ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2019–2020

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Corrigé de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – lundi 22 janvier 2020

Exercice 1.

Le but de l'exercice est de trouver les solutions réelles $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ du système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la solution générale X_H du système homogène associé.

b) Pour $B(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, chercher une solution particulière $X_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{2t} \\ \beta\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$, avec α et β des constantes à déterminer.

c) Déterminer une solution particulière X_2 pour $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9t \end{pmatrix}$. On pourra chercher les composantes de X_2 sous la forme de polynômes de degré 1.

d) En déduire la solution générale du système pour $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ t \end{pmatrix}$.

Solution 1.

a) • Valeurs propres de A :

Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$.

La matrice A possède donc deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$. Puisqu'elle est de dimension 2, on en conclut qu'elle est diagonalisable.

• Vecteurs propres de A :

Pour $\lambda_1 = -1$, un vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie la relation

$$(A - \lambda_1 I_2)V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + y = 0$$

donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 3$,

$$(A - \lambda_2 I_2)V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + y = 0$$

donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est diagonalisable, donc la solution générale du système homogène est

$$X_H(t) = k_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} V_1 + k_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} V_2 = k_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Pour $B(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, on cherche une solution particulière sous la forme $X_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} X_1'(t) = AX_1(t) + B(t) &\iff 2\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 4\alpha + \beta \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha = \alpha + \beta + 3 \\ 2\beta = 4\alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc $X_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) Pour $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9t \end{pmatrix}$, on cherche une solution particulière polynomiale $X_2(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} X_2'(t) = AX_2(t) + B(t) &\iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+c)t + (b+d) \\ (4a+c)t + (4b+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9t \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = b + d \\ 0 = a + c \\ c = 4b + d \\ 0 = 4a + c + 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc $X_2(t) = \begin{pmatrix} -3t + 2 \\ 3t - 5 \end{pmatrix}$.

d) Le second membre $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 9t \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des seconds membres des questions **b)** et **c)**. Le système différentiel avec ce second membre admet donc la combinaison linéaire $\frac{1}{3} X_1(t) + \frac{1}{9} X_2(t)$ comme solution particulière. La solution générale est, quant à elle,

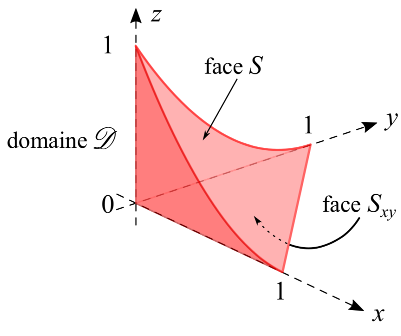
$$X(t) = X_H(t) + \frac{1}{3} X_1(t) + \frac{1}{9} X_2(t)$$

où X_H est la solution du système homogène, trouvée à la question **a)**.

Exercice 2.

L'espace est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit le domaine tridimensionnel

$$\mathscr{D} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 |\ x + y \leq 1,\ z \leq (x + y - 1)^2\}.$$



Sa face horizontale, incluse dans le plan (Oxy), est

$$S_{xy} = \{(x, y, 0) \in (\mathbb{R}_+)^3 |\ x + y \leq 1\}.$$

Sa face non-plane et oblique est

$$S = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 |\ x + y \leq 1,\ z = (x + y - 1)^2\}.$$

Enfin, on considère le champ de vecteur $\vec{E}(x, y, z) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

a) Donner le vecteur normal unitaire (sortant de $\mathscr{D}$) sur la face inférieure S_{xy}. Calculer le flux Φ_{xy} de $\vec{E}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers S_{xy}.

b) Calculer la divergence de $\vec{E}$, et l'intégrale $I = \iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{E}\, dV$.

c) Calculer le flux Φ de $\vec{E}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers la surface non-plane S.

d) Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long du bord de S_{xy} (en précisant le sens de circulation choisi).

