

ESTIMATION OPTIMALE

Mohammed M'SAAD
Ecole nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen
6 Boulevard Maréchal Juin, 14050 Caen cedex, France.

NOTATIONS UTILISEES

I_n	<i>Matrice identité de dimension n.</i>
A^T	<i>Transposée de la matrice A.</i>
\bar{A}	<i>Conjuguée de la matrice A.</i>
\sqrt{A}	<i>Racine carrée de la matrice A.</i>
$\det(A)$	<i>Déterminant de la matrice A.</i>
$\lambda(A)$	<i>Valeur propre de la matrice A.</i>
$\sigma(A)$	<i>Valeur singulière de la matrice A.</i>
$\sigma_{max}(A)$	<i>Valeur singulière maximale de la matrice A.</i>
$\sigma_{min}(A)$	<i>Valeur singulière minimale de la matrice A.</i>
$\mathcal{V}(A) = \{\lambda_i(A) \text{ pour } i \in [1, n]\}$	<i>Spectre de la matrice A.</i>
$u(t) \in \mathcal{R}^m$	<i>Vecteur de commande.</i>
$y(t) \in \mathcal{R}^p$	<i>Vecteur de sortie.</i>
$x(t) \in \mathcal{R}^n$	<i>Vecteur d'état.</i>
$w(t) \in \mathcal{R}^n$	<i>Vecteur des perturbations d'état.</i>
$v(t) \in \mathcal{R}^p$	<i>Vecteur des bruits de mesure.</i>
$\mathcal{D}(t) = \{u(\tau) \text{ et } y(\tau) \text{ pour } \tau \leq t\}$	<i>Données d'entrée-sortie jusqu'à l'instant t.</i>
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	<i>Espérance mathématique.</i>
z	<i>Variable complexe associée à la transformée en z.</i>
$X(z)$	<i>Transformée en z de la séquence $\{x(t)\}$</i>
$U(z)$	<i>Transformée en z de la séquence $\{u(t)\}$</i>
$Y(z)$	<i>Transformée en z de la séquence $\{y(t)\}$</i>
$V(z)$	<i>Transformée en z de la séquence $\{v(t)\}$</i>
$W(z)$	<i>Transformée en z de la séquence $\{w(t)\}$</i>
$\mathcal{R}^{p \times m}(z)$	<i>Ensemble des matrices rationnelles en z de dimension $p \times m$.</i>
$\mathcal{D}_s = \{z \in \mathcal{C} / z < 1\}$	<i>Domaine de stabilité des systèmes échantillonnés.</i>
$\mathcal{C}_{01} = \{z \in \mathcal{C} / z = 1\}$	<i>Cercle unité du plan complexe en z</i>
(F, G, H)	<i>Réalisation d'état du système.</i>
$\mathcal{G}(z)$	<i>Matrice de transfert du système.</i>
Q_o	<i>Matrice de covariance des perturbations d'état.</i>
R_o	<i>Matrice de covariance des bruits de mesure.</i>
M_p	<i>Matrice du Gain du prédicteur de Kalman.</i>
M_f	<i>Matrice du Gain du filtre de Kalman.</i>
$\mathcal{G}_{oo}(z),$	<i>Fonction de transfert en boucle ouverte.</i>
$\mathcal{S}_o(z)$	<i>Fonction de sensibilité.</i>
$\mathcal{T}_o(z)$	<i>Fonction de sensibilité complémentaire.</i>

1 Introduction.

La mesure des variables d'état est beaucoup plus une exception qu'une règle dans la pratique. En effet, les variables d'état n'ont généralement aucun sens physique et la réalisation d'état est plurielle. Dans le contexte de la théorie des signaux et systèmes, on utilise des systèmes dynamiques qui permettent de réaliser la meilleure estimation possible de la trajectoire d'état à partir du comportement d'entrée-sortie du système comme l'indique la figure 1. La théorie de l'estimation optimale a connu un essor considérable aussi bien d'un point de vue théorique que d'un point de vue pratique. Des méthodologies d'estimation optimale ont été développées à partir des outils d'analyse, de synthèse et de mise en oeuvre disponibles et ont conduit à de nombreuses applications industrielles réussies. Ces applications ont été réalisées aussi bien par des universitaires que par des ingénieurs de bureaux d'études.

Cette note est dédiée est essentiellement consacrée au problème d'estimation optimale pour les systèmes échantillonnés décrits par la représentation d'état

$$\mathcal{MEO} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (1)$$

où (F, G, H) est une réalisation d'état du système associée au vecteur d'état $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont des séquences de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle telles que

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^T(t-\tau) & v^T(t-\tau) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} Q_o & W_o \\ W_o^T & R_o \end{pmatrix} \delta(\tau) \quad (2)$$

où $Q_o = G_o G_o^T \geq 0$ et $R_o = R_o^T > 0$ sont respectivement les matrices de covariance des perturbations d'état et de sortie et W_o est la matrice d'intercorrélacion entre les perturbations d'état et de sortie. Ce processus stochastique est initialisé par une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne x_o et de sa matrice de covariance Σ_o , soit

$$\mathcal{E}\{x(0)\} = x_o \quad \text{et} \quad \mathcal{E}\{(x(0) - x_o)(x(0) - x_o)^T\} = \Sigma_o \quad (3)$$

Ce problème est traité à partir des résultats élaborés au sein de l'École de Kalman et dont l'ultime motivation est de réaliser une estimation à variance minimale de la trajectoire d'état du système à partir de son comportement d'entrée-sortie comme l'indique la figure 1. Cette estimation optimale est réalisée par des systèmes dynamiques dont la structure usuelle est donnée par

$$\mathcal{EO} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M(t)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4)$$

où $\{\hat{x}(t)\} \in \mathcal{R}^n$ désigne la trajectoire d'état estimée et $\{M(t)\} \in \mathcal{R}^{n \times p}$ est la séquence du gain d'observation qui est déterminée de manière à réaliser les performances requises. Dans le contexte stochastique considéré, les meilleures performances réalisables consistent en une estimation consistante et optimale au sens de la minimisation de la covariance de

l'erreur d'estimation, $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, soit

$$\Sigma(t) = \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} \text{ est minimale}$$

La consistance de l'estimateur est une conséquence directe de la structure de l'estimateur comme le montre la description suivante de l'erreur d'estimation

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t+1)\} = (F - M(t)H) \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\}$$

soit

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\} = \prod_{\tau=0}^{t-1} (F - M(\tau)H) \mathcal{E}\{\tilde{x}(0)\}$$

En effet, il apparaît clairement que l'erreur d'estimation peut être identiquement nulle en moyenne avec une initialisation adéquate, notamment

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(0)\} = 0 \implies \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\} = 0$$

et qu'elle est asymptotiquement nulle indépendamment des conditions initiales si et seulement si l'estimateur est asymptotiquement stable. Cette propriété doit être satisfaite, autrement le problème d'estimation serait mal posé.

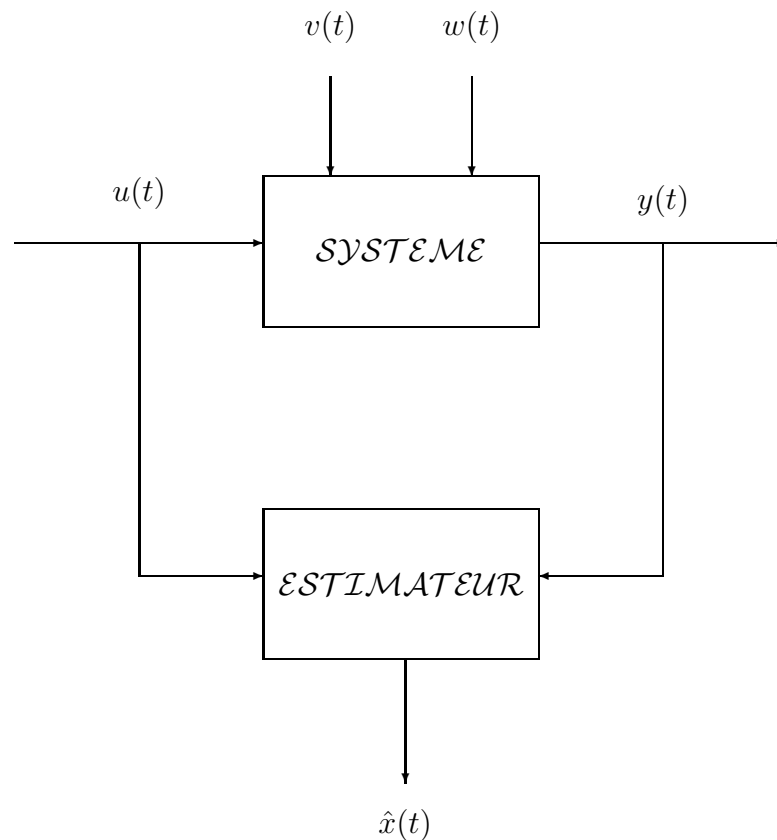


Figure 1: Estimation d'état

On distingue deux estimateurs optimaux selon la nature du traitement des données effectué ([5]). Le premier estimateur est le \mathcal{P} rédicteur de Kalman qui réalise la meilleure estimation de la trajectoire d'état à partir des données disponibles à l'instant $t - 1$, soit $\{\hat{x}(t/t - 1)\}$, alors que le second estimateur est le \mathcal{F} iltre de Kalman qui réalise la meilleure estimation de la trajectoire d'état à partir des données disponibles à l'instant t , soit $\{\hat{x}(t/t)\}$. Ces estimateurs optimaux sont présentés d'une manière concise et précise en accordant une importante attention à leur propriété de robustesse. Une telle propriété constitue l'essence de l'ingénierie de l'estimation optimale qui est au coeur de sciences et technologies de l'information. Deux applications de l'estimation optimale sont présentées pour illustrer la pluralité de son application.

Les trois résultats fondamentaux suivants présentent les bases mathématiques requises pour appréhender la culture de l'estimation optimale ([1], [2], [3], [4]).

R1 Le premier concerne la **valeur moyenne d'une forme quadratique**

Résultat 1 Soit x une variable gaussienne aléatoire de moyenne M_x et de covariance C_{xx} et W une matrice symétrique définie positive. On a

$$\mathcal{E} \{x^T W x\} = \text{trace}(W C_{xx}) + M_x^T W M_x$$

R2. Le second exploite la technique du **complémentation d'un carré parfait**

Résultat 2 La fonction quadratique définie par

$$J(x, u) = \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_x & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} W_x & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_u \end{bmatrix}^T > 0$$

peut se récrire sous la forme

$$J(x, u) = x^T (W_x - K^T W_u K) x + (u + Kx)^T W_u (u + Kx) \quad \text{avec} \quad W_u K = W_{xu}^T$$

Il est clair que cette fonction est minimisée pour $u = -Kx$ et que le minimum correspondant est donné par

$$J(x, u) = x^T (W_x - K^T W_u K) x \geq 0$$

Pour apprécier un tel résultat, il suffit de tenir compte de la propriété suivante

$$\begin{bmatrix} W_x & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_u \end{bmatrix}^T > 0 \iff W_u > 0 \text{ et } W_x - W_{xu} W_u^{-1} W_{xu}^T > 0$$

R3. Le dernier précise les conditions structurelles requises pour que le problème d'estimation optimale soit bien posé.

