Année universitaire 2018–2019

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Corrigé de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – lundi 14 janvier 2019

Solution 1.

On va chercher les solutions réelles.

a)

$$f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = (1-4x)\mathrm{e}^{-x}.$$

- Solution générale de l'équation homogène :

L'équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ a pour solutions $r = -3$ et $r = 1$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$f_0(x) = k_1 \mathrm{e}^{-3x} + k_2 \mathrm{e}^{x}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

- Solution particulière de l'équation avec second membre :

Le second membre est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, où P est un polynôme et $\lambda = -1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. Par conséquent, on cherche une solution particulière sous la forme $\varphi(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec Q un polynôme de même degré que P. Posons donc

$$\varphi(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

Alors $\varphi'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$ et $\varphi''(x) = (ax - 2a + b)\mathrm{e}^{-x}$. Cela donne

$$\begin{aligned}
& & \varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 3\varphi(x) &= (1-4x)\mathrm{e}^{-x} \\
&\iff & \Big((ax - 2a + b) + 2(-ax + a - b) - 3(ax+b)\Big)\mathrm{e}^{-x} &= (1-4x)\mathrm{e}^{-x} \\
&\iff & -4b - 4ax &= 1 - 4x
\end{aligned}$$

Par identification, on obtient $a = 1$, $b = -\frac{1}{4}$, et

$$\varphi(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

- Solution générale de l'équation avec second membre :

$$f(x) = k_1 \mathrm{e}^{-3x} + k_2 \mathrm{e}^{x} + \left(x - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

b)

$$X'(t) = A\,X(t)$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de la matrice A :

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2$$

dont les racines sont $\lambda = \pm\sqrt{2}$. La matrice possède deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

- Vecteurs propres de la matrice A :

Un vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = \sqrt{2}$ vérifie

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $w = (1-\sqrt{2})v$. Donc on peut prendre

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, on obtient de même

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- Solutions du système différentiel :

Puisque la matrice A est diagonalisable, les solutions du système différentiel sont de la forme

$$X(t) = k_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} V_1 + k_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} V_2 = k_1 \mathrm{e}^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + k_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

avec k_1 et k_2 des constantes réelles.

Solution 2.

a) A l'altitude $z \in [0;3]$, un point $(x, y, z) \in V$ vérifie $x^2 + y^2 \leq 3 - z$, donc il se trouve sur un disque horizontal de rayon $R(z) = \sqrt{3-z}$.

b) La divergence de $\vec{F}$ est

$$\operatorname{div}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial\,(x^2+y^2)}{\partial z} = 3x^2+3y^2.$$

L'intégrale de la divergence se calcule en passant en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_V \left(3r^2\right)(r\,dr\,d\varphi\,dz) = \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^3 \left(\int_0^{R(z)} 3r^3\,dr\right) dz \\ &= 2\pi \times \int_0^3 \left[\frac{3r^4}{4}\right]_0^{R(z)} dz = 2\pi \int_0^3 \frac{3R(z)^4}{4} dz = \frac{3\pi}{2}\int_0^3 (z-3)^2 dz \\ &= \frac{3\pi}{2}\left[\frac{(z-3)^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3\pi}{2}\left(0 - \frac{(-3)^3}{3}\right) = \frac{27\pi}{2}. \end{aligned}$$

c) Sur le disque S_- à la base, le vecteur normal unitaire, sortant de V, est $\vec{n} = -\vec{u}_z$. Le flux de $\vec{F}$ sortant de V à travers S_- est donc

$$\begin{aligned} J &= \iint_{S_-} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_-} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS = -\iint_{S_-} \left(x^2+y^2\right) dS \\ &= -\iint_{S_-} r^2\,(r dr\,d\varphi) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^{\sqrt{3}} r^3\,dr = -2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

d) D'après le théorème de Green-Ostrogradski (ou théorème de la divergence), l'intégrale de $\operatorname{div}\vec{F}$ sur V est égale au flux de $\vec{F}$ sortant à travers l'enveloppe $\partial V = S_- \cup S_+$:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dV = \oiint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_-} \vec{F}\cdot\vec{n}dS + \iint_{S_+} \vec{F}\cdot\vec{n}dS \quad \text{soit} \quad I = J+K$$

et donc

$$K = I - J = \frac{27\pi}{2} - \left(-\frac{9\pi}{2}\right) = 18\pi.$$

Solution 3.