Solution 2.

a) Sur la surface S_{xy} qui est plane et horizontale, $\vec{n} = -\vec{u}_z$ est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de $\mathscr{D}$. Comme $z = 0$ sur cette surface, $\vec{E} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ donc il est perpendiculaire à $\vec{n}$. Par conséquent, le flux Φ_{xy} de $\vec{E}$ à travers S_{xy} est nul.

b) La divergence du champ est

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 3$$

L'intégrale de la divergence est

$$\begin{aligned} I = \iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \iiint_{\mathscr{D}} 3\, dV &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{(x+y-1)^2} 3\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 3(x + y - 1)^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[(x + y - 1)^3 \right]_0^{1-x} dx \\ &= -\int_0^1 (x - 1)^3\, dx = -\left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) Il y a deux méthodes alternatives pour répondre à la question.

i) Avec le théorème de Green-Ostrogradski :

On remarque que le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au vecteur normal sur les deux faces verticales de $\mathscr{D}$. En effet, sur la face S_{xz} incluse dans le plan (Oxz), le vecteur normal unitaire sortant est $\vec{n} = -\vec{u}_y$ tandis que $\vec{E} = x\vec{u}_x + z\vec{u}_z$. Donc le flux Φ_{xz} à travers cette face est nul. De même, $\vec{n} = -\vec{u}_x$ et $\vec{E} = y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ sur la face S_{yz} incluse dans le plan (Oyz), donc le flux à travers S_{yz} est $\Phi_{yz} = 0$.

La surface $\partial\mathscr{D}$ du domaine est composée des faces S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} et S. Le flux sortant total est donc

$$\oiint_{\partial\mathscr{D}} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \Phi_{xy} + \Phi_{xz} + \Phi_{yz} + \Phi = \Phi$$

où Φ est le flux de $\vec{E}$ sortant à travers S.

D'après le théorème de Green-Ostrogradski,

$$\oiint_{\partial\mathscr{D}} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{E}\, dV,$$

ce qui donne

$$\Phi = I = \frac{1}{4}.$$

ii) En calculant explicitement le flux Φ :

Un paramétrage de S est $\vec{\sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ (x+y-1)^2 \end{pmatrix}$ avec $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1-x$.

Le produit vectoriel

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2(x+y-1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(x+y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x+y-1) \\ -2(x+y-1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

est orienté vers l'extérieur de $\mathscr{D}$.

Donc l'élément d'intégration pour le calcul du flux sortant est $\vec{n}\, dS = \begin{pmatrix} -2(x+y-1) \\ -2(x+y-1) \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy.$

Enfin, le flux de $\vec{E}$ sortant à travers S est

$$\begin{aligned}
\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ (x+y-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2(x+y-1) \\ -2(x+y-1) \\ 1 \end{pmatrix} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \Big(-2(x+y)(x+y-1) + (x+y-1)^2 \Big)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \Big(-2\big((x+y-1)+1\big)(x+y-1) + (x+y-1)^2 \Big)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \Big(-(x+y-1)^2 - 2(x+y-1) \Big)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{(x+y-1)^3}{3} - (x+y-1)^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^2 \right) dx \\
&= \left[\frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 dx = -\frac{(-1)^4}{12} - \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

d) Il y a deux méthodes alternatives pour répondre à la question.

i) Avec le théorème de Stokes :

D'après le théorème de Stokes, la circulation de $\vec{E}$ sur le bord ∂S_{xy} de la surface S_{xy} est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$ à travers cette surface :

$$\oint_{\partial S_{xy}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \iint_{S_{xy}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

Or il se trouve que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

donc $\displaystyle\iint_{S_{xy}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = 0$, et donc la circulation $\displaystyle\oint_{\partial S_{xy}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$.

ii) En calculant explicitement la circulation :
Un paramétrage du chemin parcourant le bord de S_{xy} est :

— pour aller du point $(0,0,0)$ au point $(1,0,0)$, $\overrightarrow{\gamma_1}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $t \in [0,1]$,

— pour aller de $(1,0,0)$ à $(0,1,0)$, $\overrightarrow{\gamma_2}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $t \in [0,1]$,

— et enfin, pour aller de $(0,1,0)$ à $(0,0,0)$, $\overrightarrow{\gamma_3}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $t \in [0,1]$.

Les circulations du champ sur chacune des parties du parcours sont

$$\int_{\overrightarrow{\gamma_1}([0,1])} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^1 \vec{E}(\overrightarrow{\gamma_1}(t)) \cdot \frac{d\overrightarrow{\gamma_1}(t)}{dt}\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_{\overrightarrow{\gamma_2}([0,1])} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t-1)\, dt = \left[t^2 - t\right]_0^1 = 0,$$

$$\int_{\overrightarrow{\gamma_3}([0,1])} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t-1)\, dt = \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

Au total, la circulation sur le bord ∂S_{xy} est

$$\oint_{\partial S_{xy}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0.$$

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \left(\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx \right)$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$ (remarque : il n'y a pas de problème en 0 car $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc la fonction est prolongeable en 0 par continuité, et $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ est bien définie pour $a \in \mathbb{R}$).