Résultat 3 *Supposons que (H, F) est détectable et $(F, \sqrt{Q_o})$ est stabilisable, alors l'équation algébrique de Riccati*

$$\Sigma = F\Sigma F^T - F\Sigma H^T (R_o + H\Sigma H^T)^{-1} H\Sigma F^T + Q_o$$

admet une solution unique symétrique et définie non-négative Σ qui vérifie la propriété de stabilité suivante

$$\mathcal{V} \left(F - F\Sigma H^T (R_o + H\Sigma H^T)^{-1} H \right) \subset \mathcal{D}_s$$

Si en plus la paire $(F, \sqrt{Q_o})$ est commandable, alors la solution Σ est définie positive.

Les bases fondamentales des systèmes échantillonnés sont présentées d'une manière compréhensible dans [6] en adoptant une approche d'état.

2 Prédicteur de Kalman

Le \mathcal{PK} réalise une estimation à variance minimale de la trajectoire d'état à partir des données disponibles à l'instant $t - 1$, soit

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t/t - 1) \} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma(t/t - 1) = \mathcal{E} \{ \tilde{x}(t/t - 1) \tilde{x}(t/t - 1)^T \} \quad \text{est minimale}$$

où $\tilde{x}(t/t - 1)$ désigne l'erreur de prédiction, soit $\tilde{x}(t/t - 1) = x(t) - \hat{x}(t/t - 1)$. Le résultat fondamental suivant caractérise complètement le \mathcal{PK} .

Résultat 4 *Le \mathcal{PK} associé à la classe des systèmes décrits par (1)-(3) est donné par*

$$\mathcal{PK} \begin{cases} \hat{x}(t + 1/t) = F\hat{x}(t/t - 1) + Gu(t) + M_p(t) (y(t) - \hat{y}(t/t - 1)) \\ \hat{y}(t/t - 1) = H\hat{x}(t/t - 1) \end{cases} \quad (5)$$

avec

$$M_p(t) = (F\Sigma(t/t - 1)H^T + W_o) (H\Sigma(t/t - 1)H^T + R_o)^{-1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Sigma(t + 1/t) &= F\Sigma(t/t - 1)F^T + Q_o - (F\Sigma(t/t - 1)H^T + W_o) \dots \\ &\dots (R_o + H\Sigma(t/t - 1)H^T)^{-1} (H\Sigma(t/t - 1)F^T + W_o^T) \end{aligned} \quad (7)$$

Preuve. La structure du \mathcal{PK} est une conséquence directe de la théorie de l'estimation à variance minimale, $\{M_p(t)\} \in \mathcal{R}^{n \times p}$ est la séquence de gain de prédiction que l'on détermine de manière à réaliser les performances requises. L'équation de l'erreur de prédiction peut être obtenue à partir d'une simple manipulation algébrique utilisant les équations du système (1) et du prédicteur (5) comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t + 1/t) &= (F - M_p(t)H) \tilde{x}(t/t - 1) + w(t) - M_p(t)v(t) \\ &= \begin{pmatrix} I_n & -M_p(t) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} \tilde{x}(t/t - 1) + \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On notera que l'erreur de prédiction est identiquement nulle en moyenne si elle est convenablement initialisée, i.e. $\hat{x}(t) = x_o$, et qu'elle est asymptotiquement nulle puisque l'estimateur doit être asymptotiquement stable. La matrice de covariance de l'erreur de prédiction peut alors se récrire comme suit

$$\begin{aligned}\Sigma(t+1/t) &= \mathcal{E} \left\{ \tilde{x}(t+1/t) \tilde{x}(t+1/t)^T \right\} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & -M_p(t) \end{pmatrix} \mathcal{W}(t/t-1) \begin{pmatrix} I_n & -M_p(t) \end{pmatrix}^T\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(t/t-1) &= \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} \Sigma(t/t-1) \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} Q_o & W_o \\ W_o^T & R_o \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o & F\Sigma(t/t-1)H^T + W_o \\ H\Sigma(t/t-1)F^T + W_o^T & H\Sigma(t/t-1)H^T + R_o \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On notera l'équation de la covariance de l'erreur de prédiction est semblable à la fonction quadratique considérée dans le résultat 2 que l'on peut utiliser pour déterminer directement le gain de prédiction qui minimise la covariance de l'erreur de prédiction. Le gain de prédiction la covariance de l'erreur de prédiction qui en résulte sont bien donnés par les équations (6) et la covariance de l'erreur de prédiction qui en résulte (7).

CQFD.

Les remarques suivantes permettent de mieux appréhender les propriétés usuelles de la prédiction à variance minimale.

Remarque 2.1 *Si $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont des séquences gaussiennes, alors le \mathcal{PK} fournit une estimée à variance minimale de l'état qui n'est autre que la moyenne conditionnelle de l'état à partir des données d'entrée-sortie passées, soit*

$$\hat{x}(t/t-1) = \mathcal{E} \{x(t)/t-1\}$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$\nu(t) = y(t) - H\hat{x}(t/t-1)$$

on aura

$$\mathcal{E} \{\nu(t)/t-1\} = 0$$

et

$$y(t) = H\hat{x}(t/t-1) + \nu(t) = \mathcal{E} \{y(t)/t-1\} + \nu(t)$$

$\nu(t)$ est donc la nouvelle information contenue dans la sortie $y(t)$ et qui n'est pas disponible dans l'ensemble des entrées-sorties passées. C'est pourquoi $\{\nu(t)\}$ est dite séquence d'innovation et permet de récrire le \mathcal{PK} sous la forme

$$\mathcal{MI} \begin{cases} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t)\nu(t) \\ y(t) = H\hat{x}(t/t-1) + \nu(t) \end{cases} \quad (8)$$

Cette expression est connue sous l'appellation de modèle d'innovation dans la mesure où elle permet d'exprimer la sortie du système en fonction de la séquence d'innovation et de l'entrée du système. Par ailleurs, on peut exprimer la séquence d'innovation en fonction du comportement d'entrée-sortie du système comme suit

$$\mathcal{FB} \begin{cases} \hat{x}(t+1/t) = (F - M_p(t)H) \hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t)y(t) \\ \nu(t) = y(t) - H\hat{x}(t/t-1) \end{cases} \quad (9)$$

Ce modèle est dit filtre blanchisseur dans la mesure où il permet de reconstruire les bruits d'état et de sortie à partir du comportement d'entrée-sortie du système.

Remarque 2.2 Si $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ ne sont pas des séquences gaussiennes, le \mathcal{PK} réalise une estimation linéaire à variance minimale de l'état du système caractérisée par

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t)/t-1 \} = 0$$

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t/t-1)y(t-i)/t-1 \} = 0 \quad \text{pour tout } i \in [1, t]$$

et

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)/t-1 \} \leq \Sigma_f$$

où Σ_f désigne la matrice de covariance de l'erreur d'estimation qui résulte d'un quelconque estimateur linéaire de l'état du système.

Remarque 2.3 La matrice de covariance de l'erreur de prédiction peut se récrire sous la forme

$$\Sigma(t+1/t) = F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o - M_p(t) \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right) M_p^T(t)$$

Les termes

$$F\Sigma(t/t-1)F^T, \quad Q_o \quad \text{et} \quad M_p(t) \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right) M_p^T(t)$$

peuvent être respectivement interprétés comme les effets de la dynamique du système sur la variance de l'erreur d'estimation, de l'augmentation de la variance de l'erreur d'estimation due au bruit d'état et de la réduction de la variance de l'erreur d'estimation due aux informations contenues dans les mesures. Cette réduction est d'autant plus importante que le bruit de mesure est suffisamment petit. On notera aussi que la matrice de variance R_o ne doit pas être nécessairement définie positive pourvu que $R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T > 0$ pour tout t .

Remarque 2.4 Supposons que la séquence de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction vérifie la propriété suivante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t/t-1) = \Sigma_p$$

alors on peut suggérer une version stationnaire du \mathcal{PK} comme suit

$$\mathcal{PK} \begin{cases} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(y(t) - \hat{y}(t/t-1)) \\ \hat{y}(t/t-1) = H\hat{x}(t/t-1) \end{cases}$$

avec

$$M_p = (F\Sigma_p H^T + W_o) (H\Sigma_p H^T + R_o)^{-1}$$

$$\Sigma_p = F\Sigma_p F^T + Q_o - (F\Sigma_p H^T + W_o) (R_o + H\Sigma_p H^T)^{-1} (F\Sigma_p H^T + W_o)^T$$

Remarque 2.5 Le problème d'estimation optimale aurait pu être directement développé pour les systèmes linéaires variant dans le temps, décrits par $(F(t), G(t), H(t))$, pourvu qu'ils soient uniformément observables. Le \mathcal{PK} correspondant est alors donné par

$$\mathcal{SLVT} \begin{cases} \hat{x}(t+1/t) = F(t)\hat{x}(t/t-1) + G(t)u(t) + M_p(t)(y(t) - \hat{y}(t/t-1)) \\ \hat{y}(t/t-1) = H(t)\hat{x}(t/t-1) \end{cases}$$

avec

$$M_p(t) = (F(t)\Sigma(t/t-1)H^T(t) + W_o) (H(t)\Sigma(t/t-1)H^T(t) + R_o)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Sigma(t+1/t) &= F(t)\Sigma(t/t-1)F^T(t) + Q_o - (F(t)\Sigma(t/t-1)H^T(t) + W_o) \dots \\ &\dots (R_o + H(t)\Sigma(t/t-1)H^T(t))^{-1} (H(t)\Sigma(t/t-1)F^T(t) + W_o^T) \end{aligned}$$

Cette remarque est particulièrement utile pour la conception des algorithmes d'adaptation paramétrique robustes pour l'identification des systèmes.

Dans ce qui suit, on considère deux problèmes pour mieux illustrer le processus de prédiction optimale. Le premier consiste à montrer que le \mathcal{PK} peut être utilisé pour la dérivation numérique de la mesure d'un signal dont le modèle générateur est connu, alors que le second est un bonus sur l'optimalité du \mathcal{PK}

Reconstruction de la vitesse et de l'accélération à partir des mesures de position issues d'un radar avec une cadence d'une seconde. Cette estimation peut être réalisée par un \mathcal{PK} conçu à partir du système newtonien donné par les équations d'état et de sortie

$$\mathcal{SN} \begin{cases} \rho x(t) = F_n x(t) + G_n \delta_i(t) \\ y(t) = H_n x(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (10)$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

où $\{p(t)\}$, $\{v(t)\}$ et $\{a(t)\}$ désignent respectivement la position, la vitesse et l'accélération du centre d'inertie d'un mobile donné, $\{\eta(t)\}$ est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie σ_η^2 et $\delta_i(t)$ est une impulsion d'amplitude inconnue qui représente une entrée canonique du système newtonien.

