ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2019–2020

$1^{\text{ère}}$ année

Matériaux et Chimie

Solution de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – Partiel, mardi 12 novembre 2019

Exercice 1.

Soit a une constante réelle. On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a.$$

a. On pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$. Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{2}.$$

b. Déterminer alors l'expression générale de $g(u, v)$.

c. Déduire l'expression de $f(x, y)$, et vérifier que la fonction obtenue est bien solution de l'équation initiale.

Solution 1.

a. D'après la règle de dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{v-u}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a$, on en déduit que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{2}.$$

b. En primitivant l'égalité ci-dessus, on obtient

$$g(u, v) = \frac{a}{2}u + k(v)$$

où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne dépend que de v.

c. En utilisant $\left\{\begin{array}{l} u = x - y \\ v = x + y \end{array}\right.$ dans la définition de $g(u, v)$, on obtient $g(x-y, x+y) = f(x, y)$.

Donc

$$f(x, y) = g(x - y, x + y) = \frac{a}{2}(x - y) + k(x + y)$$

où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Enfin, on vérifie que cette expression de $f(x, y)$ est bien solution de l'équation initiale :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{2}(x-y) + k(x+y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{2}(x-y) + k(x+y)\right) \\ &= \left(\frac{a}{2} + k'(x+y)\right) - \left(-\frac{a}{2} + k'(x+y)\right) = a.\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(z)$.

a. Déterminer tous les points critiques de f qui sont situés dans le pavé $[0, \pi]^3$.

b. Déterminer la nature (maximum local, minimum local ou point-selle) de chacun des points critiques $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (\pi, 0, 0)$ et $P_3 = (\pi, \pi, \pi)$.

Solution 2.

a. Le point (x, y, z) est critique si le gradient de f s'y annule :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \sin(y) = 0 \\ \sin(z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0\ [\pi] \\ y = 0\ [\pi] \\ z = 0\ [\pi] \end{cases}.$$

Donc il y a 8 points critiques dans le pavé $[0, \pi]^3$: $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$, $(0, 0, \pi)$, $(\pi, \pi, 0)$, $(\pi, 0, \pi)$, $(0, \pi, \pi)$, et (π, π, π).

b. La matrice hessienne de f au point (x, y, z) est

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(z) \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice est diagonale, ses valeurs propres s'obtiennent facilement. Ce sont les éléments sur la diagonale : $-\cos(x)$, $-\cos(y)$, et $-\cos(z)$.

On trouve alors que :

- En $P_1 = (0, 0, 0)$, les valeurs propres valent -1, -1, et -1. Elles sont strictement négatives, ce qui signifie qu'il y a un maximum local en P_1.
- En $P_2 = (\pi, 0, 0)$, les valeurs propres sont 1, -1, et -1. Il y a des valeurs propres de signes opposés, donc P_2 est un point-selle.
- En $P_3 = (\pi, \pi, \pi)$, les valeurs propres sont 1, 1, et 1. Elles sont strictement positives, donc il y a un minimum local en P_3.

Exercice 3.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x + y.$$

Pour $(x, y) \in]-\pi, \pi[^2$, déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\cos(x)+\cos(y) = 1$.

Solution 3.

On utlise la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

- On pose la fonction

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \left(\cos(x) + \cos(y) - 1\right).$$

Ses points critiques vérifient la condition $\overrightarrow{\text{grad}}\, L(x, y, \lambda) = 0$, c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \lambda \sin(x) = 0 \\ 1 + \lambda \sin(y) = 0 \\ -\cos(x) - \cos(y) + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda\big(\sin(x) - \sin(y)\big) = 0 \\ 1 + \lambda \sin(y) = 0 \\ \cos(x) + \cos(y) = 1 \end{cases}.$$

L'équation de la première ligne implique que $\lambda = 0$, ou que $\sin(x) = \sin(y)$. Mais la solution $\lambda = 0$ est impossible car cela donne $1 = 0$ dans l'équation de la deuxième ligne. Il ne reste donc que $\sin(x) = \sin(y)$. Cette dernière égalité est vérifiée pour :

— $x = \pi - y\ [2\pi]$, mais c'est impossible car cela donne $0 = 1$ dans la troisième ligne ;

— ou $x = y\ [2\pi]$.