a) Avec une solution à variables séparées de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ \iff\quad & \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(f(x)g(t)\Big) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(f(x)g(t)\Big) = 0 \\ \iff\quad & f(x)g''(t) - v^2 f''(x)g(t) = 0 \end{aligned}$$

Pour les couples (x,t) tels que $f(x)g(t) \neq 0$, on peut diviser l'équation par $v^2 f(x)g(t)$ et on obtient

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{v^2 g(t)}.$$

Le rapport à gauche de l'égalité ne varie quand t est changé, tandis que le rapport à droite ne varie pas quand x est changé. Par conséquent, ces deux rapports sont égaux à une contante $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda = \frac{g''(t)}{v^2 g(t)},$$

ou encore

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(t) - \lambda v^2 g(t) = 0.$$

b) L'équation différentielle $f''(x) - \lambda f(x) = 0$ a pour équation caractérisque $r^2 - \lambda = 0$:

- Pour $\lambda > 0$, les solutions de l'équation caractéristique sont $r = \pm\sqrt{\lambda}$, et f est de la forme

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$$

  avec A et B des constantes réelles. Ces fonctions ne sont pas périodiques, sauf la solution nulle $f = 0$.

- Pour $\lambda = 0$, on a $r = 0$, et

$$f(x) = Ax + B$$

  avec A et B des constantes réelles. En dehors des fonctions constantes $f = B$, il n'y a pas de solution périodique.

- Pour $\lambda < 0$, les solutions $r = \pm i\sqrt{|\lambda|}$ sont complexes, et

$$f(x) = A\cos\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) + B\sin\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)$$

  avec A et B des constantes réelles. Ces fonctions sont périodiques.

c) On considère maintenant les solutions pour $\lambda = \lambda_k = -(k\frac{2\pi}{L})^2 \leq 0$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Les solutions $f(x)$ paires sont celles avec $B = 0$, c'est à dire

$$f(x) = A\cos\left(\sqrt{|\lambda_k|}x\right) = A\cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right).$$

Par ailleurs, l'équation différentielle que satisfait $g(t)$ est

$$g''(t) + \left(k\frac{2\pi}{L}v\right)^2 g(t) = 0.$$

Son équation caractéristique est $r^2 + \left(k\frac{2\pi}{L}v\right)^2 = 0$, dont les solutions $r = \pm i\left(k\frac{2\pi}{L}v\right)$ sont complexes. Donc

$$g(t) = C\cos\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right) + D\sin\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right)$$

avec C et D des constantes réelles.
Et donc les solutions $u(x,t) = f(x)g(t)$, qui sont L-périodiques et paires suivant la variable x, sont de la forme générale

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= A\cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\left[C\cos\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right) + D\sin\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right)\right] \\ &= \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\left[C_k\cos\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right) + D_k\sin\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right)\right] \end{aligned}$$

où C_k et D_k sont des constantes réelles.

d) • La fonction φ est L-périodique, continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge simplement vers elle. Puisque φ est paire, les coefficients de Fourier b_k sont nuls, et

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)$$

avec

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\varphi(x)dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)x^2dx.$$

• La condition initiale s'écrit, $\forall x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$,

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$\iff \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right).$$

Par conséquent

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{pour } k \geq 1,\ C_k = a_k.$$

• L'évaluation des coefficients de Fourier donne, pour $k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2dx = \frac{2}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{2}{L}\times\frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{L^2}{6}.$$

• Pour $k \geq 1$, l'intégrale se calcule en faisant le changement de variables $u = \frac{2\pi}{L}x$, puis avec des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)x^2\,dx = \frac{2}{L}\times\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\left(\frac{2\pi}{L}x\right)^2\left(\frac{2\pi}{L}dx\right)\\
&= \frac{L^2}{4\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ku)u^2\,du\\
&= \frac{L^2}{4\pi^3}\left(\left[\frac{\sin(ku)}{k}u^2\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(ku)}{k}2u\,du\right) = -\frac{L^2}{2k\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ku)u\,du\\
&= -\frac{L^2}{2k\pi^3}\left(\left[-\frac{\cos(ku)}{k}u\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(ku)}{k}du\right) = \frac{L^2}{2k^2\pi^3}\left((-1)^k2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(ku)du\right)\\
&= (-1)^k\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2.
\end{aligned}$$

• Finalement,

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{L^2}{12} \qquad \text{et} \qquad \text{pour } k \geq 1,\ C_k = a_k = (-1)^k\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2.$$