Le modèle de prédiction n'est autre que le système échantillonné à la cadence d'une seconde du système newtonien (10)-(11) modulo une modification de l'entrée canonique compte tenu de la méconnaissance de la nature des variations de l'accélération, soit

$$\mathcal{SN}\mathcal{E} \begin{cases} x((k+1)T_e) = Fx(kT_e) + \gamma(t) \\ y(kT_e) = Hx(kT_e) + \eta(kT_e) \end{cases} \quad (12)$$

avec

$$F = e^{F_n T_e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = H_n \quad (13)$$

où $\{\gamma(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de matrice de covariance Γ qui représente une entrée canonique adéquate du modèle échantillonné.

Comme le bruit de mesure est essentiellement différent des variations de l'accélération, on peut conclure naturellement que $\{\gamma(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$ sont des séquences indépendantes. La version stationnaire du \mathcal{PK} associé est alors donné par les équations suivantes

$$\hat{x}((k+1)T_e) = (F - MH)\hat{x}(kT_e) + My(t)$$

avec

$$M = \frac{F\Sigma H^T}{\sigma_\sigma^2 + H\Sigma H^T}$$

$$\Sigma = F\Sigma F^T - \frac{F\Sigma H^T H\Sigma F^T}{\sigma_\gamma^2 + H\Sigma H^T} + \Gamma$$

Outre la vitesse et l'accélération qui sont respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de la position, le \mathcal{PK} réalise une estimation optimale de la position dont la précision dépend de la valeur choisie pour la matrice de covariance Γ .

Remarque 2.6 *Les applications relevant de la poursuite d'un véhicule spatial dont les mesures d'azimut issus d'un radar requièrent la connaissance de sa vitesse et son accélération. Ces variables sont communément obtenues par une estimation optimale à partir d'un modèle générateur approprié de l'azimut du véhicule spatial. Et cette estimation optimale est communément réalisée par un estimateur de Kalman, notamment le \mathcal{PK} .*

Une intuition optimale. Considérons un processus stochastique stationnaire dont le modèle générateur est décrit par les équations

$$\mathcal{MGS} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G\gamma(t) \\ y(t) = Hx(t) + E\gamma(t) \end{cases} \quad (14)$$

où (F, G, H, E) est une réalisation d'état minimale du modèle générateur associée au vecteur d'état $\{x(t)\} \in \mathcal{R}^n$, $\{y(t)\} \in \mathcal{R}^p$ désigne la sortie du système et $\{\gamma(t)\} \in \mathcal{R}^p$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de matrice de covariance $\Gamma_o = \Gamma_o^T > 0$ qui constitue l'entrée du modèle générateur. Ce modèle générateur se distingue par deux propriétés que l'on peut exprimer en fonction de sa fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G + E \in \mathcal{R}^{p \times p}(s)$$

comme suit

$\mathcal{P1.}$ $\mathcal{G}(z)$ est inversible

$\mathcal{P2.}$ $\mathcal{G}(z)$ et $\mathcal{G}^{-1}(z)$ sont asymptotiquement stables

Et en vertu du calcul de l'inverse d'un système au paragraphe ?? du chapitre ??, l'inverse du modèle générateur des perturbations est décrit par la réalisation d'état

$$(F - GE^{-1}H, -E^{-1}H, GE^{-1}, -E^{-1})$$

Par ailleurs, on peut déterminer les polynômes des pôles et des zéros du modèle générateur des perturbations à partir du déterminant de sa fonction de transfert, soit

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{G}(z)) &= \det(EE^{-1}H(zI_n - F)^{-1}G + E) \\ &= \det(E) \det(E^{-1}H(zI_n - F)^{-1}G + I_p) \\ &= \det(E) \det((zI_n - F)^{-1}GE^{-1}H + I_n) \\ &= \det(E) \det((zI_n - F)^{-1}GE^{-1}H + (zI_n - F)^{-1}(zI_n - F)) \\ &= \det(E) \det((zI_n - F)^{-1}) \det(zI_n - F + GE^{-1}H) \\ &= \det(E) \frac{\det(zI_n - F + GE^{-1}H)}{\det(zI_n - F)} \end{aligned}$$

La configuration des pôles (resp. des zéros) du modèle générateur des perturbations est donc donnée par

$$\mathcal{CP}(\mathcal{G}(z)) = \{p \in \mathcal{C} / \det(pI_n - F) = 0\}$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}(z)) = \{\zeta \in \mathcal{C} / \det(\zeta I_n - F + GE^{-1}H) = 0\} \right)$$

On se propose d'étudier le problème d'estimation des variables d'état du modèle générateur des processus stochastiques stationnaires en utilisant judicieusement nos connaissances sur l'observation des systèmes compte tenu des propriétés de modélisation des

processus stochastiques présentées d'une manière concise ci dessus. Ces éléments suggèrent en effet d'étudier ce problème d'estimation à partir du système dynamique

$$\mathcal{EMGS} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases} \quad (15)$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{EMGS} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = (F - MH)\hat{x}(t) + My(t) \end{cases} \quad (16)$$

où $M \in \mathcal{R}^{n \times p}$ n'est autre que le gain d'estimation que l'on peut déterminer conformément aux deux propriétés élémentaires d'une estimation admissible, en l'occurrence

$$\mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_{sa} \text{ et } \{\tilde{x}(t)\} \text{ est aussi petite que possible}$$

où $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$ désigne l'erreur d'estimation sous-jacente donnée par l'équation

$$\tilde{x}(t+1) = (F - MH)\tilde{x}(t) + (G - ME)\gamma(t) \quad (17)$$

Il apparaît clairement que cette erreur d'estimation est asymptotiquement nulle pourvu que le gain d'estimation es tel que

$$M = GE^{-1} \text{ et } \mathcal{V}(F - GE^{-1}H) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

En effet l'erreur d'estimation est réduite comme suit

$$\tilde{x}(t+1) = (F - MH)\tilde{x}(t)$$

Et comme $\mathcal{V}(F - GE^{-1}H) \subset \mathcal{D}_{sa}$ en vertu de la propriété de stabilité asymptotique de l'inverse du modèle générateur des perturbations, on peut postuler que l'erreur d'estimation est asymptotiquement nulle, i.e.

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{E}\{\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t)\} = 0$$

On peut ainsi réaliser une estimation parfaite des variables d'état du modèle générateur et de son entrée avec le système dynamique suivant

$$\mathcal{EEE}MGS \begin{cases} \hat{x}(t+1) = (F - GE^{-1}H)\hat{x}(t) + GE^{-1}y(t) \\ \hat{y}(t) = -E^{-1}H\hat{x}(t) + E^{-1}y(t) \end{cases} \quad (18)$$

Cette estimation parfaite peut être naturellement obtenue par un \mathcal{PK} associé au modèle générateur des perturbations (14). Ce dernier est obtenu à partir du résultat 4 avec les matrices Q_o , R_o et W_o appropriées, soit $Q_o = G\Gamma_o G^T$, $R_o = E\Gamma_o E^T$ et $W_o = G\Gamma_o E^T$.

$$\mathcal{PK} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = (F - M(t)H)\hat{x}(t) + My(t) \end{cases}$$

avec

$$M(t) = (F\Sigma(t)H^T + G\Gamma_o E^T) (E\Gamma_o E^T + H\Sigma(t)H^T)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\Sigma(t+1) &= F\Sigma(t)F^T + G\Gamma_oG^T - \left(F\Sigma(t)H^T + G\Gamma_oE^T\right) \dots \\ &\dots \left(E\Gamma_oE^T + H\Sigma(t)H^T\right)^{-1} \left(H\Sigma(t)F^T + E\Gamma_oG^T\right)\end{aligned}$$

On notera le changement de notation par rapport à celle adoptée pour le le prédicteur, en l'occurrence $\hat{x}(t+1)$ et $\hat{x}(t)$ au lieu de $\hat{x}(t+1/t)$ et $\hat{x}(t/t-1)$, $\Sigma(t+1)$ et $\Sigma(t)$ au lieu de $\Sigma(t+1/t)$ et $\Sigma(t/t-1)$ et $M(t)$ au lieu de $M_p(t)$, qui est particulièrement motivé par le fait que la structure de l'estimateur issu de notre savoir faire en matière de l'estimation est clairement celle d'un prédicteur.

Par ailleurs, on vérifie aisément que la variance de l'erreur d'estimation d'état est asymptotiquement nulle et en déduire la limite du gain d'estimation, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0_n \implies \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = GE^{-1}$$

On retrouve ainsi le prédicteur qui a été proposé à la question précédente en poursuivant une approche intuitive et postuler qu'il est implementable et asymptotiquement stable compte tenu des propriétés $\mathcal{P}1$ et $\mathcal{P}2$ du modèle générateur (14).

3 Filtre de Kalman.

Le \mathcal{FK} est un système dynamique qui réalise la meilleure estimation linéaire de la trajectoire d'état $\{\hat{x}(t/t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ à partir des données disponibles à l'instant t . La structure du \mathcal{FK} est obtenue à partir de celle du \mathcal{PK} comme suit

$$\mathcal{RPFK} \begin{cases} \hat{x}(t/t) = \hat{x}(t/t-1) + M_f(t) (y(t) - H\hat{x}(t/t-1)) \\ \hat{y}(t/t) = H\hat{x}(t/t) \end{cases} \quad (19)$$

où $M_f(t) \in \mathcal{R}^{n \times p}$ est le gain de filtrage qui est déterminé de manière à réaliser les performances suivantes

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t/t) \} = 0 \text{ et } \Sigma(t/t) = \mathcal{E} \{ \tilde{x}(t/t)\tilde{x}(t/t)^T \} \text{ est minimale}$$

La relation de passage entre le filtre et le prédicteur est obtenue à partir de l'équation d'état du système (1)-(3), soit

$$\mathcal{RFPK} \begin{cases} \hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t) + Gu(t) + \hat{w}(t/t) \\ \hat{w}(t/t) = M_w(t) (y(t) - H\hat{x}(t/t-1)) \end{cases} \quad (20)$$

Compte tenu de l'équation du prédicteur (5) et des équations du filtre (19)-(20), on trouve que les gains de prédiction et de filtrage sont reliés comme suit

$$\begin{aligned}M_p(t) &= FM_f(t) + M_w(t) \\ &= \left(F\Sigma(t/t-1)H^T + W_o\right) \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T\right)^{-1}\end{aligned} \quad (21)$$

soit

$$M_f(t) = \Sigma(t/t-1)H^T \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right)^{-1} \quad (22)$$

$$M_w(t) = W_o \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right)^{-1} \quad (23)$$

Quant à l'erreur de filtrage et sa variance, elles sont respectivement données par