Le système d'équations est donc équivalent à $\begin{cases} x = y\ [2\pi] \\ 1 + \lambda \sin(y) = 0 \\ 2\cos(y) = 1 \end{cases}.$

En se restreignant à $(x, y) \in]-\pi, \pi[^2$, ceci équivaut alors à $\begin{cases} \cos(y) = \frac{1}{2}\,, \quad \text{avec } y \in]-\pi, \pi[\\ x = y \\ \lambda = -\frac{1}{\sin(y)} \end{cases}$

et donc les points critiques de L sont $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ et $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

- On va utiliser la caractérisation faible de la condition suffisante du second ordre, pour montrer qu'il y a des extrema locaux sous la contrainte en (x_1, y_1) et en (x_2, y_2) :

— La matrice hessienne de $L_1 : (x, y) \mapsto L(x, y, \lambda_1)$ au point (x_1, y_1) est

$$H_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos(x_1) & 0 \\ 0 & \lambda_1 \cos(y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont strictement négatives, donc le point $(x_1, y_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ donne un maximum local sous la contrainte.

— La matrice hessienne de $L_2 : (x, y) \mapsto L(x, y, \lambda_2)$ au point (x_2, y_2) est

$$H_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \cos(x_2) & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cos(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives, donc il y a un minimum local sous la contrainte en $(x_2, y_2) = \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 4.

Soit $\mathscr{D}$ un solide homogène. Son volume est $V = \iiint_{\mathscr{D}} dV$. Son centre de masse (ou centre d'inertie) est le point G de coordonnées $x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{D}} x\,dV$, $y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{D}} y\,dV$ et $z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{D}} z\,dV$. Calculer l'altitude z_G du centre de masse pour :

a. La demi-boule de rayon $R > 0$, définie par $\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < R^2\,, z > 0\}$.

b. La pyramide $\mathscr{D}$ de sommet $E(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ et de base carrée $ABCD$, avec $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $B(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $C(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$ et $D(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$.

Solution 4.

a. Le volume de la demi-boule de rayon $R > 0$ est $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$. Si on ne se souvient pas du volume de la boule, on peut évaluer l'intégrale donnant le volume de $\mathscr{D}$. Le plus rapide est alors d'utiliser les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} V = \iiint_{\mathscr{D}} dV &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^R r^2\,dr \times \int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\,d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times \Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi/2} \times 2\pi = \frac{2}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'altitude z_G, puisque $z = r\cos(\theta)$,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathscr{D}} z\,dV &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \Big(r\cos(\theta)\Big) \times \Big(r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi\Big) \\ &= \int_0^R r^3\,dr \times \int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \times \left[\frac{\sin(\theta)^2}{2}\right]_0^{\pi/2} \times 2\pi = \frac{1}{4}\pi R^4. \end{aligned}$$

Et donc $z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{D}} z\,dV = \frac{3}{8}R$.

b. Le volume de la pyramide est égale au tiers de l'aire de la base multipliée par la hauteur. La base étant un carré de côté 1 et la hauteur étant égale à $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, le volume est donc $V = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Alternativement, on peut évaluer l'intégrale donnant ce volume. Le plus simple ici est d'effectuer une intégration par tranches. A l'altitude $z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, la tranche Σ_z de la pyramide est un carré de côté $a(z)$. La fonction $a(z)$ est une fonction affine qui vérifie $a(0) = 1$ et $a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, donc

$$a(z) = 1 - \sqrt{2}z.$$

L'intégrale triple donnant le volume, se calcule avec la méthode des tranches comme ceci :

$$\begin{aligned} V = \iiint_{\mathscr{D}} dV &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\iint_{\Sigma_z} dx\,dy\right) dz = \int_0^{1/\sqrt{2}} a(z)^2\,dz \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(1-\sqrt{2}z\right)^2 dz = \left[-\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}z\right)^3\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que l'intégrale double $\iint_{\Sigma_z} dx\,dy$ est égale à l'aire du carré Σ_z).

