{\max}(A + I_n) + \sigma_{\max}(I_n) = \sigma_{\max}(A + I_n) + 1$$

qui permet de déduire naturellement l'inégalité de gauche puisque  $\sigma_{\max}(I_n) = 1$ . Considérons ensuite les inégalités A.11 et deux vecteurs  $w \in \mathbb{F}^n$  et  $v \in \mathbb{F}^n$  tels que

$$\frac{\|(A + I_n)w\|}{\|w\|} = \sigma_{\min}(A + I_n) \quad \text{et} \quad \frac{\|(A + I_n)v\|}{\|v\|} = \sigma_{\min}(A)$$

alors on aura

$$\|(A + I_n)w\| = \|Aw + w\| \geq \|Aw\| - \|w\|$$

et

$$\sigma_{\min}(A + I_n) \leq \frac{\|(A + I_n)v\|}{\|v\|} = \sigma_{\min}(A) + 1$$

Ces propriétés permettent d'établir aisément les inégalités A.11.

*CQFD*

Le deuxième résultat montre que la perturbation des valeurs singulières d'une matrice perturbée est au plus égale à la valeur singulière maximale de la matrice perturbatrice, i.e. la norme de la perturbation.

**Résultat A.24** Soient deux matrices complexes  $A$  et  $P$  de dimension  $m \times n$ , alors la propriété suivante est vraie pour tout  $i \in [1, \min(m, n)]$ .

$$\sigma_i(A) - \sigma_{\max}(P) \leq \sigma_i(A + P) \leq \sigma_i(A) + \sigma_{\max}(P)$$

Le troisième résultat donne une interprétation de la valeur singulière minimale d'une matrice, en l'occurrence la plus petite norme d'une matrice perturbatrice qui rend singulière la matrice perturbée.

**Résultat A.25** Soient deux matrices complexes  $A$  et  $P$  de dimension  $m \times m$ , alors la propriété suivante est vraie

$$\det(A + P) = 0 \implies \sigma_{\max}(P) \geq \sigma_{\min}(A)$$

ou d'une manière équivalente

$$\sigma_{\max}(P) < \sigma_{\min}(A) \implies \det(A + P) \neq 0$$

On peut alors en déduire naturellement que pour toute matrice complexe  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , on a

$$\sigma_{\min}(A) = \min_{P \in \mathbb{F}^{n \times n}} \{ \sigma_{\max}(P) / \det(A + P) = 0 \}$$

Le dernier résultat n'est autre que la propriété de dilatation contraction qui est au coeur de la synthèse  $H_\infty$ .

**Résultat A.26** Soient deux matrices  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{p \times n}$  et  $C \in \mathbb{F}^{m \times p}$ , alors la propriété suivante est vraie

$$\max(\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)) \leq \left\| \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{2} \max(\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B))$$

et

$$\max(\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(C)) \leq \| [A \ C] \| \leq \sqrt{2} \max(\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(C))$$

$$\sigma_{\max} \left( \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B)$$

$$\sigma_{\max} \left( [A \ C] \right) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(C)$$

## A.10 Inverses généralisées et pseudo-inverses.

Soit une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang plein. Une matrice  $A_d^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (resp.  $A_g^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ) est une inverse à droite (resp. à gauche) de la matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  si  $AA_d^{-1} = I_m$  (resp.  $A_g^{-1}A = I_n$ ). Il est évident que la matrice  $A$  est inversible à droite (resp. à gauche) si et seulement si elle est de rang plein en lignes (resp. en colonnes) et que l'une de ses inverses à droite (resp. à gauche) est donnée par  $A_d^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}$  (resp.  $A_g^{-1} = (A^*A)^{-1}A^*$ ).

On notera que les inverses à droite et à gauche d'une matrice ne sont pas nécessairement uniques comme le montre le fait suivant

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix} = I_n$$

où  $X$  est une matrice quelconque de dimensions adéquates et que la relation suivante est toujours vraie

$$AA_d^{-1}A = AA_g^{-1}A = A \quad (\text{A.12})$$

Plus généralement, si une matrice n'est pas de rang plein en lignes (resp. en colonnes), alors elle n'admet pas de matrices inverses ordinaires. Néanmoins, elle admet une inverse généralisée, que l'on désignera par  $A^{ig}$ , satisfaisant la relation

$$AA^{ig}A = A \quad (\text{A.13})$$

comme l'indique le résultat suivant

**Résultat A.27** Toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  admet une infinité de matrices inverses généralisées  $A^{ig}$ .

**Preuve.** Conformément au résultat A.7 d'équivalence d'une matrice donnée à sa forme de Smith, on peut construire une matrice inverse généralisée  $A^{ig} \in \mathbb{F}^{n \times m}$  de la matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  comme suit

$$A^{ig} = Q^{-1}TP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} I_r & T_1 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times m}$$

où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont des matrices quelconques de dimensions appropriées. En effet, la matrice  $X^{ig}$  vérifie bien l'équation A.13.

$$(PSQ)(Q^{-1}TP^{-1})(PSQ) = PSTSQ = PSQ$$

CQFD

**Remarque A.10** Toute inverse généralisée  $A^{ig} \in \mathbb{F}^{n \times m}$  de la matrice  $A$  possède les propriétés.

- P1.  $\mathcal{I}(AA^{ig}) = \mathcal{I}(A)$
- P2.  $\mathcal{I}((AA^{ig})^*) = \mathcal{I}(A^*)$
- P3.  $AA^{ig}$  et  $A^{ig}A$  sont idempotentes

Le concept de pseudo-inverse, communément appelée inverse au sens de Moore-Penrose, a été particulièrement introduit pour pallier la pluralité de l'inverse généralisée. La pseudo-inverse d'une matrice, que l'on désigne par  $A^+$ , vérifie les quatre propriétés suivantes.

- P1.  $AA^+A = A$
- P2.  $A^+AA^+ = A^+$
- P3.  $(AA^+)^* = AA^+$
- P4.  $(A^+A)^* = A^+A$

Elle se distingue des inverses généralisées par son unicité comme l'indique le résultat suivant.

**Résultat A.28** Toute matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  admet une pseudo-inverse  $A^+$  et cette pseudo-inverse est unique.

**Preuve.** Montrons d'abord que si la pseudo-inverse existe, alors elle est unique. Pour ce faire, supposons qu'une matrice  $A$  admet deux pseudo-inverses  $X$  et  $Y$ , alors on aura

$$\begin{aligned}
 X &= XAX = X(AX)^* = XX^*A^* \\
 &= X(XAX)^*(AYA)^* = X(AX)^*X^*A^*(AY)^* \\
 &= X(AX)^*(AX)^*(AY)^* = XAXAXAY = XAY \\
 &= (XA)^*YAY = A^*X^*(YA)^*Y = A^*X^*A^*Y^*Y \\
 &= (AXA)^*Y^*Y = A^*Y^*Y = (YA)^*Y = YAY \\
 &= Y
 \end{aligned}$$

L'existence de la pseudo-inverse peut être établie à partir du résultat A.9 sur la factorisation de rang maximal de la matrice  $A$ . En effet, comme  $F^*F$  et  $GG^*$  sont des matrices carrées de rang plein, il en est de même pour la matrice  $F^*AG^*$  dont l'inverse est donnée par

$$(F^*AG^*)^{-1} = (GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}$$

On peut alors vérifier aisément que la matrice

$$M = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*$$

vérifie les propriétés  $\mathcal{P}1$  à  $\mathcal{P}4$ . Et l'unicité de la pseudo-inverse permet de conclure que

$$X = A^+$$

On distingue cinq propriétés usuelles de la pseudo-inverse qui sont communément utilisées dans la résolution des systèmes linéaires d'équations.

$\mathcal{P}1$ . Si  $A$  est régulière, alors  $A^+ = A^{-1}$ .

$\mathcal{P}2$ . Si  $A$  est de rang plein en colonnes, alors  $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ . On notera que  $A^+A = I_n$  mais  $AA^+ \neq I_m$ .

$\mathcal{P}3$ . Si  $A$  est de rang plein en lignes, alors  $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ . On notera que  $AA^+ = I_m$  mais  $A^+A \neq I_n$ .

$\mathcal{P}4$ . Soit  $FG$  une factorisation de rang maximal A.9 d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang  $r$ , alors on a  $A^+ = G^+F^+$ . On retrouve la relation d'inversion d'un produit de matrices régulières.

$\mathcal{P}5$ . Soit  $FPG$  une factorisation d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang  $r$  où  $F \in \mathbb{F}^{m \times r}$  et  $G \in \mathbb{F}^{r \times n}$  des matrices de rang plein et  $P \in \mathbb{F}^{r \times r}$  une matrice régulière, alors on a  $A^+ = G^+P^{-1}F^+$ . On retrouve la relation d'inversion d'un produit de matrices régulières.

$\mathcal{P}6$ . Considérons la décomposition en valeurs singulières A.13 d'une matrice  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  de rang  $r$ , soit

$$A = U\Sigma V^* / \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$$



Et compte tenu des propriétés  $\mathcal{P}1$  et  $\mathcal{P}5$ , on a

$$A^+ = V\Sigma^+U \text{ avec } \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce résultat corrobore l'existence et l'unicité de la pseudo-inverse puisque la décomposition en valeurs singulières d'une matrice est unique et existe toujours.

## A.11 Résolution des systèmes d'équations linéaires.

De nombreux problèmes relevant des sciences de l'ingénieur peuvent être ramenés à la résolution d'un système d'équations linéaires que l'on peut récrire sous la forme

$$y = Ax \tag{A.14}$$

où  $A$  est une matrice de  $\mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $y$  est un vecteur de  $\mathbb{F}^m$  et  $x \in \mathbb{F}^n$  est l'inconnue. L'ensemble des solutions de ce système peut comporter zéro, une ou une infinité de solutions exactes. Le système est dit **compatible** s'il admet au moins une solution exacte. Autrement, le système est dit **incompatible** et on peut en chercher une solution approchée, en l'occurrence celle qui minimise la norme  $\|y - Ax\|^2$ .

**Remarque A.11** Supposons que le système d'équations linéaires A.14 est compatible, alors on peut l'écrire sous la forme de l'égalité

$$y = AA^+y \tag{A.15}$$

qui constitue un test de compatibilité.

**Remarque A.12** Tous les résultats qui seront établis pour le système d'équations linéaires A.14 pourront être établis, modulo des modifications élémentaires de cohérence par rapport aux dimensions, pour un système d'équations linéaires

$$AX = B$$

où  $A$  et  $B$  sont respectivement des matrices données de  $\mathbb{F}^{m \times n}$  et  $\mathbb{F}^{m \times p}$  et  $x \in \mathbb{F}^{n \times p}$  est l'inconnue.

Les deux résultats suivants précisent les conditions de compatibilité des systèmes d'équations linéaires et l'ensemble des solutions dans le cas d'un système compatible.

**Résultat A.29** Le système d'équations linéaires A.14 est compatible si l'une des propositions suivantes est vraie.

$$\mathcal{P}1. y \in \mathcal{I}(A)$$

$$\mathcal{P}2. \text{rang} \begin{pmatrix} A & y \end{pmatrix} = \text{rang}(A)$$

$$\mathcal{P}3. \mathcal{N}(A^*) \subset \mathcal{N}(y^*)$$

Par ailleurs, la solution, lorsqu'elle existe, est unique si et seulement si  $A$  est de rang plein en colonnes, i.e.  $\text{rang}(A) = n$

**Résultat A.30** Supposons que le système d'équations linéaires A.14 est compatible, alors l'ensemble des solutions sous-jacentes est donné par

$$x = A^+y + (I_n - A^+A)z \quad (\text{A.16})$$

où  $z$  est un vecteur arbitraire de  $\mathbb{F}^n$ .

**Preuve.** Considérons la solution  $x$  donnée par l'équation A.16. Alors on a

$$Ax = AA^+y + (A - AA^+A)z = AA^+y = y$$

Par ailleurs, toute solution du système d'équations linéaires (reflinearsystem peut se mettre sous la forme

$$x = A^+y + x - A^+Ax$$

qui n'est autre qu'une forme particulière de l'équation régissant l'ensemble des solutions A.16. CQFD

**Remarque A.13** Considérons le système d'équations linéaires A.14 et supposons que la matrice  $A$  et de rang plein. L'ensemble des solutions sous-jacent est caractérisé par la structure de la matrice  $A$  comme l'indiquent les propriétés suivantes.

$\mathcal{P}1$ . Le système d'équations linéaires A.14 admet une solution unique si la matrice  $A$  est carrée, i.e.  $n = m$ . C'est le cas d'un système d'équations admettant autant d'équations que d'inconnues et dont la solution est donnée par

$$x = A^{-1}y$$

C'est la solution usuelle du système d'équations puisque  $A$  est une matrice carrée de rang  $n$ .

$\mathcal{P}2$ . Le système d'équations linéaires A.14 admet une infinité de solutions si la matrice  $A$  est rectangulaire horizontale, i.e.  $n > m$ . C'est le cas d'un système d'équations admettant plus d'inconnues que d'équations dont une solution usuelle est donnée par

$$x = A^*(AA^*)^{-1}y$$

Cette solution est obtenue à partir de la solution unique de la forme  $x = A^*v$  du système d'équations  $AA^*v = y$  puisque  $AA^*$  est une matrice carrée de rang  $m$ .

$\mathcal{P}3$ . Le système d'équations linéaires A.14 admet au plus une solution si la matrice  $A$  est rectangulaire verticale, i.e.  $n < m$ . C'est le cas d'un système d'équations admettant plus d'équations que d'inconnues et dont la solution est donnée par

$$x = (A^*A)^{-1}A^*y$$

Cette solution est obtenue à partir de la solution unique du système d'équations  $A^*Ax = A^*y$  puisque  $A^*A$  est une matrice carrée de rang  $n$ .

**Remarque A.14** Le système d'équations linéaires A.14 peut se récrire sous une forme bien appropriée à sa résolution basée sur la forme de Smith de la matrice  $A$  (Résultat A.7), soit

$$A = PSQ \text{ avec } S = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, si l'on pose

$$\bar{x} = Qx \text{ et } \bar{y} = P^{-1}y$$

on peut récrire le système d'équations linéaires A.14 sous la forme

$$S\bar{x} = \bar{y}$$

Et si l'on décompose les vecteurs  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  comme suit

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \bar{x}_1 \in \mathbb{F}^{r \times q} \text{ et } \bar{x}_2 \in \mathbb{F}^{r \times q}$$

on aura  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2 = 0$ . Il apparaît alors clairement que le système est compatible si et seulement si  $\bar{y}_2 = 0$ . Et que dans ce cas, la solution est donnée par

$$\bar{x}_1 = \bar{y}_1 \text{ et } \bar{x}_2 \text{ est une matrice arbitraire}$$

Dans le cas d'un système incompatible, on cherche une solution optimale au sens des moindres carrés, i.e. qui minimise la norme euclidienne de l'erreur associée au système d'équations donnée par  $\|y - Ax\|^2$ . Et comme la solution exacte d'un système compatible est optimale, on peut dire que tout système d'équations linéaire admet au moins une solution comme le montre le résultat suivant.