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t/t) &= x(t) - \hat{x}(t/t-1) - M_f(t) (y(t) - H\hat{x}(t/t-1)) \\ &= x(t) - \hat{x}(t/t-1) - M_f(t) (Hx(t) + v(t) - H\hat{x}(t/t-1)) \\ &= (I_n - M_f(t)H) \tilde{x}(t/t-1) - M_f(t)v(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma(t/t) &= (I_n - M_f(t)H) \Sigma(t/t-1) (I_n - M_f(t)H)^T + M_f(t)R_oM_f(t)^T \\ &= \Sigma(t/t-1) + M_f(t) \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right) M_f(t)^T \\ &\quad - M_f(t)H\Sigma(t/t-1) - \Sigma(t/t-1)H^T M_f(t)^T \\ &= \Sigma(t/t-1) - M_f(t)H\Sigma(t/t-1) \\ &= \Sigma(t/t-1) - \Sigma(t/t-1)H^T \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right)^{-1} H\Sigma(t/t-1) \end{aligned}$$

4 Résultats fondamentaux.

On présente dans ce qui suit les résultats fondamentaux des versions stationnaires des estimateurs de Kalman en supposant que les séquences $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont indépendantes, soit $W_o = 0$. Une telle hypothèse n'altère pas la généralité du contexte d'estimation optimale (traiter le problème 8.6 pour s'en convaincre). Les \mathcal{PK} et \mathcal{FK} sont respectivement donnés par les équations

$$\mathcal{PK} \left\{ \begin{aligned} \hat{x}(t+1/t) &= F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(t) (y(t) - H\hat{x}(t/t-1)) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

avec

$$M_p(t) = F\Sigma(t/t-1)H^T \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right)^{-1} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Sigma(t+1/t) &= F\Sigma(t/t-1)F^T + Q_o \\ &\quad - F\Sigma(t/t-1)H^T \left(R_o + H\Sigma(t/t-1)H^T \right)^{-1} H\Sigma(t/t-1)F^T \end{aligned} \quad (26)$$

et

$$\mathcal{FK} \left\{ \begin{aligned} \hat{x}(t+1/t+1) &= (I_n - M_f(t+1)H) F\hat{x}(t/t) \\ &\quad + (I_n - M_f(t+1)H) Gu(t) + M_f(t+1)y(t+1) \end{aligned} \right. \quad (27)$$

avec

$$M_f(t+1) = \left(F\Sigma(t/t)F^T + Q_o \right) H^T \left(R_o + H \left(F\Sigma(t/t)F^T + Q_o \right) H^T \right)^{-1} \quad (28)$$

$$\Sigma(t+1/t+1) = F\Sigma(t/t)F^T + Q_o - \left(F\Sigma(t/t)F^T + Q_o \right) H^T \dots$$

$$\dots \left(R_o + H \left(F\Sigma(t/t)F^T + Q_o \right) H^T \right)^{-1} H \left(F\Sigma(t/t)F^T + Q_o \right) \quad (29)$$

On notera que la forme récursive du filtre peut être obtenue, comme il est indiqué au problème 8.2, à partir de la relation entre les matrices de covariance des erreurs de prédiction et de filtrage, soit

$$\Sigma(t+1/t) = F\Sigma(t/t)F^T + Q_o$$

que l'on peut établir aisément. Le résultat suivant donne les équations des estimateurs stationnaires de Kalman et les conditions de leur consistance en remémorant que $Q_o = G_o G_o^T$.

Résultat 5 *Considérons la classe des systèmes (1)-(3) et supposons (H, F) est détectable et (F, G_o) est commandable. Alors les \mathcal{PK} et \mathcal{FK} ont des versions stationnaires données par les équations*

$$\hat{x}(t+1/t) = F\hat{x}(t/t-1) + Gu(t) + M_p(y(t) - H\hat{x}(t/t-1)) \quad (30)$$

$$\hat{x}(t+1/t+1) = (I_n - M_f H) F\hat{x}(t/t) + (I_n - M_f H) Gu(t) + M_f y(t+1) \quad (31)$$

avec

$$M_p = F\Sigma H^T \left(R_o + H\Sigma H^T \right)^{-1} = FM_f \quad (32)$$

$$\Sigma = F\Sigma F^T + Q_o - F\Sigma H^T \left(R_o + H\Sigma H^T \right)^{-1} H\Sigma F^T \quad (33)$$

Par ailleurs, ces estimateurs sont asymptotiquement stables et ont la même dynamique, soit

$$\mathcal{V}(F - M_p H) = \mathcal{V}((I_n - M_f H) F) \subset \mathcal{D}_s$$

Ce résultat est une application élémentaire du résultat 3. On peut alors en déduire que si la séquence matricielle $\{\Sigma(t/t-1)\}$ converge vers une matrice Σ , alors Σ est une solution de l'équation algébrique de Riccati (33). La séquence de gain de prédiction (respectivement de filtrage) converge alors vers le gain de prédiction M_p (respectivement le gain de filtrage M_f), soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_f(t) = M_f \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M_p(t) = M_p = F\Sigma H^T \left(R_o + H\Sigma H^T \right)^{-1} = FM_f$$

La solution Σ est stabilisante puisque (H, F) est détectable et (F, G_o) est commandable.

Par ailleurs, les erreurs de prédiction et de filtrage sont respectivement données par les

équations aux différences

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t+1/t)\} = (F - M_p H) \mathcal{E}\{\tilde{x}(t/t-1)\}$$

et

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}(t+1/t+1)\} = (I_n - M_f H) F \mathcal{E}\{\tilde{x}(t/t)\}$$

Le polynôme caractéristique du filtre peut alors se récrire comme suit

$$P_{cfil}(z) = \det(zI_n - (I_n - M_f H) F) = \det(zI_n - F(I_n - M_f H))$$

soit

$$P_{cfil}(z) = \det(zI_n - F + FM_f H) = \det(zI_n - F + M_p H) = P_{cpre}(z)$$

on aura donc

$$\mathcal{V}(F - M_p H) = \mathcal{V}((I_n - M_f H) F)$$

ce qui prouve bien que le prédicteur et le filtre ont bien la même dynamique. On retrouve ainsi les performances dynamiques des estimateurs de Kalman. Rappelons que ce résultat a été obtenu en supposant que les séquences $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont indépendantes, soit $W_o = 0$, et que cette hypothèse n'est pas restrictive comme le montre le problème 8.6.

Par ailleurs, le \mathcal{PK} et le \mathcal{FK} peuvent être représentés comme l'indiquent les figures (2) et (3). On notera que les fonctions de transfert des boucles ouvertes en sortie sont identiques compte tenu de la relation usuelle entre les gains de prédiction et de filtrage optimaux, soit $M_p = FM_f$. On aura alors

