Année universitaire 2019–2020

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – mercredi 22 janvier 2020

Durée : 1h 30min
Documents et calculatrices interdits
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1. *(6,5 points)*

Le but de l'exercice est de trouver les solutions réelles $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ du système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la solution générale X_H du système homogène associé.

b) Pour $B(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, chercher une solution particulière $X_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{2t} \\ \beta\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$, avec α et β des constantes à déterminer.

c) Déterminer une solution particulière X_2 pour $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9t \end{pmatrix}$. On pourra chercher les composantes de X_2 sous la forme de polynômes de degré 1.

d) En déduire la solution générale du système pour $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ t \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *(6,5 points)*

L'espace est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit le domaine tridimensionnel

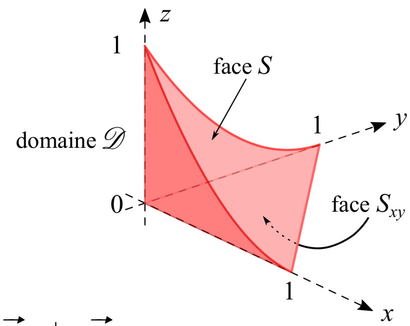
$$\mathscr{D} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 | \ x + y \leq 1, \ z \leq (x + y - 1)^2\}.$$

Sa face horizontale, incluse dans le plan (Oxy), est

$$S_{xy} = \{(x, y, 0) \in (\mathbb{R}_+)^3 | \ x + y \leq 1\}.$$

Sa face non-plane et oblique est

$$S = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 | \ x + y \leq 1, \ z = (x + y - 1)^2\}.$$



Enfin, on considère le champ de vecteur $\vec{E}(x, y, z) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

a) Donner le vecteur normal unitaire (sortant de $\mathscr{D}$) sur la face inférieure S_{xy}. Calculer le flux Φ_{xy} de $\vec{E}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers S_{xy}.

b) Calculer la divergence de $\vec{E}$, et l'intégrale $I = \iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{E}\, dV$.

c) Calculer le flux Φ de $\vec{E}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers la surface non-plane S.

d) Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long du bord de S_{xy} (en précisant le sens de circulation choisi).

Exercice 3. *(7 points)*

Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^{a} \frac{\sin(x)}{x}\, dx\right)$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$ (remarque : il n'y a pas de problème en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc la fonction est prolongeable en 0 par continuité, et $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ est bien définie pour $a \in \mathbb{R}$).

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $D_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$. Montrer que :

- $D_n(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$
- $D_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } x = 0\ [2\pi] \\ \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0\ [2\pi]. \end{cases}$

En déduire la valeur de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$.

b) Soit f la fonction 2π-périodique, qui est définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \dfrac{2}{x}$ pour $x \in [-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. Montrer que f est continue sur $[-\pi, \pi[$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}\, dx$.
Exprimer le coefficient de Fourier $b_n(f)$ en fonction de I_n et de J_n.
En déduire que $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.