**Résultat A.31** La solution optimale au sens des moindres carrés du système d'équations linéaires A.14 n'est autre que la solution exacte du système compatible donné par

$$A^*Ax = A^*y \tag{A.17}$$

**Preuve.** La solution optimale au sens des moindres carrés du système A.14 est donnée par l'équation d'optimalité

$$\frac{\partial}{\partial x} (J(x)) = 0 \text{ avec } J(x) = (y - Ax)^T (y - Ax)$$

ou d'une manière équivalente

$$A^*Ax = A^*y$$

On retrouve bien le système A.17. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} A^*A & A^*y \end{pmatrix} &= \text{rang} \left( A^* \begin{pmatrix} A & y \end{pmatrix} \right) \\ &\leq \min \left( \text{rang} (A^*), \text{rang} \begin{pmatrix} A & y \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Et compte tenu du fait

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A & y \end{pmatrix} \geq \text{rang} (A) = \text{rang} (A^*) = \text{rang} (A^*A)$$

on aura

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A^*A & A^*y \end{pmatrix} \leq \text{rang} (A^*) = \text{rang} (A) \leq \text{rang} \begin{pmatrix} A^*A & A^*y \end{pmatrix}$$

soit

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A^*A & A^*y \end{pmatrix} = \text{rang} (A^*A)$$

Le système A.17 est donc bien compatible.

CQFD

Le système A.17 est dit **système normal** associé au système A.14. Et comme il est toujours compatible, on peut conclure que le système d'équations linéaires A.14 admet toujours une solution donnée par

$$x = (A^*A)^+ A^*y + (I_n - (A^*A)^+ (A^*A)) z$$

où  $z$  est un vecteur arbitraire de  $\mathbb{F}^n$ .

## A.12 Equations matricielles linéaires.

De nombreux problèmes relevant de la théorie des systèmes ont été formulés à partir de la résolution d'une équation algébrique linéaire que l'on peut récrire sous la forme de l'équation de Sylvester donnée par

$$AX + XB = C \tag{A.18}$$

où  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{m \times m}$  et  $C \in \mathbb{F}^{n \times m}$  sont des matrices données et  $X \in \mathbb{F}^{n \times m}$  est l'inconnue. On s'intéresse dans ce qui suit à la compatibilité de cette équation et aux conditions d'unicité des solutions lorsqu'elles existent.

Le premier résultat donne une condition de similitude qui permet de caractériser l'existence des solutions de l'équation de Sylvester.

**Résultat A.32** L'équation de Sylvester admet une solution si et seulement si les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{pmatrix}$$

sont semblables.

**Preuve.** La condition est nécessaire puisque si  $X$  est une solution de l'équation de Sylvester, alors on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & AX + XB \\ 0 & -B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & XB \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La preuve de la suffisance de la condition peut être effectuée à titre d'exercice.

CQFD

Le second résultat donne trois propriétés spectrales d'un produit et d'une somme de Kronecker de deux matrices carrées.

**Résultat A.33** Soient deux matrices  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$  dont les valeurs propres respectives sont  $\lambda_i(A)$  pour  $i \in [1, n]$  et  $\lambda_j(B)$  pour  $j \in [1, m]$ , alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

- P1. Les valeurs propres du produit de Kronecker  $A \otimes B$  sont les  $mn$  scalaires  $\lambda_i(A) \lambda_j(B)$  pour  $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$ .
- P2. Les valeurs propres de la somme de Kronecker  $A \oplus B$  sont les  $mn$  scalaires  $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$  pour  $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$ .
- P3. Soient  $v_i$  et  $w_j$  les vecteurs propres respectifs de  $A$  et  $B$  correspondants aux valeurs propres  $\lambda_i(A)$  et  $\lambda_j(B)$ . Alors  $v_i \otimes w_j$  est un vecteur propre de  $A \otimes B$  (resp.  $A \oplus B$ ) correspondant à la valeur propre  $\lambda_i(A) \lambda_j(B)$  (resp.  $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$ ).

**Preuve.** Les preuves des trois propriétés peuvent être faites à titre d'exercice pour mieux appréhender les concepts de produit et de somme de Kronecker en utilisant la règle du produit mixte, i.e.  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ . A titre indicatif, on peut vérifier aisément que si  $v_a$  et  $v_b$  sont les vecteurs propres respectifs de  $A$  et  $B$  correspondants aux valeurs propres  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$ , alors on a

$$(A \otimes B)(v_a \otimes v_b) = \lambda_a \lambda_b (v_a \otimes v_b) \quad \text{et} \quad (A \oplus B)(v_a \otimes v_b) = (\lambda_a + \lambda_b)(v_a \otimes v_b)$$

CQFD

Le troisième résultat donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une solution unique de l'équation de Sylvester.

**Résultat A.34** L'équation de Sylvester admet une solution unique si et seulement si les valeurs propres de la matrice  $A$  sont distinctes des valeurs propres de la matrice  $-B$ , soit

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \quad \text{pour tout } (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$$

**Preuve.** On notera d'abord que compte tenu du résultat A.1 et de la définition A.6 de la somme de Kronecker, l'équation de Sylvester est équivalente au système d'équations linéaires

$$(B^T \oplus A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C) \quad (\text{A.19})$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si  $B^T \otimes A$  est une matrice régulière ou d'une manière équivalente n'admet aucune valeur propre nulle. Et en utilisant ensuite la propriété P2 du résultat A.33 en tenant compte que  $\mathcal{V}(B^T) = \mathcal{V}(B)$ , on conclut naturellement que l'équation de Sylvester admet bien une solution unique si et seulement si  $A \oplus B$  est une matrice régulière, i.e.  $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0$  pour tout  $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$ .

CQFD

**Remarque A.15** La résolution de l'équation de Sylvester est généralement effectuée à partir de celle du système linéaire d'équations A.19 en utilisant le potentiel d'analyse numérique disponible. Dans le cas où  $\Re(\lambda_i(A)) + \Re(\lambda_j(B)) < 0$  pour tout  $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$ , la solution unique est particulièrement donnée par

$$X = \int_0^{\infty} e^{At} C e^{Bt} dt$$

L'équation matricielle la plus populaire dans la théorie des systèmes est l'équation de Lyapunov qui n'est autre qu'une équation de Sylvester particulière avec  $A = A^*$ ,  $B = A$  et  $C = -Q$ , soit

$$XA + A^*X = -Q \quad (\text{A.20})$$

Et compte tenu du résultat A.34, on peut en déduire naturellement que l'équation de Lyapunov admet une solution unique si et seulement si

$$\lambda_i(A) + \lambda_j^*(A) \neq 0 \text{ pour tout } (i, j) \quad (\text{A.21})$$

**Remarque A.16** L'équation de Lyapunov ci-dessus conduit naturellement la propriété de similitude suivante

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ Q & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

Le résultat suivant montre la relation entre les valeurs propres de la matrice  $A$  et la nature de la solution  $X$  modulo des conditions sur la matrice  $Q$ .

**Résultat A.35** Supposons que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à partie réelle négative, soit  $\Re(\lambda_i(A)) < 0$  pour tout  $i \in [1, n]$ , alors l'équation de Lyapunov C.19 admet une solution unique donnée par

$$X = \int_0^t e^{A^*t} Q e^{At} dt$$

**Preuve.** On a

$$\frac{d}{dt} (e^{A^*t} Q e^{At}) = A^* e^{A^*t} Q e^{At} + e^{A^*t} Q e^{At} A$$

Et en intégrant, on obtient

$$e^{A^*t}Qe^{At} - Q = A^* \left( \int_0^t e^{A^*t}Qe^{At} dt \right) + \left( \int_0^t e^{A^*t}Qe^{At} dt \right) A$$

Et comme toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à partie réelle négative, on aura

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^*t}Qe^{At} = 0$$

et donc  $X$  est bien une solution de l'équation de Lyapunov. Et on peut montrer aisément que cette solution est unique en remarquant que l'application linéaire

$$F : X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto F(X) = A^*X + XA \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

est bijective. En effet on a  $\dim(\mathcal{I}(F)) = n^2$  et  $\dim(\mathcal{I}(F)) + \dim(\mathcal{N}(F)) = n^2$ .

*C.Q.F.D*

## A.13 Conclusion

Les bases fondamentales d'algèbre linéaire ont été présentées d'une manière progressive en accordant une attention particulière aux résultats qui se sont avérés vitaux pour la théorie des systèmes, notamment le produit de Kronecker, la transformation linéaire, la factorisation spectrale, les valeurs singulières, la pseudo-inverse, la résolution des systèmes d'équations linéaires et la résolution des équations matricielles usuelles. On peut retenir trois aspects de l'élégance algébrique. Le premier aspect est la simplicité d'analyse et de calcul offerte par les diverses factorisations matricielles. Le deuxième aspect concerne l'information métrique contenue dans les valeurs singulières. Le troisième aspect relève de la possibilité de résolution d'un système d'équations linéaires sans avoir recours aux hypothèses usuelles requises pour les solutions exactes.

Ces bases permettent de mieux apprécier la formulation de nombreux problèmes de stabilité, de stabilisation, de commande, d'observation et de robustesse des systèmes linéaires et leur résolution.

## A.14 Problèmes

Les problèmes proposés ci après permettent de mieux appréhender le concept de normes des systèmes.

**Problème A.1** Montrer que la valeur singulière maximale d'une matrice complexe possède bien toutes les propriétés d'une norme induite par une norme vectorielle.

**Problème A.2** Montrer qu'une matrice  $A$  est régulière si et seulement si sa valeur singulière minimale n'est pas nulle et que si une matrice est inversible, alors on a

$$\sigma_{\min}(A) = \frac{1}{\sigma_{\max}(A^{-1})}$$

**Problème A.3** Illustrer que les valeurs singulières d'une matrice permettent bien de caractériser sa dégénérescence. au travers la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où  $\alpha$  est un scalaire positif relativement grand.

**Problème A.4** Soit  $(A, B) \in \mathcal{C}^{n \times n} \times \mathcal{C}^{n \times n}$  et  $\alpha \in \mathcal{C}$ , montrer que les propriétés suivantes sont vraies

$$\sigma_{\min}(\alpha A) \leq |\alpha| \sigma_{\min}(A)$$

et

$$\sigma_{\min}(AB) \leq \sigma_{\min}(A) \sigma_{\min}(B)$$

**Problème A.5** Soit la matrice partitionnée donnée par

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mq} \end{bmatrix} \triangleq [A_{ij}]$$

Montrer que pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle  $p$ , on a

$$\|A\|_p \leq \left\| \begin{bmatrix} \|A_{11}\|_p & \|A_{12}\|_p & \dots & \|A_{1q}\|_p \\ \|A_{21}\|_p & \|A_{22}\|_p & \dots & \|A_{2q}\|_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \|A_{m1}\|_p & \|A_{m2}\|_p & \dots & \|A_{mq}\|_p \end{bmatrix} \right\|_p$$

et que l'inégalité devient une égalité dans le cas d'une norme de Frobenius.

**Problème A.6** Soit  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , montrer que ses valeurs propres, i.e.  $\{\lambda_i(A)\}_{i \in [1, n]}$ , vérifient la propriété suivante par rapport à ses valeurs singulières minimale et maximale, i.e.  $\sigma_{\min}(A)$  et  $\sigma_{\max}(A)$ .

$$\sigma_{\min}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \sigma_{\max}(A) \text{ pour tout } i \in [1, n]$$

**Problème A.7** Soient deux matrices complexes  $A$  et  $P$  de dimension  $m \times n$ , montrer que la propriété suivante est vraie

$$\det(A + P) = 0 \implies \sigma_{\max}(P) \geq \sigma_{\min}(A)$$

et en déduire que

$$\sigma_{\max}(P) \geq \sigma_{\min}(A) \implies \det(A + P) \neq 0$$



**Problème A.8** Soit une matrice hermitienne et définie non négative  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  que l'on peut partitionner comme suit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

On se propose de mettre en exergue une factorisation essentielle de cette classe de matrices en procédant progressivement comme suit.

- 1) Montrer que  $\mathcal{N}(A_{22}) \subset \mathcal{N}(A_{12})$ .
- 2) Soit  $A_{22}^+$  est une pseudo inverse de  $A_{22}$ , montrer que  $X = A_{12}A_{22}^+$  est une solution du système linéaire  $XA_{22} = A_{12}$
- 3) En déduire que la matrice  $A$  peut être factorisée comme suit.

$$X = A_{12}A_{22}^+ \text{ est une solution de } XA_{22} = A_{12}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^+X_{12}^* & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^+A_{12}^* & I \end{pmatrix}$$

**Problème A.9** Déterminer les valeurs singulières d'une matrice carrée de dimension deux peuvent être aisément déterminées à partir de la somme et du produit de leurs carrés.

**Problème A.10** On se propose de déterminer l'exponentielle d'une matrice réelle carrée de dimension 2 en procédant progressivement comme suit

- 1) Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , il existe une matrice inversible  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  telle que

$$A = P^{-1}WP \text{ avec } W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où  $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

- 2) Montrer que pour toute paire de scalaires  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , la propriété suivante est vraie

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_e(\lambda^k) & -\mathcal{I}_m(\lambda^k) \\ \mathcal{I}_m(\lambda^k) & \mathcal{R}_e(\lambda^k) \end{pmatrix} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

- 3) Déterminer l'exponentielle de matrice  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

**Problème A.11** Montrer que pour toute matrice réelle  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  admettant une valeur propre réelle  $\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}$  et deux valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_2 = \alpha + j\beta$  et  $\lambda_3 = \alpha - j\beta$ , il existe une matrice réelle inversible  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que

$$A = P^{-1}WP \text{ avec } W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

En déduire l'exponentielle de la matrice  $A$  et préciser ses valeurs propres.

**Problème A.12** Montrer que les solutions des systèmes autonomes

$$\rho x(t) = Fx(t) \text{ avec } F = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \end{cases}$$

où  $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}^*$  sont données par

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \text{ avec } e^{Ft} = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \\ e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

**Problème A.13** Déterminer les valeurs singulières d'une matrice carrée de dimension deux peuvent être aisément déterminées à partir de la somme et du produit de leurs carrés.

**Problème A.14** Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  telle que

$$\mathcal{V}(A) = \{\alpha_1 + j\beta_1, \alpha_1 + j\beta_1, \dots, \alpha_n + j\beta_n, \alpha_n + j\beta_n\} \subset \mathbb{C}$$

$(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  et  $(\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_j, \beta_j)$  pour tout  $i \neq j$ . Montrer qu'il existe une matrice régulière  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  telle que la propriété suivante est satisfaite

$$A = P\Lambda P^{-1} \text{ avec } \Lambda = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \right\}$$

Et en déduire l'exponentielle de la matrice  $A$ .

## Annexe B

# Matrices polynomiales et rationnelles

*Les matrices polynomiales ont été utilisées pour la représentation des systèmes linéaires multivariables à partir d'une exploitation ingénieuse des résultats algébriques sous-jacents, en l'occurrence les factorisations usuelles et la caractérisation des matrices de fractions rationnelles. Elles ont permis d'étendre naturellement les descriptions polynomiales des systèmes monovariables issues du concept de fonction de transfert au cas des systèmes multivariables autour du concept de matrice de transfert. Les matrices polynomiales constituent ainsi l'essence de l'approche polynomiale qui s'est imposée par ses interprétations fréquentielles qui ont été particulièrement mises en exergue par les études de robustesse.*

*Les matrices polynomiales (resp. rationnelles) sont définies à partir de l'anneau des polynômes (resp. le corps des fractions rationnelles) en  $s$  à coefficients réels donnés par*

$$\mathbb{R}[s] = \left\{ P(s) = \sum_{i=0}^{np} p_i s^{np-i} \text{ avec } p_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i \in [0, np] \right\}$$
$$\left( \text{resp. } \mathbb{R}(s) = \left\{ F(s) = \frac{F_n(s)}{F_d(s)} \text{ avec } (F_n(s), F_d(s)) \in \mathbb{R}[s] \times \mathbb{R}[s] \right\} \right)$$

*L'ensemble des polynômes normalisés  $\mathbb{R}_n[s]$  est caractérisé par  $p_0 = 1$ . Le degré relatif d'une fraction rationnelle est la différence entre le degré de son dénominateur et le degré de son numérateur, soit  $\text{degr}(F(s)) = \text{deg}(F_d(s)) - \text{deg}(F_n(s))$ . La fraction rationnelle est dite propre (resp. strictement propre) si son degré relatif est supérieur ou égal (resp. supérieur) à zéro. L'ensemble des fractions rationnelles propres est un anneau euclidien pour les opérations usuelles d'addition et de multiplication communément noté  $\mathbb{R}_p(s)$ . Les éléments inversibles de cet anneau sont appelés fractions rationnelles bicausales ou bipropres caractérisées par un degré relatif nul ou une limite finie et non nulle lorsque  $s$  tend vers l'infini.*

*Ce chapitre est organisé en cinq paragraphes comme suit. Le premier paragraphe est dédié aux différentes définitions élémentaires associées aux matrices polynomiales et rationnelles; on en profitera pour préciser les notations adoptées. Les factorisations remarquables des matrices polynomiales et rationnelles, en l'occurrence les formes de Hermite, de Smith et de Smith-McMillan, sont présentées d'une manière concise au deuxième paragraphe. Le troisième paragraphe est consacré au développement du concept de factorisations polynomiales à droite. Les définitions et résultats sous-jacents sont transposés au concept de factorisations polynomiales à gauche au quatrième paragraphe. Le cinquième paragraphe est réservé aux résultats complémentaires issus des degrés des lignes et des colonnes. Une conclusion est donnée au sixième paragraphe.*

## B.1 Définitions élémentaires.

Nous donnons ci-dessous les définitions élémentaires des matrices polynomiales et rationnelles tout en introduisant les notations adoptées.