$$\mathcal{G}_{os}(z) = H(zI_n - F)^{-1} M_p = H(zI_n - F)^{-1} FM_f$$

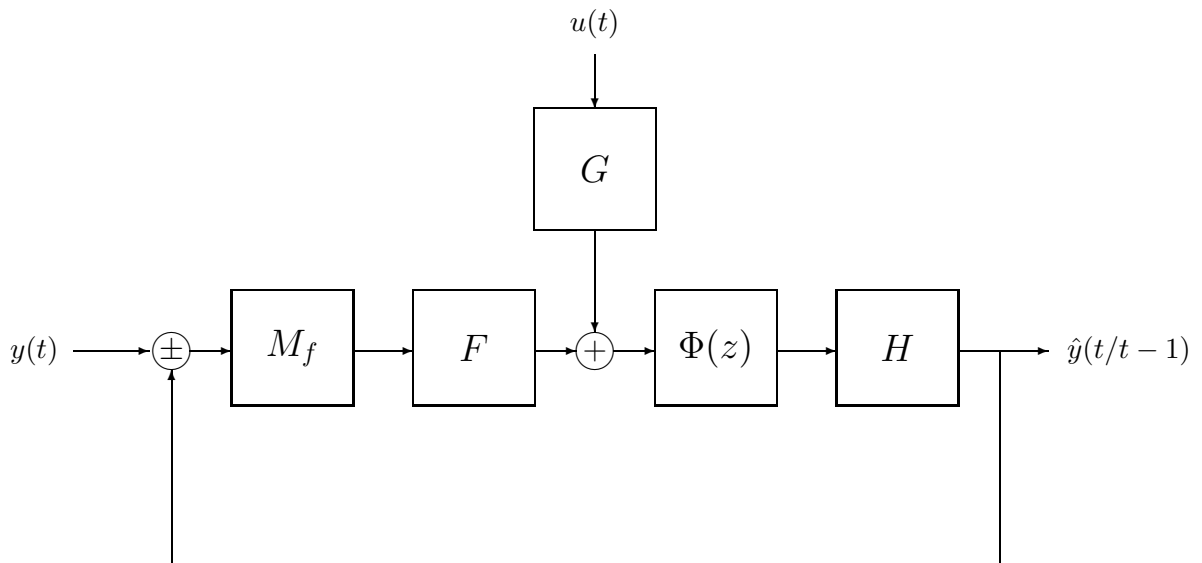


Figure 2: Prédicteur de Kalman

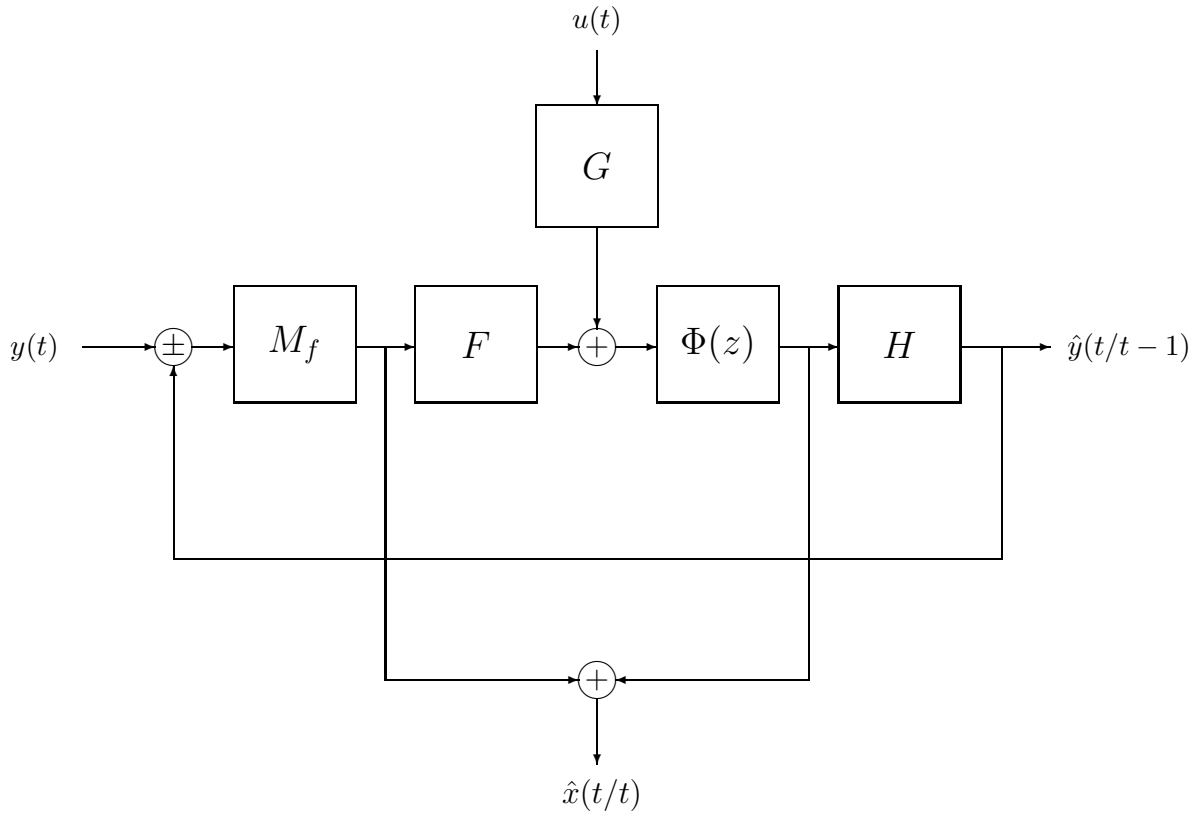


Figure 3: Filtre de Kalman

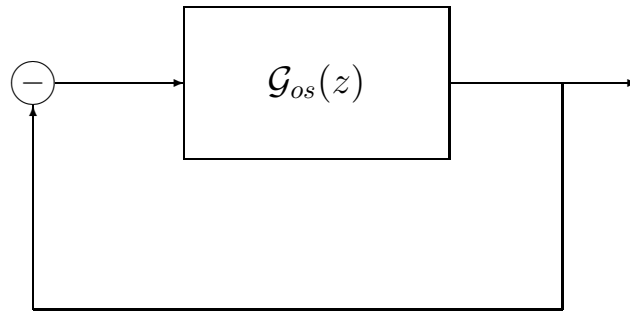


Figure 4: Boucle principale des estimateurs de Kalman

La figure 4 montre la boucle associée aux estimateurs de Kalman. Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire correspondantes sont alors respectivement données par

$$\mathcal{S}_s(z) = (I_p + \mathcal{G}_{os}(z))^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_s(z) = \mathcal{G}_{os}(z) (I_p + \mathcal{G}_{os}(z))^{-1}$$

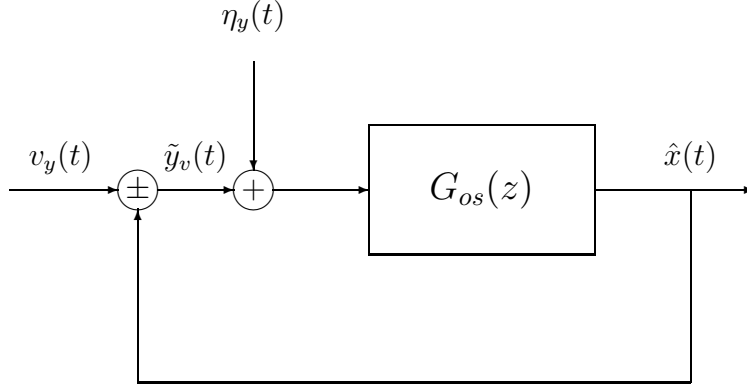


Figure 5: Perturbations en sortie des estimateurs de Kalman

Ces fonctions de sensibilité représentent les dynamiques de régulation vis à vis des perturbations d'état et des bruits de mesure en sortie comme l'indique la figure 5 où $\{v_y(t)\}$ et $\{\eta_y(t)\}$ désignent respectivement les perturbations de charge et les bruits de mesure en sortie, alors $\{\tilde{y}_v(t)\}$ n'est autre qu'une image virtuelle de l'erreur d'estimation lorsqu'on occulte l'entrée et la sortie du système. En effet, on a

$$\tilde{Y}_v(z) = \mathcal{S}_s(z)V_y(z) - \mathcal{T}_s(z)N_y(z)$$

Les estimateurs de Kalman possèdent des propriétés fondamentales remarquables comme l'indique le résultat suivant dont les propriétés ont été judicieusement utilisées pour le développement des méthodologies spécifiques pour l'estimation optimale et la commande.

Résultat 6 *Considérons le PK et FK (30)-(33) pour la classe des systèmes (1)-(3) tels que (H, F) est détectable et (F, G_o) est commandable et posons*

$$\mathcal{M}_{os}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G_o$$

$$A(z) = \det(zI_n - F) \quad \text{et} \quad P_{cest}(z) = \det(zI_n - F + M_p H)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sigma_{\min}(R_o)}{\sigma_{\max}(R_o + H\Sigma H^T)}} \in (0, 1]$$

Alors on a les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1$. *L'égalité de différence de retour*

$$(I_p + \mathcal{G}_{os}(z)) \left(R_o + H\Sigma H^T \right) \left(I_p + \mathcal{G}_{os}(z^{-1}) \right)^T = R_o + \mathcal{M}_{os}(z)\mathcal{M}_{os}(z^{-1})^T$$

est toujours vérifiée pour tout $z \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{P}2$. Les modes des estimateurs peuvent être déterminés à partir de l'équation de factorisation spectrale suivante

$$\frac{P_{cest}(z^{-1})P_{cest}(z)}{A(z^{-1})A(z)} = \frac{\det(R_o + \mathcal{M}_{os}(z)\mathcal{M}_{os}(z^{-1})^T)}{\det(R_o + H\Sigma H^T)}$$

$\mathcal{P}3$. La fonction de sensibilité des estimateurs vérifie l'inégalité suivante

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_s(z)) \leq \frac{1}{\beta} \text{ pour tout } z \in \mathcal{C}_{01}$$

Preuve. La propriété $\mathcal{P}1$ est obtenue à partir d'un ensemble de manipulations algébriques adéquate sur l'équation algébrique de Riccati (33). On remarque d'abord que

$$\Sigma - F\Sigma F^T = (zI_n - F)\Sigma(z^{-1}I_n - F^T) + F\Sigma(z^{-1}I_n - F^T) + (zI_n - F)\Sigma F^T$$

Et compte tenu de l'équation algébrique de Riccati (33), on aura

$$\begin{aligned} Q_o &= (zI_n - F)\Sigma(z^{-1}I_n - F^T) + F\Sigma(z^{-1}I_n - F^T) + (zI_n - F)\Sigma F^T \\ &\quad + F\Sigma H^T(R_o + H\Sigma H^T)^{-1}H\Sigma F^T \end{aligned}$$

En prémultipliant par $H(zI_n - F)^{-1}$ et en postmultipliant par $(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T$ on obtient

$$\begin{aligned} &H(zI_n - F)^{-1}Q_o(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T \\ &= \\ &H\Sigma H^T + H(zI_n - F)^{-1}F\Sigma H^T + H\Sigma F^T(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T \\ &+ H(zI_n - F)^{-1}F\Sigma H^T(R_o + H\Sigma H^T)^{-1}H\Sigma F^T(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T \end{aligned}$$

Et compte tenu de l'expression (32) du gain de le gain de prédiction, i.e. $M_p(R_o + H\Sigma H^T) = F\Sigma H^T$, on obtient

$$\begin{aligned} &H(zI_n - F)^{-1}Q_o(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T \\ &= \\ &H\Sigma H^T + H(zI_n - F)^{-1}M_p(R_o + H\Sigma H^T) + (R_o + H\Sigma H^T)M_p^T(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T \\ &+ H(zI - F)^{-1}M_p(R_o + H\Sigma H^T)M_p^T(z^{-1}I_n - F^T)^{-1}H^T \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} &R_o + H(zI_n - F)^{-1}Q_o(z^{-1}I_n - F)^{-T}H^T \\ &= \end{aligned}$$

$$\left(I_p + H(zI_n - F)^{-1}M_p\right)\left(R_o + H\Sigma H^T\right)\left(I_p + H(zI_n - F)^{-1}M_p\right)^T$$

La propriété $\mathcal{P}2$ est obtenue à partir du développement suivant

$$\begin{aligned} \det(I_p + \mathcal{G}_{os}(z)) &= \det\left(I_p + H(zI_n - F)^{-1}M_p\right) \\ &= \det\left(I_n + (zI_n - F)^{-1}M_pH\right) \\ &= \det\left((zI_n - F)^{-1}\right)\det(zI_n - F + M_pH) = \frac{P_{cest}(z)}{A(z)} \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité de différence de retour, on obtient

$$\det(I_p + \mathcal{G}_{os}(z))\det(R_o + H\Sigma H^T)\det(I_p + \mathcal{G}_{os}(z^{-1})) = \det(R_o + \mathcal{M}_{os}(z)\mathcal{M}_{os}(z^{-1})^T)$$

On peut ainsi déterminer les modes des estimateurs optimaux sans connaître la solution de l'équation algébrique de Riccati.

Pour la propriété $\mathcal{P}3$, on utilisera d'abord le fait que l'égalité de différence est vérifiée pour tout $z \in \mathcal{C}$, soit

$$\left(I_p + \mathcal{G}_{os}(e^{j\omega T_e})\right)\left(R_o + H\Sigma H^T\right)\left(I_p + \mathcal{G}_{os}(e^{-j\omega T_e})\right)^T = R_o + \mathcal{M}_{os}(e^{j\omega T_e})\mathcal{M}_{os}^T(e^{-j\omega T_e})$$

Et puisque R_o est une matrice définie positive et que $\mathcal{M}_{os}(e^{j\omega T_e})\mathcal{M}_{os}^T(e^{-j\omega T_e})$ est un spectre et donc une forme hermitienne, on obtient l'inégalité de différence de retour sur le cercle unité

$$\left(I_p + \mathcal{G}_{os}(e^{j\omega T_e})\right)\left(R_o + H\Sigma H^T\right)\left(I_p + \mathcal{G}_{os}(e^{-j\omega T_e})\right)^T \geq R_o$$

Par ailleurs, comme l'équation algébrique de Riccati (33) admet une solution symétrique définie non négative et que R_o et $R_o + H\Sigma H^T$ sont des matrices symétriques et définies positives, on aura

$$\sigma_{max}\left(R_o + H\Sigma H^T\right)\sigma_{min}^2\left(I_p + \mathcal{G}_{os}(e^{j\omega T_e})\right) \geq \sigma_{min}(R_o)$$

Et compte tenu de la définition de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}_s(z) = (I_p + \mathcal{G}_{os}(z))^{-1}$ et de l'expression du scalaire β , on obtient

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_s(z)) \leq \beta \text{ pour tout } z \in \mathcal{C}_{01}$$

Les remarques suivantes permettent d'approfondir ultérieurement l'étude des propriétés usuelles des estimateurs de Kalman.