Pour l'altitude z_G, l'intégration par tranches donne

$$\iiint_{\mathscr{D}} z\,dV = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\iint_{\Sigma_z} z\,dx\,dy\right) dz = \int_0^{1/\sqrt{2}} z\left(\iint_{\Sigma_z} dx\,dy\right) dz = \int_0^{1/\sqrt{2}} z\,a(z)^2\,dz$$
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} z\left(1-\sqrt{2}z\right)^2 dz = \int_0^{1/\sqrt{2}}\left(z - 2\sqrt{2}z^2 + 2z^3\right) dz = \left[\frac{z^2}{2} - \frac{2\sqrt{2}z^3}{3} + \frac{z^4}{2}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{6-8+3}{24} = \frac{1}{24}.$$

et donc $z_G = \frac{3\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Exercice 5.

a. Dessiner le domaine $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad 1 < v < 4 \quad \text{et} \quad -v < 2u < v\}$.

b. On considère la transformation $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^2$ définie par

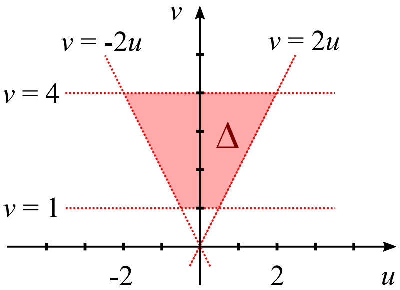
$$\Phi : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u+v}{2}} \\ \sqrt{\frac{v-u}{2}} \end{pmatrix}.$$

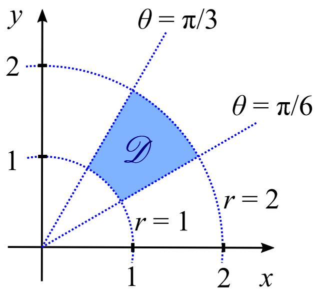
Exprimer u et v en fonction de x^2 et y^2. Puis montrer que le domaine image $\mathscr{D} = \Phi(\Delta)$ est une portion de couronne (à préciser).

c. Rappeler la formule de changement de variables pour l'intégrale double, et calculer

$$I = \iint_{\Delta} \sqrt{\frac{v+u}{v-u}}\,du\,dv.$$

Solution 5.





a. L'encadrement $-v < 2u < v$ signifie que "$-v < 2u$ et $2u < v$", ce qui équivaut à "$v > -2u$ et $v > 2u$". Donc le point (u,v) se trouve au-dessus des deux droites d'équation $v = 2u$ et $v = -2u$. Par ailleurs, l'encadrement $1 < v < 4$ signifie que le point se trouve entre la droite horizontale d'équation $v = 1$ et celle d'équation $v = 4$. Il en résulte que Δ est le trapèze représenté sur la figure de gauche.

b. • A partir des relations $x = \sqrt{\frac{u+v}{2}}$ et $y = \sqrt{\frac{v-u}{2}}$, on trouve que $u = x^2 - y^2$ et $v = x^2 + y^2$. Donc l'application Φ est bijective de Δ vers $\mathscr{D} = \Phi(\Delta)$.

(Remarque : l'application Φ est bien définie sur Δ. En effet, pour $(u,v) \in \Delta$, on a les inégalités "$-2u < v$ et $2u < v$", qui sont équivalentes à l'inégalité $|2u| < v$. Puisque $|u| \leq |2u|$, on en déduit que $|u| < v$, c'est à dire "$-u < v$ et $u < v$", ou encore "$v + u > 0$ et $v - u > 0$". Et donc $\sqrt{\frac{u+v}{2}}$ et $\sqrt{\frac{v-u}{2}}$ sont bien définis pour $(u,v) \in \Delta$.)