**Définition B.1** Une matrice polynomiale (resp. rationnelle) est une matrice dont les éléments sont des polynômes (resp. des fractions rationnelles). L'ensemble des matrices polynomiales (resp. rationnelles) à  $p$  lignes et  $m$  colonnes est noté  $\mathbb{R}^{p \times m}[s]$  (resp.  $\mathbb{R}^{p \times m}(s)$ ) est un anneau (resp. un corps) non commutatif par rapport aux opérations élémentaires d'addition et de multiplication.

Une matrice polynomiale (resp. rationnelle) est généralement exprimée à partir de ses éléments  $P(s) = [P_{ij}(s)]$  (resp.  $F(s) = [F_{ij}(s)]$ ) pour  $(i, j) \in [1, p] \times [1, m]$

où  $P_{ij}(s)$  (resp.  $F_{ij}(s)$ ) est un polynôme (resp. une fraction rationnelle).

**Définition B.2** Une matrice polynomiale (resp. rationnelle) carrée est inversible si et seulement si son déterminant est un polynôme non nul (resp. une fraction rationnelle non nulle). Une matrice polynomiale (resp. rationnelle propre) est dite unimodulaire (resp. bicausale ou bipropre) si son déterminant est un scalaire non nul (resp. une fraction rationnelle bicausale ou bipropre non nulle).

On peut en déduire qu'une matrice polynomiale (resp. rationnelle propre) est unimodulaire (resp. bicausale ou bipropre) si et seulement si elle est inversible et son inverse est une matrice polynomiale (resp. bicausale ou bipropre). L'ensemble des matrices polynomiales  $\mathbb{R}^{p \times p}(s)$  (resp. rationnelles propres  $\mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$ ) carrées est un anneau non commutatif dont les éléments inversibles sont des matrices unimodulaires (resp. bicausales ou bipropres). On notera que le critère le plus simple pour tester si une matrice rationnelle propre  $B(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  est bicausale ou bipropre consiste à calculer  $\lim_{s \rightarrow \infty} B(s)$  et vérifier qu'elle est inversible.

**Définition B.3** Les mineurs d'une matrice rationnelle sont les déterminants des sous-matrices obtenues en supprimant des lignes et des colonnes de cette matrice. On utilisera la notation  $M_c^\ell(s)$  pour le mineur correspondant à la suppression des lignes  $\ell$  et des colonnes  $c$ . L'ordre du mineur n'est autre que la dimension de la sous matrice associée.

**Exemple B.1** Considérons la matrice rationnelle

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & s-2 \\ s+2 & s-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les mineurs d'ordre 1 sont donnés par

$$M_{2,3}^2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad M_{1,2}^2(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+2)}, \quad M_{1,3}^2(s) = 0$$

$$M_{2,3}^1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)}, M_{1,2}^1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \text{ et } M_{1,3}^1(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

et les mineurs d'ordre deux sont donnés par

$$M_1(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}, M_2(s) = \frac{s^2-5}{(s+1)(s+2)} \text{ et } M_3(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

**Définition B.4** Le rang d'une matrice polynomiale (resp. rationnelle) est le nombre maximum de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes sur le corps des fractions rationnelles, soit l'ordre maximal d'un mineur non nul de la matrice polynomiale (resp. rationnelle). Le rang normal d'une matrice polynomiale (resp. rationnelle) est la valeur maximale que le rang de cette matrice peut atteindre pour une valeur arbitraire de  $s$ , i.e.

$$\text{rang normal}(\mathcal{M}(s)) = \max_{\eta \in \mathbb{C}} \text{rang}(\mathcal{M}(\eta))$$

Le rang normal d'une matrice polynomiale (resp. rationnelle) correspond donc au rang de cette matrice presque pour tout  $s$  à l'exception d'un ensemble fini de valeurs qui correspondent aux zéros de la matrice polynomiale (resp. rationnelle).

**Exemple B.2** Considérons les matrices polynomiales

$$P_1(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+5 \end{pmatrix} \text{ et } P_2(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s+2 \\ s^2+6s+5 & s^2+7s+10 \end{pmatrix}$$

et rationnelles

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 2s-1 \\ s+1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } F_2(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \begin{pmatrix} s & s^2 & s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a  $\text{rang}(P_1(s)) = 2$  puisque  $\det(P_1(s)) = s-1 \neq 0$  dans  $\mathbb{R}(s)$  et  $\text{rang}(P_2(s)) = 1$  puisque ses colonnes ne sont pas indépendantes, i.e.

$$\begin{pmatrix} s+2 \\ s^2+7s+10 \end{pmatrix} = \frac{s+2}{s+1} \begin{pmatrix} s+1 \\ s^2+6s+5 \end{pmatrix}$$

$\text{rang normal}(F_1(s)) = \text{rang normal}(F_2(s)) = 2$  et  $\text{rang}(F_1(1)) = \text{rang}(F_2(0)) = 1$ .

**Définition B.5** Le degré d'une matrice polynomiale  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ , noté  $\text{deg}(P(s))$ , est le degré maximum parmi tous les degrés des mineurs d'ordre maximal non nuls de  $P(s)$ .

Compte tenu qu'une colonne (resp. une ligne) d'une matrice polynomiale peut être vue comme une matrice polynomiale, on peut en déduire naturellement que le degré de la  $j$ -ème colonne (resp.  $i$ -ème ligne) de la matrice polynomiale  $P(s)$ , notée  $M_{c_j}(s)$  (resp.  $M_{l_i}(s)$ ), est le degré maximal des éléments de cette colonne (resp. ligne), soit

$$\text{deg}(P_{c_j}(s)) = \max_i (\text{deg}(P_{ij}(s))) \text{ (resp. } \text{deg}(P_{l_i}(s)) = \max_j (\text{deg}(P_{ij}(s))))$$

## B.2 Formes remarquables.

On peut obtenir des formes canoniques des matrices polynomiales ou rationnelles modulo trois opérations élémentaires de lignes (resp. de colonnes), en l'occurrence une permutation de deux lignes (resp. colonnes), une multiplication d'une ligne (resp. une colonne) quelconque par un nombre réel non nul, une addition à une ligne (resp. une colonne) quelconque d'une autre ligne (resp. colonne) multipliée par un polynôme. Ces opérations élémentaires sont effectuées par une prémultiplication (resp. postmultiplication) par des matrices unimodulaires qui aboutissent aux trois groupes de résultats donnés ci-dessous sans preuves. Ces preuves sont disponibles dans une synthèse concise et compréhensive sur les matrices polynomiales et rationnelles ([16]) et dans les ouvrages sur les systèmes linéaires ([15], [46]).

Le premier groupe de résultats concerne la forme de Hermite d'une matrice polynomiale ou rationnelle propre obtenue à partir d'opérations élémentaires sur ses colonnes (resp. lignes).

**Résultat B.1** Toute matrice polynomiale  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  dont les  $r$  premières lignes (resp. colonnes) sont indépendantes peut être factorisée comme suit

$$P(s) = H(s)U(s) \text{ avec } H(s) = \begin{pmatrix} H_1(s) & 0 \\ H_2(s) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left( \text{resp. } P(s) = U(s)H(s) \text{ avec } H(s) = \begin{pmatrix} H_1(s) & H_2(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

où  $U(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  (resp.  $\mathbb{R}^{p \times p}[s]$ ) est une matrice unimodulaire et  $H(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  est une matrice unique appelée forme de Hermite de la matrice  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  où  $H_1(s) \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$  et  $H_2(s) \in \mathbb{R}^{(p-r) \times r}[s]$  (resp.  $\mathbb{R}^{(m-r) \times r}[s]$ ).  $H_2(s)$  est une matrice qui n'a pas de structure particulière, alors que  $H_1(s)$  est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) de rang  $r$  tel que le  $i$ -ème (resp.  $j$ -ème) élément diagonal est un polynôme normalisé de degré supérieur à celui de tout autre élément de la  $i$ -ème ligne (resp.  $j$ -ème colonne). Et donc si le  $i$ -ème (resp.  $j$ -ème) élément diagonal est égal à 1, alors les autres éléments de la  $i$ -ème ligne (resp.  $j$ -ème colonne) sont nuls.

**Résultat B.2** Toute matrice rationnelle propre  $F(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  dont les  $r$  premières lignes (resp. colonnes) sont indépendantes peut être factorisée comme suit

$$F(s) = H(s)B(s) \text{ avec } H(s) = \begin{pmatrix} H_1(s) & 0 \\ H_2(s) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left( \text{resp. } F(s) = B(s)H(s) \text{ avec } H(s) = \begin{pmatrix} H_1(s) & H_2(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

où  $B(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}[s]$  (resp.  $\mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$ ) est une matrice bicausale ou bipropre et  $H(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle propre appelée forme de Hermite de la matrice rationnelle propre  $F(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}[s]$  où  $H_1(s) \in \mathbb{R}_p^{r \times r}(s)$  et  $H_2(s) \in \mathbb{R}_p^{(p-r) \times r}(s)$  (resp.  $\mathbb{R}_p^{(m-r) \times r}(s)$ ).  $H_2(s)$  est une matrice qui n'a pas de structure particulière, alors que  $H_1(s)$  est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) de rang  $r$  tel que le  $i$ -ème (resp.  $j$ -ème) élément diagonal est le polynôme  $s^{\mu_i}$  et tout autre élément de la  $i$ -ème ligne (resp.  $j$ -ème colonne) est une fraction

rationnelle  $\frac{\Delta_{ij}(s)}{s^{\mu_{ij}}}$  où  $\Delta_{ij}(s)$  de degré  $\mu_{ij} < \mu_i$ . Et donc si le  $i$ -ème (resp.  $j$ -ème) élément diagonal est égal à 1, i.e.  $\mu_i = 0$ , alors les autres éléments de la  $i$ -ème ligne (resp.  $j$ -ème colonne) sont nuls.

Le deuxième groupe de résultats concerne la forme de Smith d'une matrice polynomiale ou rationnelle propre obtenue par des opérations élémentaires aussi bien sur les colonnes que sur les lignes.

**Résultat B.3** Toute matrice polynomiale  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  peut être factorisée comme suit

$$P(s) = U(s)S_{mc}(s)\bar{U}(s)$$

où  $U(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  et  $\bar{U}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  sont deux matrices unimodulaires et  $S_{mc}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  est une matrice polynomiale unique appelée forme de Smith de la matrice polynomiale  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  qui se distingue par une structure particulière donnée par

$$S_{mc}(s) = \begin{pmatrix} \Psi(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \Psi(s) = \text{diag}(\Psi_i(s))$$

où les  $\Psi_i(s)$  sont des polynômes normalisés satisfaisant la propriété  $\Psi_i(s)$  divise  $\Psi_{i+1}(s)$  pour  $i \in [1, r-1]$ . Ces polynômes sont appelés polynômes invariants de  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  et peuvent être déterminés comme suit

$$\Psi_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \text{ pour } i \in [1, r-1]$$

où  $D_i(s)$  désigne le pgcd normalisé des mineurs d'ordre  $i$  de  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  avec  $D_0(s) = 1$ .

**Résultat B.4** Toute matrice rationnelle propre  $F(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  peut être factorisée comme suit

$$F(s) = B(s)S(s)\bar{B}(s)$$

où  $B(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  et  $\bar{B}(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  sont deux matrices bicausales ou bipropres et  $S(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle propre unique appelée forme de Smith de la matrice rationnelle propre  $F(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  qui se distingue par une structure particulière donnée par

$$S(s) = \begin{pmatrix} S_r(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } S_r(s) = \text{diag}(s^{-n_i})$$

où les  $n_i$  sont des entiers positifs satisfaisant la propriété  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_i \leq \dots \leq n_r$ .

Le troisième groupe de résultats concerne la forme de Smith-McMillan d'une matrice rationnelle qui permet de généraliser la forme de Smith d'une matrice polynomiale (resp. rationnelle propre) au cas d'une matrice fractionnaire qui n'est pas nécessairement propre.

**Résultat B.5** Toute matrice rationnelle  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  peut être factorisée comme suit

$$F(s) = U(s)S_{mc}(s)\bar{U}(s)$$

où  $U(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  et  $\bar{U}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  sont deux matrices unimodulaires et  $S_{mc}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle unique appelée forme de Smith-McMillan de la matrice rationnelle  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  qui se distingue par une structure particulière donnée par

$$S_{mc}(s) = \begin{pmatrix} \Lambda(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \Lambda(s) = \text{diag} \left( \frac{\Psi_i(s)}{\Phi_i(s)} \right)$$

où les  $\Psi_i(s)$  et  $\Phi_i(s)$  sont des polynômes normalisés premiers entre eux satisfaisant les propriétés suivantes

$$\Psi_i(s) \text{ divise } \Psi_{i+1}(s) \text{ pour } i \in [1, r-1]$$

et

$$\Phi_i(s) \text{ divise } \Phi_{i-1}(s) \text{ pour } i \in [2, r]$$

**Résultat B.6** Toute matrice rationnelle  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  de rang  $r \leq \min(p, m)$  peut être factorisée comme suit

$$F(s) = B(s)S_\infty(s)\bar{B}(s)$$

où  $B(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  et  $\bar{B}(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$  sont deux matrices bicausales ou bipropres et  $S_\infty(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  est une matrice rationnelle unique appelée forme de Smith-McMillan à l'infini de la matrice rationnelle  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  qui se distingue par une structure particulière donnée par

$$S_\infty(s) = \begin{pmatrix} S_{r\infty}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } S_{r\infty}(s) = \text{diag} (s^{-n_i})$$

où les  $n_i$  sont des entiers relatifs satisfaisant la propriété  $\leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_i \leq \dots \leq n_r$ .

Les formes de Hermite et de Smith ont été particulièrement utilisées pour le développement des factorisations polynomiales premières qui constituent l'essence de l'approche polynomiale, en l'occurrence la détermination du plus grand diviseur commun. Quant à la forme de Smith-McMillan (resp. Smith-McMillan à l'infini), elle se distingue par la mise en exergue des pôles et des zéros de transmission (resp. les pôles et zéros à l'infini) d'une fraction rationnelle. En effet, les zéros finis (resp. pôles finis) de la matrice rationnelle  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  sont les racines du polynôme  $\Psi_r(s)$  (resp.  $\Phi_1(s)$ ). Quant à la structure à l'infini, on dira que la fraction rationnelle admet un zéro (resp. pôle) à l'infini d'ordre  $n_i$  si  $n_i \geq 0$  (resp.  $n_i < 0$ ).