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $D_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kx}$. Montrer que :

- $D_n(x) = 1 + 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$
- $D_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } x = 0\ [2\pi] \\ \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0\ [2\pi]. \end{cases}$

En déduire la valeur de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$.

b) Soit f la fonction 2π-périodique, qui est définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \dfrac{2}{x}$ pour $x \in [-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. Montrer que f est continue sur $[-\pi, \pi[$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$.
Exprimer le coefficient de Fourier $b_n(f)$ en fonction de I_n et de J_n.
En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution 3.

a) • La première égalité s'obtient avec la formule d'Euler :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kx} + \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,kx}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

• La deuxième égalité découle de la formule pour la somme d'une suite géométrique :

— si $x = 0\ [2\pi]$, alors $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kx} = 1$ pour tout entier k, et donc $D_n(x) = 2n+1$.

— si $x \neq 0\ [2\pi]$, alors $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} \neq 1$, et donc

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kx} = \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,nx} \sum_{p=0}^{2n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,px} = \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,nx} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} - 1} \\ &= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,nx} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(2n+1)x}{2}} \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(2n+1)x}{2}} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,\frac{(2n+1)x}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

• Enfin,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) dx \\ &= \left[x + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

b) La fonction f est continue sur $[-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ car les fonctions qui composent f sont continues et les dénominateurs $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$ et $x \neq 0$ sauf en 0.
Quant à la continuité en 0, le développement limité

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{24} + o(x^2)} - 1\right) \\ &= \frac{2}{x}\left(\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) - 1\right) \\ &= \frac{2}{x}\left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{24} - 1 + o(x^2)\right) = \frac{2}{x}\left(-\frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = -\frac{x}{6} + o(x) \end{aligned}$$

montre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Et donc f est continue sur $[-\pi, \pi[$.

c) • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient de Fourier $b_n(f)$ est donné par

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad\qquad \text{(car } f \text{ est impaire)} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos(\frac{x}{2})\sin(nx)}{\sin(\frac{x}{2})} - \frac{2\sin(nx)}{x}\right)dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)\cos(\frac{x}{2})+\cos(nx)\sin(\frac{x}{2})}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \\ &= \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nx)\cos(\frac{x}{2})}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos(nx)\right)dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)\cos(\frac{x}{2})}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx + \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)\cos(\frac{x}{2})}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx. \end{aligned}$$

Donc

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(I_n - 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{x}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(I_n - 2J_n\right) \qquad \text{avec} \quad J_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{x}\,dx.$$

• On déduit de la relation précédente que

$$J_n = \frac{I_n}{2} - \frac{\pi b_n(f)}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi b_n(f)}{4}.$$

Puisque la fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux, le lemme de Riemann-Lebesgue permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$. Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}.$$

d) Avec le changement de variables $u = nx$, on obtient

$$J_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{x}\,dx = \int_0^{n\pi}\frac{\sin(u)}{u}\,du.$$

En introduisant la partie entière $n_a = \lfloor\frac{a}{\pi}\rfloor$ de sorte que $n_a\pi \le a < (n_a+1)\pi$, on peut écrire

$$\int_0^{a}\frac{\sin(u)}{u}\,du = \int_0^{n_a\pi}\frac{\sin(u)}{u}\,du + \int_{n_a\pi}^{a}\frac{\sin(u)}{u}\,du = J_{n_a} + \int_{n_a\pi}^{a}\frac{\sin(u)}{u}\,du.$$

Puisque le rapport $\frac{\sin(u)}{u}$ tend vers 0 en $+\infty$, le reste de l'intégral entre $n_a\pi$ et a tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$. En effet pour $a \ge \pi$, donc $n_a \ge 1$,

$$\left|\int_{n_a\pi}^{a}\frac{\sin(u)}{u}\,du\right| \le \int_{n_a\pi}^{a}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|du \le \int_{n_a\pi}^{a}\frac{du}{u} \le \int_{n_a\pi}^{(n_a+1)\pi}\frac{du}{u} = \ln\left(1+\frac{1}{n_a}\right).$$

Comme $\lim\limits_{a\to+\infty} n_a = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{a\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n_a}\right) = 0$, donc

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\int_{n_a\pi}^{a}\frac{\sin(u)}{u}\,du\right) = 0.$$

Et donc

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^{a}\frac{\sin(u)}{u}\,du\right) = \lim_{a\to+\infty} J_{n_a} = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}.$$