• On considère maintenant $(u,v) \in \Delta$ et son image $(x,y) = \Phi(u,v)$. Alors :

— v vérifie l'encadrement $1 < v < 4 \iff 1 < x^2 + y^2 < 4$, ce qui revient à $1 < r < 2$ en utilisant la coordonnée radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2}$: le point (x,y) se trouve sur la couronne centrée à l'origine, de rayon intérieur $r_{int} = 1$ et de rayon extérieur $r_{ext} = 2$.

— L'inégalité $-2u < v \iff -2x^2 + 2y^2 < x^2 + y^2 \iff y^2 < 3x^2 \iff y < x \tan \frac{\pi}{3}$ (car $x > 0$ et $y > 0$) : le point (x,y) se trouve sous la droite qui fait un angle $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des x.

— L'inégalité $2u < v \iff 2x^2 - 2y^2 < x^2 + y^2 \iff y^2 > \frac{x^2}{3} \iff y > x \tan \frac{\pi}{6}$ (car $x > 0$ et $y > 0$) : le point (x,y) se trouve au-dessus de la droite qui fait un angle $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des x.

En conclusion, $\mathscr{D} = \Phi(\Delta)$ est la portion de la couronne de rayons $r_{int} = 1$ et $r_{ext} = 2$, qui est comprise entre les angles $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ (voir la figure de droite).

c. • La formule de changement de variables dans l'intégrale double est

$$\iint_{\Phi(\Delta)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(\Phi(u,v))|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

où le déterminant de la matrice jacobienne de Φ est

$$\det J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{v-u}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{v-u}{2}}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

• On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta \sqrt{\frac{v+u}{v-u}}\,du\,dv = 8 \iint_\Delta \left(\sqrt{\frac{v+u}{2}}\right)^2 \frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}\,du\,dv \\ &= 8 \iint_\Delta f\left(\Phi(u,v)\right)|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv \end{aligned}$$

en utilisant $f(x,y) = x^2$. Par conséquent, la formule de changement de variables donne

$$I = 8 \iint_{\Phi(\Delta)} f(x,y)\,dx\,dy = 8 \iint_{\mathscr{D}} x^2\,dx\,dy.$$

Considérant la géométrie du domaine $\mathscr{D}$, intégrer en coordonnées polaires est approprié :

$$\begin{aligned} I &= 8 \iint_{\mathscr{D}} x^2\,dx\,dy = 8 \int_{r=1}^{2} \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/3} (r\cos\theta)^2 \times (r\,dr\,d\theta) = 8 \int_1^2 r^3\,dr \times \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= 8 \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \times \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta = 8\left(4 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= 15\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

• Remarque :
On pouvait aussi utiliser le changement de variables avec la transformation inverse Φ^{-1} : $(x, y) \mapsto (u, v) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$. Le déterminant de sa matrice jacobienne est

$$\det J_{\Phi^{-1}}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \\ \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8xy.$$

On considère alors la fonction $g(u, v) = \sqrt{\frac{v+u}{v-u}}$. Pour $(x, y) \in \mathscr{D}$, on obtient $g(\Phi^{-1}(x, y)) = g(x^2 - y^2, x^2 + y^2) = \frac{x}{y}$ (car $x > 0$ et $y > 0$), donc

$$8 \iint_{\mathscr{D}} x^2 \, dx \, dy \; = \; \iint_{\mathscr{D}} \frac{x}{y} \times 8xy \, dx \, dy \; = \; \iint_{\mathscr{D}} g(\Phi^{-1}(x, y)) |\det J_{\Phi^{-1}}(x, y)| \, dx \, dy.$$

La formule de changement de variables donne alors

$$8 \iint_{\mathscr{D}} x^2 \, dx \, dy \; = \; \iint_{\Phi^{-1}(\mathscr{D})} g(u, v) \, du \, dv = \iint_{\Delta} \sqrt{\frac{v+u}{v-u}} \, du \, dv$$

(car $\mathscr{D} = \Phi(\Delta) \iff \Phi^{-1}(\mathscr{D}) = \Delta$).