Remarque 4.1 *La propriété $\mathcal{P}2$ permet de déduire le comportement asymptotique des modes des estimateurs lorsque les matrices de covariance des perturbations d'état et de sortie sont suffisamment petites, soit*

$$P_{cest}(z)P_{cest}(z^{-1}) \approx B_{oo}(z)B_{oo}(z^{-1}) \text{ lorsque } R_o \rightarrow 0$$

et

$$P_{cest}(z)P_{cest}(z^{-1}) \approx A(z)A(z^{-1}) \text{ lorsque } Q_o \longrightarrow 0$$

avec

$$\frac{B_{oo}(z)B_{oo}(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} = \det \left(\mathcal{M}_{os}(z)\mathcal{M}_{os}^T(z^{-1}) \right)$$

Lorsque la matrice de covariance des perturbations de sortie est suffisamment petite, les modes du processus d'estimation optimal sont obtenus à partir des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{os}(z)$ qui représente le modèle de commande lorsque $Q_o = GG^T$. Outre les modes à l'origine, on retrouve les zéros stables de $\mathcal{M}_{os}(z)$ et des modes stables issus de la réflexion par rapport au cercle unité des zéros instables de $\mathcal{M}_{os}(z)$. L'intuition physique selon laquelle on peut avoir un estimateur infiniment rapide si les mesures sont relativement précises est fallacieuse.

Et lorsque la matrice de covariance des perturbations d'état est suffisamment petite, on retrouve d'une part les pôles stables du système et les modes issus de la réflexion par rapport au cercle unité des pôles instables du système.

Remarque 4.2 La propriété $\mathcal{P}3$ confère aux estimateurs de Kalman une robustesse remarquable : les erreurs de modélisation et les perturbations que l'on peut ramener d'une manière ou d'une autre en sortie sont relativement atténuées en basses fréquences. Dans le cas des systèmes monovariables, une telle propriété devient

$$|1 + \mathcal{G}_{os}(e^{j\omega T_e})| \geq \beta \text{ pour tout } \omega \in \left(-\frac{\pi}{T_e}, +\frac{\pi}{T_e} \right)$$

Le lieu de Nyquist du gain en boucle ouverte se trouve ainsi à l'extérieur d'un cercle de centre le point critique $(-1, 0j)$ et de rayon β . Les marges de module, de gain et de phase qui en résultent sont respectivement données par

$$\Delta M = \beta, \quad \Delta G \in \left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{1}{1-\beta} \right) \text{ et } \Delta\phi \geq 2 \arcsin \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

On ne retrouve pas ce type de robustesse dans le cas d'une observation modale mais ce résultat doit être toutefois interprété avec prudence dans la mesure où il ne concerne que des incertitudes que l'on peut ramener en sortie du système et la fonction de sensibilité complémentaire des estimateurs exhibe une pente de 20dB par décade pour les hautes fréquences et sont donc relativement sensibles aux bruits de mesure.

Remarque 4.3 En supposant que les conditions initiales sont nulles, on peut récrire les estimateurs de Kalman comme suit

$$\hat{Y}_p(z) = \mathcal{F}_{pu}(z)U(z) + \mathcal{F}_{py}(z)Y(z)$$

avec

$$\mathcal{F}_{pu}(z) = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F + M_p H) G}{P_{cest}(z)}$$

$$\mathcal{F}_{py}(z) = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F + M_p H) M_p}{P_{cest}(z)}$$

et

$$\hat{Y}_f(z) = \mathcal{F}_{fu}(z)U(z) + \mathcal{F}_{fy}(z)Y(z)$$

avec

$$\mathcal{F}_{fu}(z) = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F - M_f H F) (I_n - M_f H) G}{P_{cest}(z)}$$

$$\mathcal{F}_{fy}(z) = \frac{z H \text{Adj}(zI_n - F - M_f H F) M_f}{P_{cest}(z)}$$

Il apparaît clairement que le filtre peut être relativement sensible aux bruits de mesure en sortie puisque la fonction de transfert $\mathcal{F}_{fy}(z)$ n'est pas strictement propre dans le cas général. Ce n'est pas le cas du prédicteur puisque la fonction de transfert $\mathcal{F}_{py}(z)$ est strictement propre. Par ailleurs, l'erreur de prédiction de la sortie est donnée par

$$\tilde{y}(t/t-1) = H\tilde{x}(t/t-1) + v(t)$$

avec

$$\tilde{x}(t+1/t) = (F - M_p H) \tilde{x}(t/t-1) + w(t) - M_p v(t)$$

En supposant que les conditions initiales sont nulles et en utilisant le lemme d'inversion matriciel, on aura

$$\tilde{Y}(z) = \mathcal{S}_o(z)V(z) + \mathcal{W}_o(z)W(z) \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_o(z) = H(zI_n - F + M_p H)^{-1}$$

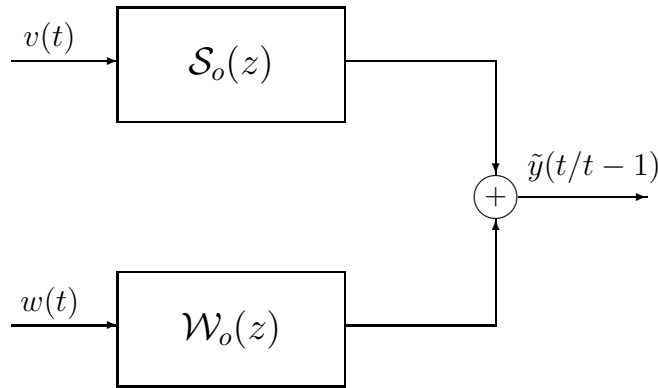


Figure 6: Effets des perturbations sur l'erreur de prédiction

Cette équation permet de mettre en évidence les effets des perturbations d'état et des bruits de mesure sur la prédiction de la sortie du système comme le montre la figure 6. Conformément à la propriété $\mathcal{P}3$ du résultat fondamental 6, les effets les plus néfastes des bruits de mesure correspondent à une amplification d'un facteur β .

5 Estimation optimale des signaux

Dans le contexte d'estimation optimale, le comportement des signaux est particulièrement décrit par les deux modèles générateurs respectivement donnés par

$$\text{SIG} \begin{cases} x_\sigma(t+1) = F_\sigma x_\sigma(t) + w_\sigma(t) \\ y(t) = H_\sigma x_\sigma(t) + v_\sigma(t) \end{cases} \quad (34)$$

et

$$\text{BRM} \begin{cases} x_\nu(t+1) = F_\nu x_\nu(t) + w_\nu(t) \\ v_\sigma(t) = H_\nu x_\nu(t) + v_\nu(t) \end{cases} \quad (35)$$

où $\{y(t)\} \in \mathcal{R}^p$ désigne la mesure du signal, $\{x_\sigma(t)\} \in \mathcal{R}^{n_\sigma}$ et $\{x_\nu(t)\} \in \mathcal{R}^{n_\nu}$ désignent respectivement les trajectoires d'état du modèle générateur du signal et celui des bruits de mesure qui lui sont associés, $\{w_\sigma(t)\} \in \mathcal{R}^{n_\sigma}$, $\{w_\nu(t)\} \in \mathcal{R}^{n_\nu}$ et $\{v_\nu(t)\} \in \mathcal{R}^p$ sont des séquences indépendantes de moyenne nulle et de covariances $Q_\sigma = Q_\sigma^T \geq 0$, $Q_\nu = Q_\nu^T \geq 0$, et $R_\nu = R_\nu^T > 0$.

Cette modélisation des signaux est principalement utilisée pour réaliser une estimation consistante des trajectoires d'état et de sortie du modèle générateur du signal à partir de sa mesure disponible. On notera d'abord que les représentations d'état des modèles générateurs du signal et du bruit de mesure qui lui est associé peuvent se récrire sous la forme suivante

$$\text{MES} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (36)$$

avec

$$x(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_\sigma(t) \\ x_\nu(t) \end{pmatrix}, \quad w(t) \triangleq \begin{pmatrix} w_\sigma(t) \\ w_\nu(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) \triangleq v_\nu(t) \quad (37)$$

$$F \triangleq \begin{pmatrix} F_\sigma & 0 \\ 0 & F_\nu \end{pmatrix}, \quad H \triangleq \begin{pmatrix} H_\sigma & H_\nu \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^T(t-\tau) & v^T(t-\tau) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} Q_o & 0 \\ 0 & R_o \end{pmatrix} \delta(\tau) \quad (39)$$

où les matrices de covariance Q_o et R_o sont respectivement données par

$$Q_o \triangleq \begin{pmatrix} Q_\sigma & 0 \\ 0 & Q_\nu \end{pmatrix} \triangleq G_o G_o^T \quad \text{et} \quad R_o \triangleq R_\nu \quad (40)$$

En vertu des résultats fondamentaux d'estimation optimale, on peut réaliser une estimation consistante des variables d'état du modèle générateur du signal et du modèle générateur du bruit de mesure à partir du modèle (36)-(40) pourvu que

$$(H, F) \text{ est détectable et } (F, G_o) \text{ est commandable}$$

L'estimation requise peut être naturellement réalisée par le \mathcal{PK} donné par les équations suivantes

$$\mathcal{PK} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = (F - MH) \hat{x}(t) + My(t) \\ \hat{x}_\sigma(t) = \begin{pmatrix} I_{n_\sigma} & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{cases} \quad (41)$$

avec

$$M = F \Sigma H^T (R_o + H \Sigma H^T)^{-1} \quad (42)$$

$$\Sigma = F \Sigma F^T + Q_o - F \Sigma H^T (R_o + H \Sigma H^T)^{-1} H \Sigma F^T \quad (43)$$

Et si l'on applique la transformée en z aux deux membres de l'équation d'état (41) du \mathcal{PK} , on obtient

$$\begin{pmatrix} zI_{n_\sigma} - F_\sigma + M_\sigma H_\sigma & M_\sigma H_\nu \\ M_\nu H_\sigma & zI_{n_b} - F_\nu + M_\nu H_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_\sigma(z) \\ \hat{X}_\nu(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\sigma \\ M_\nu \end{pmatrix} Y(z) + z \begin{pmatrix} \hat{x}_\sigma(0) \\ \hat{x}_\nu(0) \end{pmatrix}$$

Les performances nominales du \mathcal{PK} peuvent être étudiées à partir de ses fonctions de transfert respectivement données par

$$\hat{X}_\sigma(z) = \mathcal{G}_{e\sigma}(z) Y(z) \quad \text{et} \quad \hat{Y}(z) = \mathcal{G}_{s\sigma}(z) Y(z) \quad (44)$$

avec

$$\mathcal{G}_{e\sigma}(z) = \begin{pmatrix} I_{n_\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI_{n_\sigma} - F_\sigma + M_\sigma H_\sigma & M_\sigma H_\nu \\ M_\nu H_\sigma & zI_{n_b} - F_\nu + M_\nu H_\nu \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_\sigma \\ M_\nu \end{pmatrix} \quad (45)$$

et

$$\mathcal{G}_{s\sigma}(z) = \begin{pmatrix} H_\sigma & H_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI_{n_\sigma} - F_\sigma + M_\sigma H_\sigma & M_\sigma H_\nu \\ M_\nu H_\sigma & zI_{n_b} - F_\nu + M_\nu H_\nu \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_\sigma \\ M_\nu \end{pmatrix} \quad (46)$$

où $M_\sigma \in \mathcal{R}^{n_\sigma \times p}$ et $M_\nu \in \mathcal{R}^{n_b \times p}$ ne sont autres que les composantes du gain d'estimation, i.e.

$$M = \begin{pmatrix} M_\sigma \\ M_\nu \end{pmatrix} \quad (47)$$

On peut ainsi déterminer les réponses harmoniques des fonctions de transfert $\mathcal{G}_{e\sigma}(z)$ et $\mathcal{G}_{s\sigma}(z)$ et apprécier ses performances en matière de sensibilité par rapport aux diverses harmoniques du signal de sortie. Par ailleurs, on peut déterminer les zéros du \mathcal{PK} pour mieux appréhender l'importance de la modélisation pour l'affinement des performances comme en témoigne le résultat suivant.