### B.3 Factorisations polynomiales à droite.

Le concept de factorisations polynomiales à droite est présenté d'une manière concise avec une attention particulière aux éventuelles simplifications adéquates.

**Définition B.6** Une factorisation polynomiale à droite d'une matrice rationnelle propre  $G(s)$  de dimension  $p \times m$  est une expression de la forme

$$F(s) = Q_d(s)P_d^{-1}(s)$$

où  $Q_d(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$  et  $P_d(s)$  est une matrice polynomiale inversible de dimension  $m$ . Le degré de la factorisation polynomiale à droite de  $F(s)$  est égal au degré du déterminant de  $P_d(s)$ .



Soit  $P(s)$  est le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions rationnelles  $F_{ij}(s)$ , alors  $B(s) = P(s)F(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$ . Cette relation suggère une factorisation polynomiale à droite de  $F(s)$ , en l'occurrence

$$F(s) = B(s) (P(s)I_m)^{-1}$$

Il est possible d'élaborer d'autres factorisations de degré plus petit modulo une simplification des facteurs communs entre les matrices polynomiales  $B(s)$  et  $P(s)I_m$ . Les définitions et résultats donnés ci-dessus permettent d'introduire naturellement les factorisations polynomiales des matrices rationnelles à partir des notions de diviseurs communs et de matrices premières entre elles.

**Définition B.7** Une matrice polynomiale  $\Delta_d(s)$  de dimension  $m \times m$  est appelée diviseur à droite de la matrice polynomiale  $P(s)$  de dimension  $p \times m$  s'il existe une matrice polynomiale  $\bar{P}(s)$  de dimension  $p \times m$  telle que

$$P(s) = \bar{P}(s)\Delta_d(s)$$

Il est évident que si  $P(s)$  est une matrice polynomiale carrée et non singulière, alors chaque diviseur de la matrice polynomiale  $P(s)$  est une matrice polynomiale non singulière.

**Exemple B.3** Considérons la matrice polynomiale

$$P(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) \\ (s+1)(s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

Les diviseurs à droite sont les matrices polynomiales de dimension 1 respectivement données par

$$\Delta_d^1(s) = 1, \Delta_d^2(s) = s+1, \Delta_d^3(s) = s+2 \text{ et } \Delta_d^4(s) = (s+1)(s+2)$$

On notera que chaque diviseur est un facteur commun des deux polynômes dans  $P(s)$  et que  $\Delta_d^4(s)$  est le diviseur de degré le plus élevé. Pour la matrice polynomiale relativement moins simple

$$P(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) & (s+3)(s+5) \\ 0 & (s+3)(s+4) \end{bmatrix}$$

on distingue deux diviseurs à droite

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}$$

**Définition B.8** Considérons deux matrices polynomiales  $P(s)$  et  $Q(s)$  ayant le même nombre de colonnes. Le plus grand commun diviseur à droite des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$ , que l'on notera  $\Delta_d^*(s) \triangleq \text{pgcdd}(P(s), Q(s))$ , est un diviseur à droite de  $P(s)$  et  $Q(s)$  dont tout autre diviseur commun à droite de ces matrices est un diviseur à droite. Et si tous les diviseurs communs à droite des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices unimodulaires, alors les matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont premières à droite.

Considérons la factorisation polynomiale à droite de la matrice rationnelle  $F(s)$ , soit  $F(s) = Q_d(s)P_d^{-1}(s)$ , et supposons que  $\Delta_d(s)$  est un diviseur commun des matrices polynomiales  $Q_d(s)$  et  $P_d(s)$ . Alors, compte tenu du fait que la matrice  $P_d(s)$  n'est pas singulière, le diviseur commun n'est pas singulier et  $\bar{P}_d(s) = P_d(s)R_d^{-1}(s)$  et  $\bar{Q}_d(s) = Q_d(s)R_d^{-1}(s)$  sont des matrices polynomiales qui permettent d'avoir une autre factorisation polynomiale à droite puisque

$$\bar{Q}_d(s)\bar{P}_d^{-1}(s) = Q_d(s)R_d^{-1}(s) (P_d(s)R_d^{-1}(s))^{-1} = Q_d(s)P_d^{-1}(s) = F(s)$$

Par ailleurs, on a

$$\deg(\det(P_d(s))) = \deg(\det(\bar{P}_d(s))) + \deg(\det(R_d(s)))$$

Le degré de la nouvelle factorisation polynomiale est nécessairement plus petit que celui de l'ancienne factorisation pourvu que  $P_d(s)$  et  $Q_d(s)$  ne soient pas premières entre elles à droite. Et la plus grande réduction de ce degré est atteinte pour le plus grand commun diviseur  $\Delta_d^*(s)$ . Il apparaît alors clairement que l'extraction des diviseurs communs à droite d'une factorisation polynomiale à droite est une généralisation, au cas des systèmes multivariables, du processus de simplification des facteurs communs d'une fonction de transfert dans le cas des systèmes monovariables. Les plus grands communs diviseurs de deux matrices polynomiales peuvent être aisément obtenus à partir des résultats suivants.

**Résultat B.7** Soient deux matrices polynomiales  $P(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  et  $Q(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ . Si une matrice unimodulaire  $U(s) \in \mathbb{R}^{(m+p) \times (m+p)}[s]$  et une matrice polynomiale  $\Delta_d^*(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  sont telles que

$$U(s) \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_d^*(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice  $\Delta_d^*(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  est un plus grand commun diviseur à droite des matrices  $P(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  et  $Q(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ .

**Preuve.** Notons d'abord que la matrice unimodulaire  $U(s)$  et son inverse, qui est une matrice unimodulaire que l'on notera  $V(s)$ , peuvent être partitionnées comme suit

$$U(s) = \begin{pmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V(s) = \begin{pmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{pmatrix}$$

On aura alors

$$\begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = U^{-1}(s) \begin{pmatrix} \Delta_d^*(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_d^*(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$P(s) = V_{11}(s)\Delta_d^*(s) \quad \text{et} \quad Q(s) = V_{21}(s)\Delta_d^*(s)$$

$\Delta_d^*(s)$  est donc un diviseur commun à droite des matrices polynomiales  $P(s)$  et  $Q(s)$ . Par ailleurs, si  $\Delta_d(s)$  est un diviseur commun à droite des matrices polynomiales  $P(s)$  et  $Q(s)$ , alors il existe deux matrices  $\bar{P}(s)$  et  $\bar{Q}(s)$  telles que

$$P(s) = \bar{P}(s)\Delta_d(s) \text{ et } Q(s) = \bar{Q}(s)\Delta_d(s)$$

Et compte tenu de la partition de la matrice  $U(s)$ , on a

$$\Delta_d^*(s) = U_{11}(s)P(s) + U_{12}(s)Q(s) = (U_{11}(s)\bar{P}(s) + U_{12}(s)\bar{Q}(s)) \Delta_d(s)$$

$\Delta_d(s)$  est donc un diviseur à droite de  $\Delta_d^*(s)$ , ce qui prouve que  $\Delta_d^*(s)$  est bien le plus grand diviseur commun à droite des matrices polynomiales  $P(s)$  et  $Q(s)$ .

CQFD

**Résultat B.8** Soient une matrice polynomiale non singulière  $P(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  et une matrice polynomiale  $Q(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes.

$\mathcal{P}1$ .  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices premières entre elles à droite.

$\mathcal{P}2$ . Il existe des matrices polynomiales  $X(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}[s]$  et  $Y(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  telles que

$$X(s)Q(s) + Y(s)P(s) = I_m$$

$\mathcal{P}3$ . Pour tout nombre complexe  $s$ , on a

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = m$$

**Preuve.** On montre que les implications  $\mathcal{P}1 \implies \mathcal{P}2$ ,  $\mathcal{P}2 \implies \mathcal{P}3$  et  $\mathcal{P}3 \implies \mathcal{P}1$  sont vraies.

$\mathcal{P}1 \implies \mathcal{P}2$  se déduit aisément du résultat précédent. En effet si  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices premières entre elles à droite, alors on a  $\text{pgcdd}(P(s), Q(s)) = I_m$ . Et compte tenu de la partition de la matrice unimodulaire  $U(s)$  adoptée pour la preuve du résultat 3.7, on peut conclure qu'il existe deux matrices polynomiales  $U_{11}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[p]$  et  $U_{12}(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}[p]$  telles que  $U_{11}(s)P(s) + U_{12}(s)Q(s) = I_m$ . On retrouve alors l'identité de Bezout avec  $X(s) = U_{12}(s)$  et  $Y(s) = U_{11}(s)$ .

$\mathcal{P}2 \implies \mathcal{P}3$  est établie en remarquant tout simplement que l'identité de Bezout peut se récrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} Y(s) & X(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = I_m$$

En effet, supposons qu'il existe un nombre complexe  $\eta$  tel que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P(\eta) \\ Q(\eta) \end{pmatrix} < m$$

alors la proposition  $\mathcal{P}2$  ne peut être vraie.

Pour montrer que  $\mathcal{P}3 \implies \mathcal{P}1$ , supposons que  $\mathcal{P}3$  est vraie et que  $\Delta_d(s)$  est un diviseur à droite des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$ . Alors ils existent  $\bar{P}(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  et  $\bar{Q}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  telles que

$$\begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}(s) \\ \bar{Q}(s) \end{pmatrix} \Delta_d(s)$$

Par ailleurs, si  $\det(\Delta_d(s))$  est un polynôme de degré au moins un et de racine  $\eta$ , alors  $\Delta_d(\eta)$  est une matrice complexe de rang inférieur à celui de la matrice polynomiale  $\Delta_d(s)$ . On aura alors

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P(\eta) \\ Q(\eta) \end{pmatrix} \leq \text{rang}(\eta) < m$$

ce qui est contractoire par rapport au fait que  $\mathcal{P}3$  soit vraie.  $\Delta_d(\eta)$  est donc une constante non nulle, i.e.  $\Delta_d(s)$  est une matrice unimodulaire, et donc  $\mathcal{P}1$  est vraie.

CQFD

Par ailleurs, soient  $\Delta_d^*(s)$  et  $\bar{\Delta}_d^*(s)$  deux plus grands communs diviseurs à droite des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$ , alors il existe deux matrices polynomiales  $U_d(s)$  et  $\bar{U}_d(s)$  telles que  $\Delta_d^*(s) = U_d(s)\bar{\Delta}_d^*(s)$  et  $\bar{\Delta}_d^*(s) = \bar{U}_d(s)\Delta_d^*(s)$ , soit  $\Delta_d^*(s) = U_d(s)\bar{U}_d(s)\Delta_d^*(s)$ . Et si  $\Delta_d^*(s)$  est inversible, alors  $U_d(s)$  et  $\bar{U}_d(s)$  sont unimodulaires. Ceci nous amène naturellement au résultat suivant

**Résultat B.9** Supposons que la matrice polynomiale  $\begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{pmatrix}$  est de rang plein en colonnes, les plus grands communs diviseurs à droite des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices unimodulaires.

Ce résultat conduit naturellement à la définition du concept de matrices premières entre elles.

**Définition B.9** Deux matrices polynomiales ayant le même nombre de colonnes sont premières entre elles à droite si et seulement si leurs plus grands communs diviseurs à droite sont des matrices unimodulaires. La factorisation polynomiale  $F(s) = Q_d(s)P_d^{-1}(s)$  est qualifiée de première à droite si les matrices  $Q_d(s)$  et  $P_d(s)$  sont premières entre elles à droite.

**Exemple B.4** La matrice de fraction rationnelle

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+5} \end{pmatrix}$$

peut se mettre sous la forme d'une factorisation polynomiale première à droite donnée par

$$P_d(s) = \begin{pmatrix} (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & (s+2)(s+5) \end{pmatrix} \text{ et } Q_d(s) = \begin{pmatrix} s+3 & s+5 \\ s+1 & s+2 \end{pmatrix}$$

## B.4 Factorisations polynomiales à gauche.

Le concept de factorisations polynomiales à gauche peut être développé aisément par une simple transposition des définitions et résultats associés au concept de factorisations polynomiales à droite données ci-dessus.

**Définition B.10** Une factorisation polynomiale à gauche d'une matrice rationnelle propre  $G(s)$  de dimension  $p \times m$  est une expression de la forme

$$F(s) = P_g^{-1}(s)Q_g(s)$$

où  $P_g(s)$  est une matrice polynomiale inversible de dimension  $m$  et  $Q_g(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$ . Le degré de la factorisation polynomiale à gauche de  $F(s)$  est égal au degré du déterminant de  $P_g(s)$ .

Une factorisation polynomiale à gauche évidente de la matrice rationnelle  $F(s)$  est donnée par

$$F(s) = (P(s)I_p)^{-1} B(s)$$

où  $P(s)$  est le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions rationnelles  $F_{ij}(s)$ . Les factorisations polynomiales à gauche des matrices rationnelles peuvent être réduites à partir d'une simplification des diviseurs communs à gauche de ses composantes matricielles.

**Définition B.11** Une matrice polynomiale  $\Gamma_g(s)$  de dimension  $p \times p$  est appelée diviseur à gauche de la matrice polynomiale  $P(s)$  de dimension  $p \times m$  s'il existe une matrice polynomiale  $\tilde{P}(s)$  de dimension  $p \times m$  telle que

$$P(s) = \Gamma_g(s)\tilde{P}(s)$$

**Exemple B.5** Considérons la matrice polynomiale

$$P(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) \\ (s+1)(s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

La matrice polynomiale

$$\Gamma_g(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

est un diviseur à gauche

**Définition B.12** Considérons deux matrices polynomiales  $P(s)$  et  $Q(s)$  ayant le même nombre de lignes. Le plus grand commun diviseur à gauche des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$ , que l'on notera  $\Gamma_g^*(s) \triangleq \text{pgcdg}(P(s), Q(s))$ , est un diviseur à gauche de  $P(s)$  et  $Q(s)$  dont tout autre diviseur commun à gauche de ces matrices est un diviseur à gauche. Et si tous les diviseurs communs à gauche des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices unimodulaires, alors les matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont premières à gauche.

Les plus grands communs diviseurs à gauche de deux matrices polynomiales sont déterminés à la lumière des résultats suivants.

**Résultat B.10** Soient deux matrices polynomiales  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  et  $Q(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ . Si une matrice unimodulaire  $U(s) \in \mathbb{R}^{(p+m) \times (p+m)}[s]$  et une matrice polynomiale  $\Gamma_g^*(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  sont telles que

$$\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \end{bmatrix} U(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_g^*(s) & 0 \end{bmatrix}$$

Alors la matrice  $\Gamma_g^*(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  est un plus grand commun diviseur à gauche des matrices  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  et  $Q(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ .

**Résultat B.11** Soient une matrice polynomiale non singulière  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  et une matrice polynomiale  $Q(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes.

P1.  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices premières entre elles à gauche.

P2. Il existe des matrices polynomiales  $X(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}[s]$  et  $Y(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  telles que

$$Q(s)X(s) + P(s)Y(s) = I_p$$

P3. Pour tout nombre complexe  $s$ , on a

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \end{pmatrix} = m$$

Par ailleurs, soient  $\Delta_g^*(s)$  et  $\bar{\Delta}_g^*(s)$  deux plus grands communs diviseurs à gauche des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$ , alors il existe deux matrices polynomiales  $U_g(s)$  et  $\bar{U}_g(s)$  telles que  $\Delta_g^*(s) = U_g(s)\bar{\Delta}_g^*(s)$  et  $\bar{\Delta}_g^*(s) = \bar{U}_g(s)\Delta_g^*(s)$ , soit  $\Delta_g^*(s) = U_g(s)\bar{U}_g(s)\Delta_g^*(s)$ . Et si  $\Delta_g^*(s)$  est inversible, alors  $U_g(s)$  et  $\bar{U}_g(s)$  sont unimodulaires. Ceci nous amène naturellement au résultat suivant

**Résultat B.12** Supposons que la matrice polynomiale  $\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \end{pmatrix}$  est de rang plein en lignes, les plus grands communs diviseurs à gauche des matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont des matrices unimodulaires.