Résultat 7 *Les zéros de transmission de la fonction de transfert $\mathcal{G}_{e\sigma}(z)$ du \mathcal{PK} sont les modes du générateur du bruit de mesure, soit*

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{e\sigma}(z)) \triangleq \{z \in \mathcal{IC} / \det(zI_{n_b} - F_\nu) = 0\}$$

Preuve. A la lumière du concept des zéro de transmission d'un système, on peut postuler que $\zeta \in \mathbb{C}$ est un zéro de transmission du \mathcal{PK} si et seulement si la réponse du système dynamique sous-jacent à une entrée exponentielle, i.e. $y(t) = y_o \zeta^k \alpha(t)$ avec $0 \neq y_o \in \mathbb{C}$, est identiquement nulle, i.e. $\hat{x}_\sigma(t) = 0$ pour tout $k \geq 0$. Il existe donc un vecteur complexe \hat{x}_{bo} telle que la trajectoire de l'état du modèle générateur du bruit de mesure est de la forme $\hat{x}_\nu(t) = \hat{x}_{bo} \zeta^k \alpha(t)$ pourvu que ζ ne soit pas un pôle du \mathcal{PK} . Et compte tenu de l'expression de l'équation d'état (41) du \mathcal{PK} et du fait que $\mathcal{Z}(\zeta^k \alpha(t)) = (z - \zeta)^{-1}$, on aura l'équation

$$\begin{pmatrix} zI_{nb} - F_\nu + M_\nu H_\nu & -M_\nu \\ M_\sigma H_\nu & -M_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{bo} \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x}_{bo} \end{pmatrix} z(z - \zeta)$$

Et en évaluant cette équation pour $z = \zeta$, on peut conclure que dans ce contexte, $\zeta \in \mathbb{C}$ est un zéro de transmission du prédicteur de Kalman si et seulement si il existent $0 \neq y_o \in \mathbb{C}$ et $\hat{x}_{bo} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{pmatrix} \zeta I_{nb} - F_\nu + M_\nu H_\nu & -M_\nu \\ M_\sigma H_\nu & -M_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{bo} \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et compte tenu du fait que

$$\begin{pmatrix} \zeta I_{nb} - F_\nu + M_\nu H_\nu & -M_\nu \\ M_\sigma H_\nu & -M_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta I_{nb} - F_\nu & -M_\nu \\ 0 & -M_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{nb} & 0 \\ -H_\nu & I_{nb} \end{pmatrix}$$

On peut en déduire que cette équation admet une solution non nulle si et seulement si la propriété suivante est vraie.

$$\det \begin{pmatrix} \zeta I_{nb} - F_\nu & -M_\nu \\ 0 & -M_\sigma \end{pmatrix} = \det(\zeta I_{nb} - F_\nu) = 0$$

Et qui stipule que les zéros de transmission du prédicteur optimal ne sont autres que les pôles du modèle générateur du bruit de mesure.

CQFD.

Remarque 5.1 *Le résultat 7 montre que la spécification de la configuration des pôles du modèle générateur des bruits de mesure et/ou des perturbations doit être effectuée en fonction des performances requises en matière d'atténuation des harmoniques, i.e. les harmoniques associées à la configuration des pôles du modèle générateur des bruits de mesure et/ou des perturbations sont naturellement atténuées par le prédicteur optimal.*

6 Adaptation paramétrique

On peut utiliser le \mathcal{PK} pour développer des algorithmes d'adaptation paramétrique à variance minimale en exploitant judicieusement le fait que le problème d'estimation optimale peut être directement étudié pour les systèmes linéaires variants dans le temps pourvu qu'ils soient uniformément observables. En guise d'illustration, on traitera le problème d'identification en temps réel des systèmes linéaires monovariables décrits par l'équation aux différences

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - d - 1) + v(t)$$

avec

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \end{aligned}$$

où $\{v(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies $\sigma_o > 0$. En effet, ces systèmes peuvent se récrire sous la forme d'un système linéaire variant dans le temps particulier donné par

$$\mathcal{MAP} \begin{cases} \theta(t+1) = \theta(t) \text{ avec } \theta(0) = \theta \\ y(t) = \phi(t-1)^T \theta(t) + v(t) \end{cases}$$

où θ et $\phi(t-1)$ désignent respectivement les vecteurs des paramètres et de mesures du système, notamment

$$\theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_o \\ \vdots \\ b_{nb} \end{pmatrix} \text{ et } \phi(t-1) = \begin{pmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-na) \\ u(t-d-1) \\ \vdots \\ u(t-d-1-nb) \end{pmatrix}$$

Comme ces systèmes sont uniformément observables pourvu que $\{u(t)\}$ soit choisie de manière à satisfaire la condition d'excitation persistante, soit

La matrice $\sum_{\tau=1}^t \phi(\tau-1)\phi(\tau-1)^T$ est régulière

on peut utiliser le \mathcal{PK} associé au modèle d'identification des systèmes. Il suffit de remplacer la réalisation d'état du système (F, G, H) par $(I_n, 0, \phi(t-1)^T)$ et les matrices de covariance Q_o et R_o par 0 et σ_o , on obtient alors les équations suivantes

$$\mathcal{AAP} \begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Sigma(t-1)\phi(t-1)}{\sigma_o + \phi(t-1)^T \Sigma(t-1) \phi(t-1)} \varepsilon_o(t) \\ \varepsilon_o(t) = y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \\ \Sigma(t) = \Sigma(t-1) - \frac{\Sigma(t-1)\phi(t-1)\phi(t-1)^T \Sigma(t-1)}{\sigma_o + \phi(t-1)^T \Sigma(t-1) \phi(t-1)} \end{cases}$$

qui ne sont autres que celles de l'algorithme d'adaptation des moindres carrés.

Remarque 6.1 *On peut utiliser le \mathcal{PK} comme un algorithme d'adaptation paramétrique pour les systèmes à paramètres variants dans le temps décrits par*

$$SPVT \begin{cases} \theta(t+1) = F(t)\theta(t) + G(t)\theta^*(t) + w(t) \\ y(t) = H(t)\theta(t) + v(t) \end{cases}$$

pourvu qu'ils soient uniformément observables. Cet algorithme d'adaptation paramétrique est donné par les équations

$$AAP \begin{cases} \hat{\theta}(t+1) = F(t)\hat{\theta}(t) + G(t)\theta^*(t) \\ \quad + F(t)\Sigma(t)H(t)^T (R_o + H(t)\Sigma(t)H(t)^T)^{-1} (y(t) - H(t)\hat{\theta}(t)) \\ \Sigma(t+1) = F(t)\Sigma(t)F(t)^T \\ \quad - F(t)\Sigma(t)H(t)^T (R_o + H(t)\Sigma(t)H(t)^T)^{-1} H(t)\Sigma(t)F(t)^T + Q_o \end{cases}$$

Notons que les perturbations paramétriques ont été supposées être indépendantes des bruits de mesure: une hypothèse usuelle.

7 Conclusion

Le problème d'estimation à variance minimale de l'état des systèmes linéaires a été étudié d'une manière compréhensive en trois parties sous la bénédiction des contributions de l'école de Kalman. Les algorithmes d'estimation des variables d'état ont été présentés aussi bien pour le prédicteur que pour le filtre de Kalman dans la première partie. Un exercice pédagogique a été particulièrement consenti pour simplifier le problème d'optimisation sous-jacent. La seconde partie a été consacrée aux versions stationnaires des estimateurs qui sont communément utilisées pour la prédiction et le filtrage dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps. Une attention particulière a été réservée aux propriétés fondamentales de ces estimateurs, en l'occurrence la robustesse intrinsèque en stabilité par rapport aux perturbations de sortie et l'insensibilité du prédicteur par rapport aux bruits de mesure inéluctables. Quant à la troisième partie, elle a été dédiée à une application ingénieuse de la prédiction à variance minimale: la conception d'un algorithme d'adaptation paramétrique pour l'estimation en temps réel des paramètres d'un système linéaire.

8 Problèmes

On propose un ensemble de problèmes pour s'appropriier des résultats fondamentaux disponibles en matière d'estimation optimale tout en appréciant la diversité de ses applications.

Problème 8.1 *Considérons la classe des signaux décrits par la représentation d'état*

$$\text{SYS} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G\eta(t) \\ y(t) = Hx(t) + E\gamma(t) \end{cases}$$

où (F, G, H, E) est une réalisation d'état du signal associée au vecteur d'état $x(t) \in \mathcal{R}^n$ et $\{\eta(t)\}$ et $\{\gamma(t)\}$ sont des séquences de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle telles que

$$\text{MCOV} \left\{ \mathcal{E} \left\{ \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^T(t-\tau) & \gamma^T(t-\tau) \end{pmatrix} \right\} \right\} = \begin{pmatrix} Q_\eta & 0 \\ 0 & R_\gamma \end{pmatrix} \delta(\tau)$$

où $Q_\eta = Q_\eta^T \geq 0$ et $R_\gamma = R_\gamma^T > 0$ sont respectivement les matrices de covariance des perturbations d'état et de sortie. On se propose d'étudier le problème d'estimation optimale correspondant en procédant progressivement comme suit

- 1) Soit $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ et $\{\mu(t)\} \in \mathcal{R}^n$ une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle telle que

$$\mathcal{E} \left\{ \mu(t)\mu^T(t-\tau) \right\} = Q_\mu \delta(\tau) \quad \text{avec} \quad Q_\mu = Q_\mu^T \geq 0$$

Montrer que

$$\mathcal{E} \left\{ M\mu(t) (M\mu(t-\tau))^T \right\} = MQ_\mu M^T \delta(\tau)$$

- 2) Donner les équations récursives des versions stationnaires du prédicteur et du filtre de Kalman.
- 3) Donner les équations des erreurs de prédiction et de filtrage et apprécier la vraisemblance des dynamiques de ces estimateurs optimaux.
- 4) Préciser la propriété de robustesse des estimateurs de Kalman.
- 5) En déduire les fonctions de transfert, $\mathcal{F}(z) : y(t) \rightarrow \hat{y}(t)$, du prédicteur et du filtre.
- 6) Quel estimateur recommandez-vous à un ingénieur?

Problème 8.2 *Supposons que les séquences $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont indépendantes, i.e. $W_o = 0$. Montrer que le \mathcal{FK} peut se récrire sous la forme récursive*

$$\mathcal{FK} \begin{cases} \hat{x}(t/t) = (I_n - M_f(t)H) F\hat{x}(t-1/t-1) + (I_n - M_f(t)H) Gu(t-1) + M_f(t)y(t) \\ \hat{y}(t/t) = H\hat{x}(t/t) \end{cases}$$

et en déduire que l'erreur de filtrage et variance sont respectivement données par

$$\tilde{x}(t/t) = (I_n - M_f(t)H) F\tilde{x}(t-1/t-1) + (I_n - M_f(t)H) w(t-1) - M_f(t)v(t)$$

et

$$\Sigma(t/t) = F\Sigma(t-1/t-1)F^T + Q_o - \left(F\Sigma(t-1/t-1)F^T + Q_o \right) H^T \cdot \left(R_o + H \left(F\Sigma(t-1/t-1)F^T + Q_o \right) H^T \right)^{-1} H \left(F\Sigma(t-1/t-1)F^T + Q_o \right)$$

Indication. Les relations de passage entre l'erreur de filtrage et l'erreur de prédiction et les variances associées peuvent être aisément déterminées à partir de la relation usuelle de passage du filtre au prédicteur, on obtient aisément

$$\tilde{x}(t+1/t) = F\tilde{x}(t/t) + w(t) \quad \text{et} \quad \Sigma(t+1/t) = F\Sigma(t/t)F^T + Q_o$$

Problème 8.3 Considérons les systèmes décrits par la représentation d'état (1)-(3). Montrer que les prédicteurs à j pas est donné par

$$\hat{x}(t+j/t) = F^{j-1}\hat{x}(t+1/t) + \sum_{\tau=t+1}^{t+j-1} F^{k+j-1-i}Gu(\tau)$$

et en déduire l'erreur de prédiction et la matrice de variance qui en résultent sont respectivement données par

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+j/t) &= F^{j-1}\tilde{x}(t+1/t) + \sum_{\tau=t+1}^{t+j-1} F^{k+j-1-i}w(\tau) \\ \Sigma(t+j/t) &= (F^{j-1})\Sigma(t+1/t)(F^{j-1})^T + \sum_{\tau=t+1}^{t+j-1} (F^{k+j-1-i})Q_o(F^{k+j-1-i})^T \end{aligned}$$

Problème 8.4 Considérons le cas des systèmes monovariables et adoptons la forme canonique d'observabilité dont le modèle d'innovation correspondant est donné par

$$\hat{x}(t+1) = \begin{pmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & \\ -a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \nu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \nu(t)$$

Montrer que ce modèle peut se récrire sous la forme d'un modèle $\mathcal{ARMA}\mathcal{X}$

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\nu(t)$$

dont on précisera les expressions des polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ et en déduire le polynôme caractéristique du filtre blanchisseur.

Problème 8.5 On se propose d'étudier le problème d'estimation d'état pour la classe des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\gamma(t)$$

avec

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} \\ B(q^{-1}) &= 0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + b_3q^{-3} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + c_3q^{-3} \in \mathcal{R}_{sa}[q^{-1}] \end{aligned}$$

où $\{u(t)\}$ et $\{y(t)\}$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système et $\{\gamma(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance finie σ^2 .

Pour ce faire, on demande de procéder d'une manière progressive pour mieux appréhender les concepts de prédiction et de filtrage associés au problème d'estimation d'état des systèmes échantillonnés.

1) Montrer que le système peut se mettre sous la forme de la représentation d'état

$$\text{SYS} \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + E\gamma(t) \\ y(t) = Hx(t) + \gamma(t) \end{cases}$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en choisissant convenablement les variables d'état $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ qui constituent le vecteur d'état $x(t) \in \mathcal{R}^3$.

2) Proposer un estimateur d'état qui permet de reconstruire asymptotiquement l'état du système, i.e. qui réalise une erreur d'estimation d'état asymptotiquement nulle, et en déduire le meilleur prédicteur à un pas de la sortie. On précisera la dynamique de prédiction pour mieux appréhender les choses.

3) Retrouver le résultat précédent en utilisant le PK.

Problème 8.6 On se propose de montrer que le problème d'estimation optimale peut être étudié sans perte de généralité en supposant que les séquences $\{w(t)\}$ et $\{v(t)\}$ sont indépendantes, soit $W_o = 0$. Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit

1) Montrer que la représentation d'état du système (1) peut se mettre sous la forme

$$\text{SYS} \begin{cases} x(t+1) = F_s x(t) + G_u u(t) + G_y y(t) + w_s(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (48)$$

avec

$$F_s = F - W_o R_o^{-1} H, \quad G_u = G, \quad G_y = W_o R_o^{-1} \quad \text{et} \quad w_s(t) = w(t) - W_o R_o^{-1} v(t) \quad (49)$$

2) Proposer un \mathcal{PK} pour le système (48)-(49) en précisant les conditions requises pour sa convergence. Que peut-on dire sur la motivation de ce problème?

Problème 8.7 On se propose d'étudier le problème d'estimation d'une variable noyée dans un bruit d'une manière progressive, en fonction de son comportement et de la nature du bruit, comme suit

1) Supposons que cette variable est une constante noyée dans un bruit blanc que l'on peut décrire comme suit

$$\mathcal{MC} \left\{ y(t) = \theta + \gamma(t) \right.$$

où θ désigne la variable en question et $\{\gamma(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_γ^2 . Montrer qu'il est possible de réaliser une estimation consistante de θ par un \mathcal{PK} approprié et en déduire que le gain d'estimation et la variance de l'erreur d'estimation sont asymptotiquement nulles.

2) Supposons que $\{\gamma(t)\}$ est un processus stochastique que l'on peut modéliser comme suit

$$\mathcal{MBM} \left\{ \gamma(t) = \beta\gamma(t-1) + (1-\beta)\mu(t) \right.$$

où $0 \leq \beta < 1$ et $\{\mu(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_μ^2 qui est indépendant de la séquence $\{\gamma(t)\}$. Montrer qu'il est possible de réaliser une estimation consistante de θ par un \mathcal{PK} approprié dont on précisera le comportement asymptotique.

3) Supposons que cette variable varie dans le temps et que l'on peut modéliser ses variations comme suit

$$\mathcal{MCVT} \left\{ \theta(t) = \gamma\theta(t-1) + (1-\gamma)\theta^* + \eta(t) \right.$$

où $0 < \theta^* < \infty$, $0 \leq \gamma < 1$ et $\{\eta(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_η^2 qui est indépendant de la séquence $\{\gamma(t)\}$. Montrer qu'il est possible de réaliser une estimation consistante de la séquence $\{\theta(t)\}$ par un PK approprié dont on précisera le comportement asymptotique.

Problème 8.8 Considérons les systèmes linéaires monovariables variants dans le temps décrits par

$$\text{SYS} \begin{cases} \theta(t+1) = \lambda\theta(t) + (1-\lambda)\theta^*\alpha(t) & \text{avec } 0 < \lambda < 1 \\ (1 + a_1(t)q^{-1} + a_2(t)q^{-2})y(t) = (b_o(t) + b_1(t)q^{-1})u(t-1) + v(t) \end{cases}$$

avec

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ b_o(t) \\ b_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ b_o^* \\ b_1^* \end{pmatrix}$$

où $\{v(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies σ^2 . On demande de montrer que le système peut se mettre sous la forme

$$\text{SYS} \begin{cases} \theta(t+1) = \lambda\theta(t) + (1-\lambda)\theta^*\alpha(t) & \text{avec } 0 < \lambda < 1 \\ y(t) = \phi^T(t-1)\theta(t) + v(t) \end{cases}$$

avec

$$\phi(t-1) = \begin{pmatrix} -y(t-1) \\ -y(t-2) \\ u(t-1) \\ u(t-2) \end{pmatrix}$$

et de proposer un algorithme d'adaptation paramétrique qui permet de réaliser une estimation consistante des paramètres du système à partir de son comportement d'entrée-sortie en précisant la condition requise pour ce faire. On notera que

$$\alpha(t)q^{-i}x(t) \triangleq \alpha(t)x(t-i)$$

Problème 8.9 Le problème d'extraction de la partie synchrone d'un signal a connu un intérêt considérable dans le contrôle anti-vibratoire. Ce problème est actuellement résolu par une déconvolution judicieuse utilisant une boucle de verrouillage de phase pour l'estimation de la vitesse de rotation. On se propose de développer un algorithme d'adaptation paramétrique pour résoudre un tel problème. Pour ce faire, considérons un signal décrit par

$$y(t) = a(t) \sin(\omega t) + b(t) \cos(\omega t) + v(t)$$

où ω désigne la vitesse de rotation qui est mesurable, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont les paramètres du

signal et $v(t)$ représente les erreurs de modélisation et le bruit de mesure et est supposée être une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ . On demande de déterminer la meilleur estimée du signal, soit

$$\hat{y}(t) = \hat{a}(t) \sin(\omega t) + \hat{b}(t) \cos(\omega t)$$

en supposant que les variations des paramètres sont décrites par

$$a(t) = \mu_a a(t-1) + (1 - \mu_a) a^* \alpha(t) + \gamma_a \gamma(t)$$

$$b(t) = \mu_b b(t-1) + (1 - \mu_b) b^* \alpha(t) + \gamma_b \gamma(t)$$

où $\alpha(t)$ est un échelon unitaire unitaire, (μ_a, a^*, γ_a) et (μ_b, b^*, γ_b) sont respectivement des scalaires positifs connus qui caractérisent les variations des paramètres $a(t)$ et $b(t)$ du signal et $\{\gamma(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance unitaire qui est indépendante du bruit de mesure $\{v(t)\}$. On notera que les paramètres $a(t)$ et $b(t)$ sont bornés si et seulement si les scalaires μ_a et μ_b sont strictement inférieurs à l'unité.

References

- [1] B. Anderson and J. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice Hall, 1979.
- [2] K. J. Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Academic Press, 1970.
- [3] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computed Controlled Systems : Theory and Design*. Prentice Hall, 1997.
- [4] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, 1984.
- [5] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng., Trans. ASME*, 82(1):35–45, 1960.
- [6] M. M'Saad. *Systèmes linéaires échantillonnés: une approche d'état*. Ouvrage, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen, France, 2019.