Ce résultat conduit naturellement à la définition du concept de matrices premières entre elles à gauche.

**Définition B.13** Deux matrices polynomiales ayant le même nombre de lignes sont dites premières entre elles à gauche si et seulement si leurs plus grands communs diviseurs à gauche sont des matrices unimodulaires. La factorisation polynomiale  $F(s) = P_g^{-1}(s)Q_g(s)$  est qualifiée de première à gauche si les matrices  $P_g(s)$  et  $Q_g(s)$  sont premières entre elles à gauche.

**Exemple B.6** La matrice de fraction rationnelle

$$F(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+5} \end{pmatrix}$$

peut se mettre sous la forme d'une factorisation polynomiale première à gauche donnée par

$$P_g(s) = \begin{pmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+3)(s+5) \end{pmatrix} \text{ et } Q_g(s) = \begin{pmatrix} s+2 & s+1 \\ s+5 & s+3 \end{pmatrix}$$

Notons que deux matrices polynomiales peuvent être premières entre elles à gauche sans être premières entre elles à droite pour autant comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple B.7** Les matrices rationnelles

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & -1 \\ -s & s^2 \end{bmatrix} \text{ et } Q(s) = \begin{bmatrix} s & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont premières entre elles à gauche mais ne sont pas premières entre elles à droite puisque

$$\text{La forme de Smith de } \begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \end{bmatrix} \text{ est égale à } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alors que

$$\text{La forme de Smith de } \begin{bmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} \text{ est égale à } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La relation entre les factorisations polynomiales premières à droite et à gauche est particulièrement mise en exergue par le résultat suivant.

**Résultat B.13** Considérons une fraction rationnelle propre  $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  décrite par deux factorisation polynomiales premières à droite et à gauche, soit

$$F(s) = Q_d(s)P_d^{-1}(s) = P_g^{-1}(s)Q_g(s)$$

Alors il existe un scalaire non nul  $\delta$  tel que  $\det(P_d(s)) = \delta \det(P_g(s))$ .

**Preuve.** Comme  $P_d(s)$  et  $Q_d(s)$  sont des matrices polynomiales premières entre elles à droite, il existe une matrice unimodulaire  $U(s) \in \mathbb{R}^{(p+m) \times (p+m)}[s]$  telle que

$$U(s) \begin{pmatrix} P_d(s) \\ Q_d(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et comme l'inverse d'une matrice modulaire est une matrice modulaire, on peut partitionner  $U(s)$  et son inverse que l'on notera  $V(s)$  comme suit

$$U(s) = \begin{pmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{pmatrix} \text{ et } V(s) = \begin{pmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{pmatrix}$$

On aura alors

$$P_d(s) = V_{11}(s) \text{ et } Q_d(s) = V_{21}(s)$$

$V_{11}(s)$  est donc une matrice unimodulaire. On peut alors déterminer aisément la matrice polynomiale  $U_{22}(s)$  à partir de la remarque 2.1, soit

$$U_{22}(s) = (V_{22}(s) - V_{21}(s)V_{11}^{-1}(s)V_{12}(s))^{-1}$$

$U_{22}(s)$  est donc une matrice unimodulaire puisque les  $V_{ij}(s)$  sont des matrices polynomiales.

Par ailleurs, en utilisant le fait que  $U(s)V(s) = I_{m+p}$  et que  $V_{11}(s) = P_d(s)$  et  $V_{21}(s) = Q_d(s)$ , on aura

$$U_{21}(s)V_{12}(s) + U_{22}(s)V_{22}(s) = I_p \text{ et } U_{21}(s)P_d(s) + U_{22}(s)Q_d(s) = 0_m$$

$U_{21}(s)$  et  $U_{22}(s)$  sont alors des matrices polynomiales premières à gauche qui permettent de définir une factorisation polynomiale première à gauche  $F(s) = -U_{22}^{-1}(s)U_{21}(s)$ .

Et en utilisant une autre fois la remarque 2.1 tout en tenant compte du fait que  $V_{11}(s) = P_d(s)$  et  $U_{22}^{-1}(s) = V_{22}(s) - V_{21}(s)V_{11}^{-1}(s)V_{12}(s)$ , on aura

$$\det(V(s)) = \det(P_d(s)) \det(U_{22}^{-1}(s))$$

On peut ainsi conclure que pour la factorisation polynomiale première  $F(s) = -U_{22}^{-1}(s)U_{21}(s)$ , on a bien la relation  $\det(U_{22}(s)) = \delta \det(P_d(s))$  avec  $\delta = \det(U(s))$ . Et ce résultat est vrai pour toutes les factorisations polynomiales à gauche de fraction rationnelle  $F(s)$  en vertu de la relation unimodulaire sous-jacente.

*CQFD*

**Remarque B.1** La preuve donnée ci-dessus est constructive dans la mesure où elle permet d'élaborer une factorisation polynomiale première à gauche d'une fraction rationnelle propre à partir de sa factorisation polynomiale première à droite.

## B.5 Propriété des lignes et des colonnes.

La propriété des colonnes et des lignes d'une matrice polynomiale est naturellement introduite à partir de sa matrice des coefficients de plus haut degré par colonne ou par ligne définie comme suit.

**Définition B.14** La matrice des coefficients de plus haut degré par colonne (resp. par ligne) d'une matrice polynomiale  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ , que l'on notera  $\Gamma_c(P(s))$  (resp.  $\Gamma_\ell(P(s))$ ), est constituée des coefficients des termes de plus haut degré de chaque colonne (resp. ligne) de  $P(s)$ .  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  est dite colonne-propre ou colonne-réduite (resp. ligne-propre ou ligne-réduite) si  $\Gamma_c(P(s))$  est de rang  $m$  (resp.  $\Gamma_\ell(P(s))$  est de rang  $p$ ).

On notera qu'une matrice polynomiale colonne-propre (resp. ligne-propre) n'est pas nécessairement ligne-propre (resp. colonne-propre) comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple B.8** Considérons la matrice polynomiale

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier aisément que

$$\Gamma_\ell(P(s)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma_c(P(s)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P(s)$  est donc une matrice ligne-propre sans être une matrice colonne-propre pour autant.



Les résultats suivants permettent de caractériser les notions de propriété des lignes et des colonnes d'une matrice polynomiale et de montrer qu'il est possible de rendre colonne-propre (res. ligne-propre) une matrice polynomiale de rang plein en colonnes (resp. en lignes) modulo une multiplication à droite (resp. à gauche) par une matrice unimodulaire.

**Résultat B.14** Soit une matrice polynomiale  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  de rang plein en colonnes (resp. en lignes).  $P(s)$  est colonne-propre (resp. ligne-propre) si et seulement si

$$\deg(P(s)) = \sum_{i=1}^m \deg(P_{ci}(s))$$

$$\left( \text{resp. } \deg(P(s)) = \sum_{i=1}^p \deg(P_{li}(s)) \right)$$

**Résultat B.15** Soient  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  avec  $\text{rang}(P(s)) = m$  (resp.  $\text{rang}(P(s)) = p$ ). On peut toujours trouver une matrice unimodulaire  $U_d(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  (resp.  $U_g(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$ ) telle que  $P_d(s) = P(s)U_d(s)$  est une matrice colonne-propre (resp.  $P_g(s) = U_g(s)P(s)$  est une matrice ligne-propre).

Les résultats suivants confirment que les factorisations polynomiales généralisent bien la notion de fraction rationnelle du cas scalaire au cas matriciel.

**Résultat B.16** Soit  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  une matrice rationnelle propre (resp. strictement propre) et  $Q_d(s)P_d^{-1}(s)$  l'une de ses factorisations polynomiales à droite. Alors, on a

$$\deg(P_{dci}(s)) \geq \deg(Q_{dci}(s)) \quad (\text{resp. } \deg(P_{dcj}(s)) > \deg(Q_{dcj}(s)))$$

où  $P_{dcj}(s)$  représente la  $j$ -ème colonne de la matrice  $P_d(s)$  et  $Q_{dcj}(s)$  représente la  $j$ -ème colonne de la matrice  $Q_d(s)$ .

**Résultat B.17** Soient deux matrices polynomiales  $P_d(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  et  $Q_d(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  avec  $P_d(s)$  inversible et colonne-propre. La matrice rationnelle  $P_g^{-1}(s)Q_g(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  est propre (resp. strictement propre) si et seulement si

$$\deg(P_{dcj}(s)) \geq \deg(Q_{dcj}(s)) \quad (\text{resp. } \deg(P_{dcj}(s)) > \deg(Q_{dcj}(s)))$$

où  $P_{dcj}(s)$  représente la  $j$ -ème colonne de la matrice  $P_d(s)$  et  $Q_{dcj}(s)$  représente la  $j$ -ème colonne de la matrice  $Q_d(s)$ .

Par ailleurs, on peut déterminer aisément les pôles et les zéros finis d'une matrice rationnelle à partir des factorisations polynomiales premières à droite et à gauche issues de sa forme de Smith-McMillan.

**Résultat B.18** Soit  $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  une matrice rationnelle propre de dimension  $(p \times m)$  et  $Q_d(s)P_d^{-1}(s)$  (resp.  $P_g^{-1}(s)Q_g(s)$ ) une factorisation polynomiale première à droite (resp. à gauche). Alors on a les propriétés suivantes

P1. Les pôles de la matrice rationnelle  $F(s)$  sont les racines du polynôme  $\det(P_d(s)) = \det(P_g(s))$ .

P2. Les zéros de transmission de la matrice rationnelle  $F(s)$  sont les racines des polynômes invariants des matrices  $Q_d(s)$  et  $Q_g(s)$ .

**Preuve.** Compte tenu de la forme de Smith-McMillan donnée au résultat 3.5, on peut en déduire des factorisations polynomiales premières à droite et à gauche, soit

$$F(s) = Q_d(s)P_d^{-1}(s) = P_g^{-1}(s)Q_g(s)$$

avec

$$Q_d(s) = U(s) \begin{pmatrix} Z(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_d(s) = V^{-1}(s) \begin{pmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

$$Q_d(s) = \begin{pmatrix} Z(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U(s) \quad \text{et} \quad P_d(s) = \begin{pmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{pmatrix} V^{-1}(s)$$

où  $Z(s)$  et  $P(s)$  sont les matrices diagonales

$$Z(s) = \text{diag}(\Psi_i(s)) \quad \text{et} \quad P(s) = \text{diag}(\Phi_i(s))$$

Il est évident que les pôles (resp. les zéros) avec leurs multiplicités de la matrice rationnelle  $F(s)$  ne sont autres que les racines des polynômes invariants de la matrice  $P_d(s)$  ou  $P_g(s)$  (resp.  $Q_d(s)$  ou  $P_d(s)$ ). Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que les matrices  $P(s)$  ou  $Q(s)$  associées à une factorisation polynomiale à droite ont la forme de Smith-McMillan puisque le même résultat peut être établi dans le cas d'une factorisation polynomiale première à gauche. Soient deux factorisations polynomiales premières à droite  $Q_d(s)P_d^{-1}(s)$  et  $\bar{Q}_d(s)\bar{P}_d^{-1}(s)$  de la matrice rationnelle  $F(s)$ . Compte tenu du résultat 3.7, il existe des matrices unimodulaires  $U(s)$ ,  $W(s)$ ,  $\bar{U}(s)$  et  $\bar{W}(s)$  telles que

$$U(s) \begin{pmatrix} P_d(s) \\ Q_d(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{U}(s) \begin{pmatrix} \bar{P}_d(s) \\ \bar{Q}_d(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{W}(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} W^{-1}(s) & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} U(s) \begin{pmatrix} P_d(s) \\ Q_d(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{W}^{-1}(s) & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \bar{U}(s) \begin{pmatrix} \bar{P}_d(s) \\ \bar{Q}_d(s) \end{pmatrix}$$

Il existe donc deux matrices unimodulaires  $V(s)$  et  $\bar{V}(s)$  telles que

$$V(s) \begin{pmatrix} I_m \\ Q_d(s)P_d^{-1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_d^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{V}(s) \begin{pmatrix} I_m \\ \bar{Q}_d(s)\bar{P}_d^{-1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_d^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aura alors

$$V^{-1}(s) \begin{pmatrix} P_d^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{V}^{-1}(s) \begin{pmatrix} \bar{P}_d^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = V(s)\bar{V}^{-1}(s) \begin{pmatrix} \bar{P}_d^{-1}(s)P_d(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il existe donc une matrice unimodulaire  $U_d(s)$  telle que  $P_d(s) = \bar{P}_d(s)U_d(s)$  et donc  $P_d(s)$  et  $\bar{P}_d(s)$  ont la même forme de Smith. Par ailleurs, comme  $P_d(s) = \bar{P}_d(s)U_d(s)$ , on aura

$$Q_d(s)U_d^{-1}(s)\bar{P}_d^{-1}(s) = \bar{Q}_d(s)\bar{P}_d^{-1}(s)$$

Ce qui permet d'en déduire que  $Q_d(s) = \bar{Q}_d(s)U_d(s)$  et donc  $Q_d(s)$  et  $\bar{Q}_d(s)$  ont la même forme de Smith.

## B.6 Conclusion.

*Ce chapitre est une synthèse sur les matrices polynomiales et rationnelles avec une attention particulière aux définitions et résultats qui constituent l'essence de l'approche polynomiale de la théorie des systèmes linéaires, en l'occurrence les formes canoniques des matrices polynomiales et rationnelles, les factorisations polynomiales premières à gauche et à droite des fractions rationnelles propres et la propriété des colonnes et des lignes d'une matrice polynomiale. Ces outils fondamentaux ont particulièrement permis d'étendre d'une manière efficace tous les résultats qui ont été développés pour les systèmes monovariabiles au cas des systèmes multivariabiles tout en révélant l'importance de l'algèbre dans le développement de la théorie des systèmes linéaires.*

## B.7 Problèmes

*On propose un ensemble de problèmes allant d'une évaluation autonome des connaissances acquises à une modélisation vigoureuse d'une classe de systèmes échantillonnés en passant par le confort de quelques remarques pertinentes.*



# Annexe C

## Equations algébriques de Riccati

L'équation de Riccati constitue la pierre angulaire des problèmes de contrôle et d'estimation optimale du type  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Soient  $A$ ,  $Q$  et  $R$  des matrices réelles de dimension  $n \times n$  avec  $Q$  et  $R$  symétriques, alors une équation algébrique de Riccati n'est autre que l'équation matricielle

$$A^*X + XA + XRX + Q = 0 \quad (\text{C.1})$$

où  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est l'inconnue. On notera que la solution de cette équation, sous réserve d'existence, n'est pas unique mais si l'on restreint l'ensemble des solutions aux matrices symétriques, définies non négatives et stabilisantes, i.e.

$$\{X \in \mathbb{R}^{n \times n} / X = X^* \geq 0 \text{ et } \mathcal{V}(A + RX) \in \mathcal{D}_{sa}\} \quad (\text{C.2})$$

alors la solution, sous réserve d'existence, est unique. Ce type de solution est particulièrement considéré dans les applications relevant de la théorie des systèmes.

On découvrira dans ce qui suit que la résolution de l'équation algébrique de Riccati C.1 est particulièrement basée sur le sous espace propre et stable de la matrice hamiltonienne

$$H = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (\text{C.3})$$

Cette matrice est caractérisée par quatre faits remarquables que l'on peut vérifier aisément.

F1. Le premier fait concerne l'expression de l'équation algébrique de Riccati en fonction de la matrice hamiltonienne

$$\begin{pmatrix} -X & I_n \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.4})$$

F2. Le deuxième fait relève de la similitude de la matrice hamiltonienne et sa transposée, soit

$$-H^* = J^{-1}HJ \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Comme  $H$  est une matrice réelle, on peut en déduire naturellement que si  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice hamiltonienne, alors il en est de même pour son opposée, soit

$$\lambda \in \mathcal{V}(H) \implies -\lambda \in \mathcal{V}(H) \quad (\text{C.6})$$

*F3. Le troisième fait concerne la similitude de la matrice hamiltonienne avec une matrice dépendant explicitement de la matrice  $A+RX$  qui permet de définir la solution stabilisante, soit*

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix}^{-1} H \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+RX & R \\ 0 & -(A+RX)^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

*On peut alors en déduire naturellement que*

$$\det(sI_{2n} - H) = \det(sI_n - A - RX) (-1)^n \det(-sI_n + A + RX) \quad (\text{C.8})$$

*F4. Le quatrième fait consiste en la décomposition de la matrice hamiltonienne sous la forme de Schur*

$$H = U^* \Lambda U \text{ avec } \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

*où  $U$  est une matrice complexe unitaire dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de la matrice hamiltonienne et  $\Lambda$  est la matrice de Jordan associée aux valeurs propres de la matrice hamiltonienne : le bloc  $\Lambda_{11}$  est associé aux  $n$  valeurs propres dont la partie réelle est négative ou nulle, alors que  $\Lambda_{22}$  correspond aux  $n$  valeurs propres qui ne figurent pas dans  $\Lambda_{11}$ .*

**Remarque C.1** *Si la matrice hamiltonienne n'a aucune valeur propre sur l'axe imaginaire, alors le bloc  $\Lambda_{11}$  correspond aux valeurs propres à partie réelle négative, soit  $\mathcal{V}(\Lambda_{11}) = \mathcal{V}(H) \cap \mathcal{D}_{sa}$ .*

*Dans ce qui suit, on présente deux ensembles de résultats fondamentaux sur les équations algébriques de Riccati. Le premier est consacré aux solutions générales, alors que le second est particulièrement dédiée aux solutions stabilisantes.*

## C.1 Solutions générales.

*On distingue quatre résultats fondamentaux sur la résolution des équations algébriques de Riccati. Le premier résultat offre une méthode de résolution de l'équation algébrique de Riccati.*

**Résultat C.1** *Soit  $\mathcal{E} \in \mathbb{C}^{2n}$  un sous-espace invariant de dimension  $n$  associé à la matrice hamiltonienne  $H$  et  $V_1$  et  $V_2$  deux matrices complexes telles que*

$$\mathcal{E} = \text{Im} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times n} \quad (\text{C.10})$$

*Si  $V_1$  est inversible, alors  $X = V_2 V_1^{-1}$  est une solution de l'équation algébrique de Riccati et cette solution est indépendante de la base considérée pour la définition du sous espace invariant  $\mathcal{E}$ . Par ailleurs, on a  $\mathcal{V}(A+RX) = \mathcal{V}(H|_{\mathcal{E}})$ .*

**Preuve.** *Comme  $\mathcal{E} \in \mathbb{C}^{2n}$  est un sous espace invariant de la matrice hamiltonienne, il existe une matrice  $\Lambda \in \mathbb{C}^{2n \times n}$  telle que*

$$\begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Lambda \quad (\text{C.11})$$

En postmultipliant les deux membres de l'équation C.11 par la matrice  $V_1^{-1}$ , qui existe puisque  $V_1$  est régulière, on aura

$$\begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ V_2 V_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \Lambda V_1^{-1} \\ V_2 \Lambda V_1^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Et en prémultipliant les deux membres de l'équation C.12 par la matrice  $\begin{pmatrix} -V_2 V_1^{-1} & I_n \end{pmatrix}$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} -V_2 V_1^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ V_2 V_1^{-1} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.13})$$

puisque

$$\begin{pmatrix} -V_2 V_1^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \Lambda V_1^{-1} \\ V_2 \Lambda V_1^{-1} \end{pmatrix} = 0$$

En développant le premier membre de l'équation C.13, on obtient

$$V_2 V_1^{-1} A + A^* V_2 V_1^{-1} + V_2 V_1^{-1} R V_2 V_1^{-1} + Q = 0 \quad (\text{C.14})$$

Ce qui montre que la matrice  $V_2 V_1^{-1}$  est bien une solution de l'équation algébrique de Riccati (C.1). Et comme un changement de base peut être naturellement réalisé modulo une multiplication par une matrice régulière de dimension appropriée  $T$ , soit

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} V_1 T \\ V_2 T \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

la solution de l'équation algébrique de Riccati correspondante est bien indépendante de la base génératrice du sous-espace propre de stabilité puisque

$$X_T = V_2 T (V_1 T)^{-1} = V_2 V_1^{-1} = X$$

Par ailleurs, compte tenu de l'équation C.12, on obtient

$$A + RX = V_1 \Lambda V_1^{-1} \iff \mathcal{V}(A + RX) = \mathcal{V}(\Lambda) = \mathcal{V}(H|\mathcal{E})$$

*CQFD*

Le deuxième résultat n'est autre que la réciproque du premier résultat. Il permet de mieux apprécier la résolution d'une équation algébrique de Riccati.

**Résultat C.2** Si une matrice  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est une solution de l'équation algébrique de Riccati C.1, alors il existe une matrice régulière  $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et une matrice  $V_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que  $X = V_2 V_1^{-1}$  et les colonnes de la matrice  $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times n}$  forment une base d'un sous espace invariant de la matrice hamiltonienne  $H$ .

**Preuve.** Posons  $\Lambda \triangleq A + RX$ , on aura  $X\Lambda = XA + XRX = -Q - A^*X$  puisque  $X$  est une solution de l'équation algébrique de Riccati C.1. Ces deux relations peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix} \Lambda \quad (\text{C.16})$$

qui permet de conclure que les colonnes de  $\begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times n}$  génèrent bien un sous-espace invariant de la matrice hamiltonienne. Ceci suggère de prendre  $V_1 = I_n$  et  $V_2 = X$  pour répondre aux conditions requises par le résultat.

CQFD

L'exemple suivant est un bon exercice d'illustration des résultats donnés ci dessus sur la résolution des équations algébriques de Riccati.

**Exemple C.1** Considérons le cas où les matrices  $A$ ,  $R$  et  $Q$  sont respectivement donnés par

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le spectre de la matrice hamiltonienne associée et les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés correspondants sont respectivement donnés par

$$\mathcal{V}(H) = \{1, 1, -1, -1\}$$

et

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation algébrique de Riccati peuvent alors être déterminées à partir des sous-espaces invariants de la matrice hamiltonienne, soit  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{G}\{v_1, v_2\}$ ,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{G}\{v_1, v_3\}$  et  $\mathcal{E}_3 = \mathcal{G}\{v_1, v_2\}$ . On en profitera pour préciser le spectre de la matrice  $A + RX$ .

$$\mathcal{E}_1 \longrightarrow X = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \implies \mathcal{V}(A + RX) = \{1, 1\}$$

$$\mathcal{E}_2 \longrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \mathcal{V}(A + RX) = \{1, -1\}$$

$$\mathcal{E}_3 \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathcal{V}(A + RX) = \{-1, -1\}$$

On notera que  $\mathcal{G}\{v_1, v_4\}$ ,  $\mathcal{G}\{v_2, v_3\}$  et  $\mathcal{G}\{v_2, v_4\}$  ne sont pas des sous-espaces  $H$  invariants.

Le troisième résultat précise une condition suffisante pour que la solution de l'équation algébrique de Riccati soit une matrice hermitienne qui n'est pas nécessairement réelle.

**Résultat C.3** Soit  $\mathcal{E} \in \mathbb{C}^{2n}$  un sous espace invariant de dimension  $n$  de la matrice hamiltonienne  $H$  et soit la paire matricielle  $(V_1, V_2) \in \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$\mathcal{E} = \text{Im} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \text{ et } \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \triangleq \mathcal{V}(H|_{\mathcal{E}})$$

Si les éléments du spectre  $\mathcal{V}(H|_{\mathcal{E}})$  vérifient la propriété  $\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0 \forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$ , alors  $V_1^* V_2$  est une matrice hermitienne. Et si en plus,  $V_1$  est une matrice régulière, alors  $X = V_2 V_1^{-1}$  est une matrice hermitienne.



**Preuve.** Puisque  $\mathcal{E}$  est un sous espace invariant de la matrice hamiltonienne  $H$ , il existe une matrice  $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$\mathcal{V}(\Lambda) = \mathcal{V}(H|_{\mathcal{E}}) \quad \text{et} \quad H \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Lambda$$

Et si l'on pré-multiplie cette équation par  $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J$ , on aura

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J H \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Lambda \quad (\text{C.17})$$

Et comme  $JH$  est matrice réelle symétrique (et donc hermitienne), il en est de même pour le premier membre de l'équation C.17 et donc son second membre, soit

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \Lambda = \Lambda^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = -\Lambda^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(-V_1^* V_2 + V_2^* V_1) \Lambda + \Lambda^* (-V_1^* V_2 + V_2^* V_1) = 0$$

qui n'est autre qu'une équation de Lyapunov qui admet une solution unique

$$-V_1^* V_2 + V_2^* V_1 = 0$$

compte tenu du fait que  $\lambda_i(\Lambda) + \bar{\lambda}_j(\Lambda) \neq 0 \quad \forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$ . Ceci implique que la matrice  $V_1^* V_2$  est hermitienne.

Par ailleurs, si la matrice  $V_1$  est une matrice régulière, alors la solution peut se récrire sous la forme  $X = (V_1^{-1})^* (V_1^* V_2) (V_1^{-1})$  qui montre clairement que la solution est bien hermitienne puisque la matrice  $V_1^* V_2$  est hermitienne.

C.Q.F.D

Le quatrième résultat donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions de l'équation algébrique de Riccati soient réelles.

**Résultat C.4** Soit  $\mathcal{E} \in \mathbb{C}^{2n}$  un sous-espace invariant de dimension  $n$  de la matrice hamiltonienne  $H$  et soit la paire matricielle  $(V_1, V_2) \in \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que  $V_1$  est inversible et les colonnes de  $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$  forment une base de  $\mathcal{E}$ . Alors  $X = V_2 V_1^{-1}$  est une matrice réelle si et seulement si  $\mathcal{E}$  est un sous-espace symétrique et conjugué, i.e. satisfaisant la propriété  $v \in \mathcal{E} \implies \bar{v} \in \mathcal{E}$ .

**Preuve.** Notons d'abord que le sous-espace invariant par  $H$  peut être défini à partir de la solution de l'équation algébrique de Riccati comme suit  $\mathcal{E} = \text{Im} \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix}$ . La condition est donc nécessaire puisque  $\mathcal{E}$  est un sous espace symétrique conjugué si la solution  $X$  est réelle. Montrons maintenant que la condition est suffisante. Pour ce faire, supposons que  $\mathcal{E}$  est un sous espace symétrique et conjugué, alors il existe une matrice régulière  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} P$$

Cette propriété permet de conclure naturellement que la solution de l'équation algébrique de Riccati est bien réelle puisque

$$\bar{X} = \bar{V}_2 \bar{V}_1^{-1} = (V_2 P) (V_1 P)^{-1} = V_2 V_1^{-1} = X$$

*CQFD*

L'exemple suivant montre que les solutions d'une équation algébrique de Riccati ne sont pas nécessairement hermitiennes ou réelles et que la condition  $\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0 \forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$ , qui exclut la possibilité d'avoir des valeurs propres sur l'axe imaginaire, n'est pas une condition nécessaire pour l'existence d'une solution hermitienne.

**Exemple C.2** Considérons le cas où les matrices  $A$ ,  $R$  et  $Q$  sont respectivement données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le spectre de la matrice hamiltonienne associée et les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés correspondants sont respectivement donnés par

$$\mathcal{V}(H) = \{1, j, j, -1, -j, -j\}$$

On notera que cette matrice ne vérifie pas la condition  $\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0 \forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$  puisqu'elle admet des valeurs propres sur l'axe imaginaire mais la solution issue du sous espace invariant associé aux valeurs propres  $\{-1, j, -j\}$ , soit

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique réelle et définie non négative. Par ailleurs, on peut vérifier aisément que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0.5(1+j) & 0.5(1-j) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation algébrique qui n'est ni hermitienne ni réelle.

## C.2 Solutions stabilisantes.

La résolution de l'équation algébrique de Riccati requiert une méthode appropriée pour la détermination des sous-espaces invariants de la matrice hamiltonienne. Les solutions dépendent du sous-espace invariant considéré et ne sont pas nécessairement stabilisantes : une propriété vitale pour les applications relevant de la théorie des systèmes, en l'occurrence la commande et l'estimation optimales. A la lumière des faits  $\mathcal{F}2$  et  $\mathcal{F}3$  et du résultat C.1, on peut exhiber deux hypothèses nécessaires pour avoir une solution stabilisante.

- La première hypothèse est intrinsèque à la nature stabilisante de la solution, soit

$$\mathcal{H}1. \quad \mathcal{V}(H) \cap \mathcal{A}_{im} = \emptyset$$

Cette hypothèse, qui stipule que la matrice hamiltonienne n'admet aucune valeur propre sur l'axe imaginaire, permet de décomposer le spectre de la matrice hamiltonienne en deux spectres disjoints comme suit

$$\mathcal{V}(H) = \mathcal{V}_-(H) \oplus \mathcal{V}_+(H)$$

où  $\mathcal{V}_-(H)$  désigne l'ensemble des valeurs propres à partie réelle négative, alors que  $\mathcal{V}_+(H)$  désigne l'ensemble des valeurs propres à partie réelle positive. La solution stabilisante doit être naturellement déterminée à partir d'un sous-espace invariant de dimension  $n$  associée au spectre  $\mathcal{V}_-(H)$ . On utilisera plus particulièrement le sous-espace propre de dimension  $n$  issu des vecteurs propres et des vecteurs propres généralisés correspondants aux valeurs propres à partie réelle négatives, soit  $\mathcal{X}_-(H) = \text{Im} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times n}$ .

**Remarque C.2** Soit  $\mathcal{X}_c \in \mathbb{R}^{2n}$  un sous-espace vectoriel défini par  $\mathcal{X}_c = \text{Im} \begin{pmatrix} 0_n \\ I_n \end{pmatrix}$ . Alors la matrice  $V_1$  est inversible si et seulement si le sous-espace  $\mathcal{X}_-(H)$  est complémentaire au sous-espace  $\mathcal{X}_c$ .

- La seconde hypothèse relève de la faisabilité du calcul de la solution, en l'occurrence la matrice  $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est inversible et on peut l'exprimer conformément à la remarque C.2 comme suit

$$\mathcal{H}2. \quad \mathcal{X}_-(H) \cap \mathcal{X}_c = \{0\}$$

Cette hypothèse permet de déterminer la solution stabilisante  $X = V_2 V_1^{-1}$  qui est unique puisqu'elle ne dépend pas de la base considérée du sous-espace propre  $\mathcal{X}_-(H)$ .

Les hypothèses  $\mathcal{H}1$  et  $\mathcal{H}2$  permettent de déterminer d'une manière unique la solution stabilisante à partir de la matrice hamiltonienne. Ainsi, on peut définir la fonction  $\text{Ric} : H \mapsto X = \text{Ric}(H)$  dont le domaine de définition, que l'on notera  $\text{dom}(\text{Ric})$ , n'est autre que l'ensemble des matrices hamiltoniennes satisfaisant les hypothèses  $\mathcal{H}1$  et  $\mathcal{H}2$ . Ainsi, on aura

$$\text{Ric} : H \in \text{dom}(\text{Ric}) \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mapsto X = \text{Ric}(H) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On présente dans ce qui suit deux résultats fondamentaux consacrés aux solutions stabilisantes. Le premier résultat corrobore la nécessité des hypothèses présentées ci-dessus.

**Résultat C.5** Considérons l'équation algébrique de Riccati et la matrice hamiltonienne associée  $H$  et supposons que  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ . Alors  $X = \text{Ric}(H)$  est une solution symétrique et stabilisante.

**Preuve.** L'existence de la solution et son unicité est une application directe du résultat C.1 et sa nature stabilisante est une conséquence naturelle du choix du sous-espace invariant de  $H$  considéré pour sa détermination. Il reste à montrer que la solution est symétrique. Et compte tenu du fait que la solution peut se récrire comme suit

$$X = V_2 V_1^{-1} = (V_1^{-1})^* (V_1^* V_2) (V_1^{-1})$$

il suffit de montrer que la matrice  $V_1^*V_2$  est symétrique. Pour ce faire, on notera d'abord que compte tenu de l'élaboration du sous espace invariant  $\mathcal{X}_-(H)$ , il existe une représentation matricielle  $H_s$  de la restriction  $H|_{\mathcal{X}_-(H)}$  telle que

$$H \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} H_s$$

Et si l'on pré-multiplie cette équation par  $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J$ , on aura

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* JH \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} H_s \quad (\text{C.18})$$

Et comme  $JH$  est matrice réelle symétrique (et donc hermitienne), il en est de même pour le premier membre de l'équation C.18 et donc son second membre, soit

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} H_s = H_s^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = -H_s^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(-V_1^*V_2 + V_2^*V_1)H_s + H_s^*(-V_1^*V_2 + V_2^*V_1) = 0 \quad (\text{C.19})$$

qui n'est autre qu'une équation de Lyapunov qui admet une solution unique

$$-V_1^*V_2 + V_2^*V_1 = 0$$

compte tenu du fait que  $\mathcal{V}(H_s) \subset \mathcal{D}_{sa}$ . On aura alors  $V_1^*V_2 = V_2^*V_1$  et donc la matrice  $V_1^*V_2$  est hermitienne.

CQFD

Le deuxième résultat donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation algébrique de Riccati ait une solution stabilisante unique modulo certaines restrictions sur la matrice  $R$ .

**Résultat C.6** Supposons que l'hypothèse  $\mathcal{H}1$  est satisfaite et que la matrice  $R$  est indéfinie, i.e.  $R \geq 0$  ou  $R \leq 0$ . Alors  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$  si et seulement si  $(A, R)$  est stabilisable.

**Preuve.** Comme l'hypothèse  $\mathcal{H}1$  est satisfaite, on peut élaborer le sous espace propre  $\mathcal{X}_-(H)$  et noter qu'il existe une représentation matricielle  $H_s$  de la restriction  $H|_{\mathcal{X}_-(H)}$  telle que

$$H \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} H_s \quad (\text{C.20})$$

et que  $V_1^*V_2$  est une matrice hermitienne comme l'indique la preuve du résultat C.5. Par ailleurs, compte tenu de la nature de la matrice  $R$ , i.e.  $R \geq 0$  ou  $R \leq 0$ , on peut montrer que  $\mathcal{N}(V_1)$  est un invariant de  $H_s$ . En effet si l'on pré-multiplie les deux membres de l'équation C.20 par  $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \end{pmatrix}$ , on obtient

$$AV_1 + RV_2 = V_1H_s \quad (\text{C.21})$$

Et soit  $v \in \mathcal{N}(V_1)$ , en pré-multipliant par  $v^*V_2^*$  et post-multipliant par  $v$  les deux membres de l'équation C.21, tout en utilisant le fait que la matrice  $V_1^*V_2$  est hermitienne, on obtient

$$v^*V_2^*RV_2v = 0$$

On aura alors  $RV_2v = 0$  puisque  $R$  est indéfinie. Et si on post-multiplie les deux membres de l'équation C.21, on obtient  $V_1H_s v = 0$  et donc  $\mathcal{N}(V_1)$  est un bien un invariant de  $H_s$ .

Montrons que la condition est suffisante. Compte tenu de la définition de  $\text{dom}(Ric)$  et du fait que l'hypothèse  $\mathcal{H}1$  est satisfaite, il suffit de montrer que l'hypothèse  $\mathcal{H}2$  est satisfaite si  $(A, R)$  est stabilisable. Et comme l'hypothèse  $\mathcal{H}2$  est satisfaite si et seulement si la matrice  $V_1$  est régulière, il suffit de montrer que  $\mathcal{N}(V_1) = \{0\}$ . Pour ce faire, on adoptera un raisonnement par l'absurde. Supposons que  $\mathcal{N}(V_1) \neq \{0\}$ , alors il existe  $\lambda \in \mathcal{V}(H_s|_{\mathcal{N}(V_1)})$  et un vecteur non nul  $v \in \mathcal{N}(V_1)$  tel que

$$H_s v = \lambda v \quad (\text{C.22})$$

En pré-multipliant les deux membres de l'équation C.20 par  $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \end{pmatrix}$ , on obtient

$$-QV_1 + A^*V_2 = V_2H_s \quad (\text{C.23})$$

Et en post-multipliant les deux membres de cette équation par  $v$  tout en utilisant l'équation C.22, on a

$$(A^* + \lambda I_n)V_2v = 0$$

En combinant cette équation avec la propriété  $RV_2v = 0$  établie plus haut, on trouve

$$v^*V_2^* \begin{pmatrix} A^* + \lambda I_n & R \end{pmatrix} = 0$$

On aura alors  $V_2v = 0$  et puisque  $v \in \mathcal{N}(V_1)$  on aura  $V_1v = 0$ . Et compte tenu que  $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$  est une matrice de rang plein en colonnes, on aura  $v = 0$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $\mathcal{N}(V_1) \neq \{0\}$ .

La condition est nécessaire puisque  $H \in \text{dom}(Ric)$  implique bien que  $X$  est une solution stabilisante et donc  $\mathcal{V}(A + RX) \subset \mathcal{D}_{sa}$ . Cette dernière propriété requiert que  $(A, R)$  est stabilisable. CQFD

Le résultat donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation algébrique de Riccati ait une solution stabilisante unique pour les formes usuelles des matrices  $Q$  et  $R$  dans les applications relevant de la commande et l'estimation optimales.

**Résultat C.7** Supposons que les matrices  $Q$  et  $R$  qui constituent la matrice hamiltonienne  $H$  ont les formes suivantes

$$Q = C^*C \text{ et } R = -B^*B$$

Alors  $H \in \text{dom}(Ric)$  si et seulement si  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  n'a aucun mode non observable sur l'axe imaginaire. De plus,  $X = Ric(H) \geq 0$  si  $H \in \text{dom}(Ric)$  et  $\mathcal{N}(X) = \{0\}$  si et seulement si les modes non observables du système ne sont pas stables.

**Preuve.** Conformément au résultat C.6, la stabilisabilité de  $(A, B)$  est nécessaire et elle est suffisante si  $\mathcal{H}1$  est satisfaite. Ainsi, il suffit de démontrer que si  $(A, B)$  est stabilisable, alors  $\mathcal{H}1$  est satisfaite si et seulement si  $(C, A)$  n'a aucun mode non observable sur l'axe imaginaire.

Pour ce faire, supposons que  $j\omega$  est une valeur propre de  $H$  et que  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq 0$  est le vecteur propre qui lui est associé. Alors on a

$$(A - j\omega I_n) v_1 = BB^* v_2 \quad (\text{C.24})$$

et

$$-(A - j\omega I_n)^* v_2 = C^* C v_1 \quad (\text{C.25})$$

ou d'une manière équivalente

$$\langle v_2, (A - j\omega I_n) v_1 \rangle = \langle v_2, BB^* v_2 \rangle = \| B^* v_2 \|^2$$

et

$$-\langle v_1, (A - j\omega I_n)^* v_2 \rangle = \langle v_1, C^* C v_1 \rangle = \| C v_1 \|^2$$

Ces relations stipulent que  $\langle v_1, (A - j\omega I_n)^* v_2 \rangle$  est réel et que

$$-\| C v_1 \|^2 = \langle (A - j\omega I_n) v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, (A - j\omega I_n) v_1 \rangle} = \| B^* v_2 \|^2$$

On aura alors  $B^* v_2 = 0$  et  $C v_1 = 0$ . Et compte tenu des équations C.24 et C.25, on a  $(A - j\omega I_n) v_1 = 0$  et  $(A - j\omega I_n)^* v_2 = 0$ . La combinaison de ces faits conduit naturellement aux équations

$$v_2^* \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.26})$$

et

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I_n \\ C \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad (\text{C.27})$$

L'équation C.26 permet de postuler que  $v_2 = 0$  puisque  $(A, B)$  est stabilisable. Quant à l'équation C.27, elle confirme bien que  $\mathcal{H}1$  est satisfaite si et seulement si  $(C, A)$  n'a aucun mode non observable sur l'axe imaginaire.

Par ailleurs, montrons que  $X = \text{Ric}(H) \geq 0$ . Pour ce faire, on notera d'abord que l'équation algébrique de Riccati peut se mettre sous la forme

$$(A - BB^* X) + (A - BB^* X) + XBB^* X + C^* C = 0 \quad (\text{C.28})$$

Et compte tenu du résultat C.5, on a  $\mathcal{V}(A - BB^* X) \subset \text{cal}D_{sa}$  et donc la solution de l'équation de Riccati vérifie l'équation intégrale

$$X = \int_0^\infty e^{(A - BB^* X)t} (XBB^* X + C^* C) e^{(A - BB^* X)t} dt$$

qui montre clairement que  $X \geq 0$  puisque  $XBB^* X + C^* C \geq 0$ .

Enfin, nous allons montrer que  $\mathcal{N}\{X\}$  n'est pas triviale si et seulement si  $(C, A)$  admet des modes non observables stables. On postule d'abord que  $\mathcal{N}\{X\}$  est un sous-espace  $A$  invariant.

En effet, soit  $x \in \mathcal{N}\{X\}$ , alors  $Xx = 0$ . En pré-multipliant l'équation C.28 par  $x^*$ , on trouve que  $CX = 0$ . Et en post-multipliant l'équation C.28 par  $x$  en tenant compte du résultat précédent, on obtient  $XA x = 0$ . Ce qui confirme le postulat. Ensuite, supposons que  $\mathcal{N}\{X\} \neq \{0\}$ , alors il existe  $0 \neq x \in \mathcal{N}\{X\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que

$$\lambda x = Ax = (A - BB^*X)x \text{ et } Cx = 0$$

Et comme  $\mathcal{V}((A - BB^*X)) \subset \mathcal{D}_{sa}$ , on a  $\Re(\lambda) < 0$  et donc  $\lambda$  est un mode non observable stable. Réciproquement, supposons que  $(C, A)$  admet un mode observable stable  $\lambda$ , il existe alors un vecteur non nul  $x$  tel que  $Ax = \lambda x$  et  $Cx = 0$ . Et en pré-multipliant l'équation de Riccati par  $x^*$  et en la post-multipliant par  $x$ , on obtient

$$2\Re(\lambda) x^* X x - x^* X B B^* X x = 0$$

Et comme  $\lambda$  est un mode stable, on aura  $x^* X x = 0$  et donc  $X$  est une matrice singulière.

*CQFD*

**Remarque C.3** L'observabilité de  $(C, A)$  n'est pas une condition nécessaire pour l'existence d'une solution définie positive et stabilisante. En effet, considérons le cas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = (1 \ 0)$$

où  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  n'est pas détectable. Cependant

$$X = \begin{pmatrix} +18 & -240 \\ -24 & +36 \end{pmatrix} \text{ est une solution définie positive et stabilisante}$$

**Résultat C.8** Supposons que les matrices  $Q$  et  $R$  qui constituent la matrice hamiltonienne  $H$  ont les formes suivantes

$$Q = C^*C \text{ et } R = -B^*B$$

et que  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  est détectable. Alors l'équation algébrique de Riccati admet une solution stabilisante définie non négative unique.

**Preuve.** Conformément au résultat C.7, on peut conclure que l'équation algébrique de Riccati admet une solution stabilisante unique et que cette solution est définie non négative. Il suffit donc de montrer que toute solution définie non négative est stabilisante et d'utiliser l'unicité de la solution stabilisante pour conclure que la solution définie non négative est unique. Pour ce faire, supposons que  $X \geq 0$  est une solution de l'équation algébrique de Riccati mais elle n'est pas stabilisante, soit la matrice  $A - BB^*X$  a une valeur propre  $\lambda$  à partie réelle positive. On notera que l'équation algébrique de Riccati peut se mettre sous la forme

$$(A - BB^*X) + (A - BB^*X) + XBB^*X + C^*C = 0 \tag{C.29}$$

Soit  $x$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors on a

$$(A - BB^*X)x = \lambda x \tag{C.30}$$

En pré-multipliant et post-multipliant respectivement l'équation algébrique de Riccati C.29 par  $x^*$  et  $x$ , on obtient

$$2\Re(\lambda) x^* X x + x^* (X B B^* X + C^* C) x = 0$$

Et comme  $\Re(\lambda) \geq 0$ , on aura  $B^* x = 0$  et  $C x = 0$ . Et compte tenu de ce fait et de l'équation C.30, on a la propriété

$$A x = \lambda x \text{ et } C x = 0$$

qui stipule que  $(C, A)$  n'est pas détectable : ce qui est contradictoire par rapport à l'hypothèse adoptée. Donc  $\Re(\lambda) < 0$  et ainsi la solution  $X \geq 0$  est une solution stabilisante.

CQFD

**Résultat C.9** Supposons que la matrice  $D$  est de rang plein colonne et posons  $R = D^* D$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{P}1.$   $\begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est de rang plein colonne pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

$\mathcal{P}2.$   $((I - DR^{-1}D^*)C, A - BR^{-1}D^*C)$  n'admet aucun mode non observable sur l'axe imaginaire.

**Preuve.** Supposons que  $j\omega$  est un mode non observable de

$$\left( (I - DR^{-1}D^*)C, A - BR^{-1}D^*C \right)$$

alors il existe  $x \neq 0$  tel que

$$(A - BR^{-1}D^*C) x = j\omega x \text{ et } (I - DR^{-1}D^*)C x = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -R^{-1}D^*C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Et donc la matrice

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ n'est pas de rang plein colonne}$$

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{P}1$  est satisfaite, alors il existe un vecteur  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0$  tel que

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

Et soit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -R^{-1}D^*C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



et donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ R^{-1}D^*C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0$$

et

$$(A - BR^{-1}D^*C - j\omega I_n)x + By = 0 \quad (\text{C.31})$$

$$(I_n - DR^{-1}D^*)Cx + Dy = 0 \quad (\text{C.32})$$

Et en pré-multipliant l'équation C.32 par  $D^*$ , on obtient  $y = 0$ . On aura donc

$$(A - BR^{-1}D^*C)x = j\omega x \text{ et } (I_n - DR^{-1}D^*)Cx = 0$$

et donc la propriété  $\mathcal{P}2$  est satisfaite.

*CQFD*

**Remarque C.4** Si  $D$  n'est pas une matrice carrée, alors il existe une matrice  $D_\perp$  telle que  $D_\perp D_\perp^* = I_n - R^{-1}D^*$  et  $\begin{pmatrix} D_\perp & D\sqrt{R}^{-1} \end{pmatrix}$  est une matrice unitaire. On peut alors reformuler le résultat ref en modifiant la seconde propriété comme suit

$\mathcal{P}2.$   $(D^\perp C, A - BR^{-1}D^*C)$  n'admet aucun mode non observable sur l'axe imaginaire

Et peut se simplifier dans le cas où  $D$  (resp.  $D^*C = 0$ ) comme suit

$\mathcal{P}2.$   $(A - BR^{-1}D^*C)$  n'admet aucun mode sur l'axe imaginaire

(resp.  $\mathcal{P}2.$   $(C, A)$  n'admet aucun mode non observable sur l'axe imaginaire)

**Résultat C.10** Supposons que la matrice  $R = D^*D$  où la matrice  $D$  est de rang plein colonne et que la matrice hamiltonienne à la forme suivante

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C^*C & -A^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ -C^*D \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} C^*C & B^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A - BR^{-1}D^*C & -BR^{-1}B^* \\ -C^*(I_n - R^{-1}B^*)C & -(A - BR^{-1}D^*C)^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Alors  $H \in \text{dom}(Ric)$  si et seulement si  $(A, B)$  est stabilisable et  $\begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est de rang plein colonne pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . De plus,  $X = Ric(H) \geq 0$  si  $H \in \text{dom}(Ric)$  et  $\mathcal{N}(X) = \{0\}$  si et seulement si  $(D_\perp^*C, A - BR^{-1}D^*C)$  n'admet aucun mode non observable stable.

**La preuve** de ce résultat découle naturellement des preuves des résultats C.7 et C.9; elle peut être faite à titre d'exercice.

*CQFD*

**Remarque C.5** La détectabilité (resp. l'observabilité) de  $(D_{\perp}^*C, A - BR^{-1}D^*C)$  implique la détectabilité (resp. l'observabilité) de  $(C, A)$  mais la réciproque n'est pas vraie. L'existence d'une solution stabilisante de l'équation de Riccati dans le contexte du résultat C.10 n'est pas garantie par la stabilisabilité de  $(A, B)$  et la détectabilité de  $(C, A)$ . Par ailleurs, même si une solution stabilisante existe, l'observabilité de  $(C, A)$  ne peut pas garantir que cette solution est définie non négative à moins que  $D^*C = 0$ . Pour mieux appréhender les choses, considérons l'exemple suivant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où l'on peut vérifier aisément que  $(A, B)$  est commandable,  $(C, A)$  est observable et

$$A - BD^*C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D_{\perp}^*C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation algébrique de Riccati sous-jacente admet une solution stabilisante définie non négative puisque  $(D_{\perp}^*C, A - BR^{-1}D^*C)$  n'admet aucun mode non observable sur l'axe imaginaire. Mais cette solution n'est pas définie positive puisque  $(D_{\perp}^*C, A - BR^{-1}D^*C)$  admet un mode non observable stable. Et si on change la matrice  $B$  comme suit

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors l'équation algébrique de Riccati n'admet aucune solution stabilisante puisque  $A - BD^*C$  a des valeurs propres sur l'axe imaginaire indépendamment des faits que  $(A, B)$  soit commandable et  $(C, A)$  soit observable.

Le résultat suivant montre que la solution stabilisante d'une  $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{R}$  peut être obtenue à partir de la solution d'une  $\mathcal{E}\mathcal{D}\mathcal{R}$ .

**Résultat C.11** Supposons que les matrices  $A, Q$  et  $R$  qui constituent la matrice hamiltonienne  $H$  ont les formes suivantes

$$A = A_c, Q = H_c^*H_c \text{ et } R = -G_cR_c^{-1}G_c^* \text{ avec } R_c = R_c^* > 0$$

et que  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  est observable. Alors l' $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{R}$  admet une solution stabilisante définie positive. En outre, cette solution s'obtient comme la limite, lorsque  $t$  tend vers l'infini, de toute solution de l' $\mathcal{E}\mathcal{D}\mathcal{R}$

$$-\rho X_c(t) = A_c^*X_c(t) + X_c(t)A_c - X_c(t)G_cR_c^{-1}G_c^*X_c(t) + H_c^*H_c$$

pour toute condition initiale symétrique et définie positive.

La preuve de ce résultat est relativement laborieuse ([55], [42]); elle est occultée pour des raisons pédagogiques.

La dualité entre l'observation et la commande peut être exploitée pour en déduire un corollaire du résultat fondamental donné ci dessus. Ce corollaire est donné par le résultats suivant

**Résultat C.12** Supposons que les matrices  $A$ ,  $Q$  et  $R$  qui constituent la matrice hamiltonienne  $H$  ont les formes suivantes

$$A = A_o^*, Q = G_o G_o^* \text{ et } R = -H_o^* R_o^{-1} H_o \text{ avec } R_o = R_o^* > 0$$

et que  $(H_o, A_o)$  est détectable et  $(A_o, G_o)$  est commandable. Alors l' $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{R}$  admet une solution stabilisante définie positive. En outre, cette solution s'obtient comme la limite, lorsque  $t$  tend vers l'infini, de toute solution de l' $\mathcal{E}\mathcal{D}\mathcal{R}$

$$\rho X_o(t) = A_o X_o(t) + X_c(t) A_o^* - X_o(t) G_o^* R_o^{-1} G_o X_c(t) + G_o G_o^*$$

pour toute condition initiale symétrique et définie positive.

La **preuve** de ce résultat est déduite aisément du résultat précédent comme tenu de la dualité entre l'observation et la commande.

### C.3 Conclusion.

Ce chapitre est une synthèse compréhensive sur la résolution des équations de Riccati. La plupart des résultats ont été donnés avec leurs preuves pour mieux apprécier la nature des solutions correspondantes. Une attention particulière a été accordée aux solutions stabilisantes et définies positives qui sont vitales pour la synthèse des systèmes de commande et d'estimation optimales.



# Bibliographie

- [1] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. Robustesse et Commande Optimale. *CEPADUES*, 1999.
- [2] B. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM J. Contr.*, 5(2) :171–182, 1967.
- [3] B. Anderson and S. Vongpanitlerd. Network Analysis and Synthesis : A Modern Systems Theory Approach. *Prentice Hall*, 1973.
- [4] B. D. O. Anderson and J. Moore. Optimal Control : Linear Quadratic Methods. *Prentice Hall*, 1989.
- [5] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain scheduled  $H_\infty$  controllers. *IEEE Trans. Auto. Control*, 40(5) :853–864, 1995.
- [6] K. J. Åström. Introduction to Stochastic Control Theory. *Academic Press*, 1970.
- [7] K. J. Åström and B. Wittenmark. Computed Controlled Systems : Theory and Design. *Prentice Hall*, 1997.
- [8] M. Athans and P. R. Falb. Optimal Control. *Dover*, 2007.
- [9] R. Bellman. Dynamic Programming. *Princeton University Press*, 1965.
- [10] G. J. Bierman. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. *Academic Press*, 1977.
- [11] R. R. Bitmead, M. Gevers, and V. Wertz. Adaptive Optimal Control : The Thinking Man’s Generalized Predictive Control. *Prentice Hall*, 1990.
- [12] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Siam Studies in Applied Mathematics*, 1994.
- [13] R. Brockett. Finite Dimensional Linear Systems. *Wiley*, 1973.
- [14] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland. Dissipative Systems Analysis and Control. *Springer Verlag*, 2007.
- [15] C. T. Chen. Linear Systems Theory and Design. *Holt, Rinehart and Winston*, 1984.
- [16] C. Commault and J. M. Dion. Algèbre et Analyse pour l’Automatique, chapter Matrices polynomiales et rationnelles, pages 307–337. *Hermès Science*, 1994.
- [17] P. de Larminat. Contrôle d’état standard. *Hermès*, 2000.
- [18] P. de Larminat. Automatique appliquée. *Hermès*, 2009.
- [19] J. Doyle. Guaranteed margin of LQG regulators. *IEEE Trans. Auto. Control*, 23(4) :756–757, 1978.
- [20] J. Doyle. Lecture notes on advanced in multivariable control. Technical report, Honeywell, Minneapolis, 1984.
- [21] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. Feedback Control Systems. *Macmillan Inc.*, 1992.

- [22] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. *State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems*. IEEE Trans. Auto. Control, 34(8) :831–847, 1989.
- [23] J. Doyle and G. Stein. *Robustness with observers*. IEEE Trans. Auto. Control, 34(4) :607–611, 1979.
- [24] J. Doyle and G. Stein. *Multivariable feedback design : concept for classical/modern synthesis*. IEEE Trans. Auto. Control, 26(1) :4–16, 1981.
- [25] G. Duc. *Robustesse des systèmes linéaires multivariables. Notes de cours, Ecole Supérieure d'Electricité, 1994*.
- [26] G. Duc and S. Font. *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -Analyse*. Hermes, 1999.
- [27] G. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory : A Convex Approach*. Springer, 2005.
- [28] M. Farlane and K. Glover. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description, volume 138. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1990*.
- [29] M. Farlane and K. Glover. *A loop shaping design procedure using  $H_\infty$  synthesis*. IEEE Trans. Auto. Control, AC-37(6) :759–769, 1992.
- [30] P. Feyel. *La Commande Robuste par Loop-Shaping*. Hermes, Lavoisier, 2013.
- [31] A. J. Fossard. *Systèmes multientrées-multisorties*. In *Techniques de l'Ingénieur, R7220, 1997*.
- [32] A. J. Fossard and T. Juppiliat. *Commande modale : application au pilotage d'un avion*. In *Techniques de l'Ingénieur, R7433, 1997*.
- [33] B. Francis. *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*. Springer Verlag, 1987.
- [34] B. Francis and J. Doyle. *Linear control theory with an  $H_\infty$  optimality criterion*. SIAM J. Control Opt., 25 :815–844, 1987.
- [35] B. Francis and G. Zames. *On  $H_\infty$  optimal sensitivity theory foe siso feedback systems*. IEEE Trans. Auto. Control, 29(1) :9–16, 1984.
- [36] J. S. Freudenberg and D. P. Looze. *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag, 1988.
- [37] P. Gahinet and P. Apkarian. *A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control*. Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 4 :421–428, 1994.
- [38] K. Glover and J. Doyle. *State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity*. Syst. and Contr. Letters, 11(3) :167–172, 1988.
- [39] K. Glover and D. McFarlane. *Robust Stabilisation of Normalized Coprime Factor Plant Description with  $H_\infty$ -Bounded Uncertainty*. IEEE Trans. Auto. Control, 34(8) :821–830, 1989.
- [40] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2001.
- [41] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, 1984.
- [42] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, 1995.
- [43] M. Hautus and M. Heymann. *Linear feedback decoupling - an algebraic approach*. SIAM Journal of Control, 16 :83–105, 1978.

- [44] M. Hautus and M. Heymann. *Linear feedback decoupling - transfer function analysis*. IEEE Trans. Auto. Control, AC-28(8) :823–832, 1983.
- [45] P. Ioannou and J. Sun. *Stable and Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, 1996.
- [46] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [47] R. E. Kalman. *Design of a self-optimizing control system*. J. Basic Eng., Trans. ASME, 80 :468–478, 1958.
- [48] R. E. Kalman. *Contributions to the theory of optimal control*. Bol. Soc. Mat. Mex., 5 :102–119, 1960.
- [49] R. E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction theory*. J. Basic Eng., Trans. ASME, 82(1) :35–45, 1960.
- [50] R. E. Kalman. *When is a linear control system optimal?* J. Basic Eng., Trans. ASME, 86 :51–60, 1964.
- [51] R. E. Kalman and R. S. Bucy. *New results in linear filtering and prediction theory*. J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D, 83(3) :95–108, 1961.
- [52] T. Katayama. *Subspace Methods for System Identification*. Springer-Verlag, 2006.
- [53] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [54] H. Kwakernaak. *Optimal low sensitivity linear feedback systems*. Automatica, 5 :279–285, 1969.
- [55] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley Interscience, 1972.
- [56] H. Kwakernaak and R. Sivan. *The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters*. IEEE Trans. Auto. Control, AC-17(1) :79–86, 1972.
- [57] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, and A. Karimi. *Adaptive Control*. Springer Verlag, 2011.
- [58] J. P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Lyapunov's Direct Method with Application*. Academic Press, 1961.
- [59] S. Lefschetz. *Stability of Nonlinear Control Systems*. Academic Press, 1963.
- [60] J. P. Liu and R. J. Patton. *Numerical Methods for Linear Control Systems*. John Willey and Sons, 1998.
- [61] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, 1997.
- [62] A. M. Lyapunov. *The General Problem of Motion Stability*. Princeton University Press, 1947. *The original version has been written in Russian in 1892.*
- [63] J. F. Magni. *Robust Modal Control with Toolbox for Use with MATLAB*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.
- [64] G. Meinsma. *Unstable and nonproper weights in  $H_\infty$  control*. Automatica, 31(11) :1655–1658, 1995.
- [65] R. H. Middleton and G. C. Goodwin. *Digital Control and Estimation : A Unified Approach*. Prentice Hall, 1990.
- [66] M. M'Saad. *Commande prédictive adaptative : une approche polynomiale*. Ouvrage, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen, France, 2017.
- [67] P. Overschee and B. D. Moor. *Subspace Identification for Linear Systems : Theory - Implementation - Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [68] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. Prentice Hall, 1991.

- [69] *L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. *Gordon and Breach Science Gordon, 1962.*
- [70] *H. H. Rosenbrock.* State-Space and Multivariable Theory. *Nelson, 1970.*
- [71] *W. J. Rugh.* Linear System Theory. *Prentice Hall, 1996.*
- [72] *A. Saberi, B. M. Chen, and P. Sannuti.* Loop Transfer Recovery : Analysis and Design. *Springer-Verlag, 1993.*
- [73] *M. Safonov and M. Athans.* Gain and phase margin for multiloop LQG controllers. *IEEE Trans. Auto. Control, 22(2) :173–179, 1977.*
- [74] *G. Scorletti and V. Fromion.* Introduction à commande multivariable des systèmes : méthode de synthèse fréquentielle  $H_\infty$ . *Notes de cours, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen, France, 2006.*
- [75] *J. Sefton and K. Glover.* Pole/zero compencellation in the general  $H_\infty$  problem with reference to a two-block design. *Systems & Control Letters, 14 :295–306, 1990.*
- [76] *M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin.* Fundamental Limitations in Filtering and Control. *Springer, 1997.*
- [77] *S. Skogestad and I. Postletwhaite.* Multivariable Feedback Control - Analysis and Design. *John Willey and Sons, 1995.*
- [78] *T. Soderstrom and P. Stoica.* System Identification. *Prentice Hall, 1989.*
- [79] *G. Stein and M. Athans.* The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Trans. Auto. Control., AC-32(2) :105–114, 1987.*
- [80] *M. Tadjine, M. M'Saad, and L. Dugard.* Discrete time compensators with loop transfer recovery. *IEEE Trans. on Auto. Control, AC-39(6) :1259–1262, 1994.*
- [81] *M. Vidyasagar.* Control System Synthesis : A Factorisation Approach. *The MIT Press, 1985.*
- [82] *W. Wonham.* Linear Multivariable Control : A Geometric Approach. *Springer Verlag, 1979.*
- [83] *D. C. Youla.* On the factorization of rational matrices. *IRE Transactions on Information Theory, IT-7 :172–189, 1961.*
- [84] *G. Zames.* Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverse. *IEEE Trans. Auto. Control, 26(2) :301–320, 1981.*
- [85] *G. Zames.* Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverse. *IEEE Trans. Auto. Control, 26(2) :301–320, 1984.*
- [86] *G. Zames and B. Francis.* Feedback, minimax sensitivity and optimal robustness. *IEEE Trans. Auto. Control, 28, 1983.*
- [87] *Z. Zhang and J. S. Freudenberg.* Loop transfer recovery for non-minimum phase plants. *IEEE Trans. Auto. Control, AC-35(5) :547–553, 1990.*
- [88] *K. Zhou and J. Doyle.* Essential of Robust Control. *Prentice Hall, 1998.*
- [89] *K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover.* Robust and Optimal Control. *Prentice Hall, 1996.*





