ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2018–2019

$1^{\text{ère}}$ année

Matériaux et Chimie

Solution de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – Partiel, vendredi 9 novembre 2018

Exercice 1.

Soit f une fonction de deux variables x et y, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathscr{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x - y > 0\}$. On suppose que f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 7(x-y)f(x,y) = 0.$$

a. On cherche la solution sous la forme $f(x,y) = g(u,v)$ avec $u = xy$, $v = x+y$, et g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert que l'on ne cherchera pas à préciser. Montrer que cela implique l'égalité

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 7g(u,v).$$

b. En déduire les solutions f de l'équation initiale.

Solution 1.

a. En posant $f(x,y) = g(u,v)$ avec $u = xy$ et $v = x+y$, la règle de la chaîne donne les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial (xy)}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial (x+y)}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial (xy)}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial (x+y)}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Par conséquent, l'équation aux dérivées partielles s'écrit en fonction de g

$$\left(y\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(x\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) + 7(x-y)g(u,v) = 0$$

Puisque que $x - y \neq 0$ sur $\mathscr{U}$, la relation se simplifie pour donner

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 7g(u,v).$$

b. L'équation que vérifie g est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en la variable u. La solution est donc

$$g(u,v) = K(v)\exp(7u)$$

où K est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne dépend que de v.
Enfin, en substituant explicitement $u = xy$ et $v = x+y$, cela donne

$$f(x,y) = g(xy, x+y) = K(x+y)\exp(7xy).$$

Exercice 2.

Soit la fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

a. Préciser son ensemble de définition.

b. Chercher ses points critiques.

c. Déterminer d'éventuels extrema locaux.

Solution 2.

a. f n'est pas définie aux points où $x = 0$ ou $y = 0$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, c'est à dire $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des x et de l'axe des y.

b. En un point critique, les dérivées partielles d'ordre 1 sont nulles.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, cela donne les deux conditions

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{1}{x^2} \qquad \text{soit} \quad y = \frac{1}{x^2}$$

et

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{1}{y^2} \qquad \text{soit} \quad x = \frac{1}{y^2}.$$

En les combinant, on obtient

$$x = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4$$

soit

$$0 = x^4 - x = x(x^3 - 1)$$

Puisque $x \neq 0$, cela équivaut à

$$0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

Le discriminant de $x^2 + x + 1 = 0$ étant négatif, il n'y a donc qu'une seule solution réelle $x = 1$. Et par conséquent, il n'y a qu'un seul point critique en $(x,y) = (1,1)$.

c. Au point $(1,1)$, la matrice hessienne est

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $\chi(\lambda) = \det(H - \lambda I_2) = (\lambda - 2)^2 - 1$, qui a pour racines $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$.
Les valeurs propres de H étant toutes strictement positives, on peut conclure qu'il y a un minimum local en $(1,1)$.

Exercice 3.

a. Dessiner le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

b. On considère la transformation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}.$$

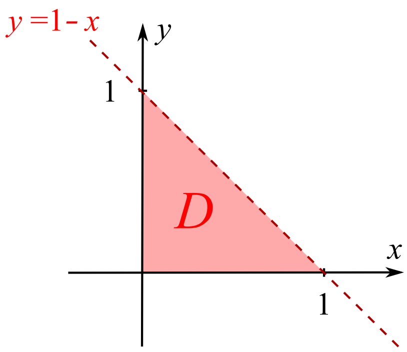
A l'aide des inégalités définissant D, déterminer le domaine Δ pour lequel $D = \Phi(\Delta)$. Dessiner ce second domaine.

c. Rappeler la formule de changement de variables pour l'intégrale double, et calculer

$$I = \iint\limits_D (x+y)^2 \, \mathrm{e}^{x^2-y^2} dxdy.$$

Solution 3.

a. Représentation graphique du domaine D :



b. L'application $\Phi \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ est bijective, et son application réciproque est $\Phi^{-1}(x,y) = (x+y, x-y)$. On a en effet

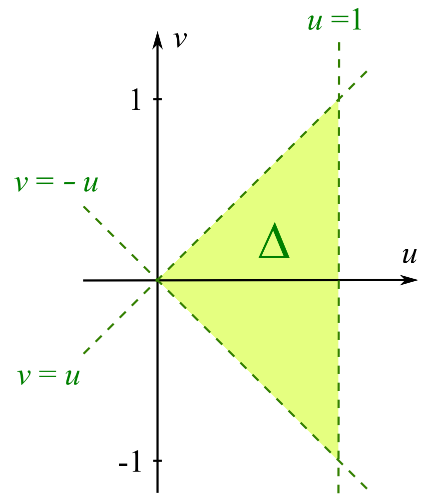
$$(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) = (x,y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (u,v) = (x+y, x-y).$$

Pour tous couples (u,v) et (x,y) tels que $\Phi(u,v) = (x,y)$, ou réciproquement $\Phi^{-1}(x,y) = (u,v)$, les inégalités définissant D peuvent se réécrire ainsi :

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{u+v}{2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -u \leq v \\ y \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{u-v}{2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v \leq u \\ x+y \leq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad u \leq 1. \end{aligned}$$

Ces équivalences montrent alors que $D = \Phi(\Delta)$ avec $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | \, u \leq 1,\ -u \leq v \leq u\}$.[*]
La repésentation graphique de Δ est :

∗. En effet, la lecture de gauche à droite des équivalences montre que si $(x,y) \in D$ alors $\Phi^{-1}(x,y) = (u,v) \in \Delta$, donc $\Phi(\Phi^{-1}(x,y)) \in \Phi(\Delta)$, soit $(x,y) \in \Phi(\Delta)$. Cela signifie que $D \subset \Phi(\Delta)$. Inversement, en les lisant de droite à gauche, on voit que si $(u,v) \in \Delta$ alors $\Phi(u,v) = (x,y) \in D$. On a donc, réciproquement, $\Phi(\Delta) \subset D$, et donc $D = \Phi(\Delta)$.



c. Le domaine $D = \Phi(\Delta)$ donc la formule de changement de variables dans l'intégrale double permet d'écrire

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta f\big(\Phi(u,v)\big)\,|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

pour toute fonction f intégrable sur D, telle que $f \circ \Phi$ est intégrable sur Δ.[†] Ici le déterminant de la matrice jacobienne de Φ est

$$\det J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

En utilisant cette formule avec la fonction $f(x,y) = (x+y)^2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_\Delta \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right)^2 \mathrm{e}^{\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}} \left|-\frac{1}{2}\right| du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_\Delta u^2\,\mathrm{e}^{uv}\,du\,dv \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(\int_u^{-u} u\,\mathrm{e}^{uv}\,dv\right) du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u\Big[\mathrm{e}^{uv}\Big]_{v=-u}^{v=u} du \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(\mathrm{e}^{u^2} - \mathrm{e}^{-u^2}\right) du \\
&= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{e}^{u^2} + \mathrm{e}^{-u^2}\Big]_0^1 \;=\; \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1} - 2\right) \;=\; \frac{1}{2}\big(\cosh(1) - 1\big).
\end{aligned}$$

†. L'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire et inversible, donc c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$, et a fortiori un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Δ vers $D = \Phi(\Delta)$.

Exercice 4.

Dans l'exercice, on considère des surfaces à symétrie de révolution autour de l'axe des z. L'intersection d'une telle surface avec un plan horizontal est un cercle centré sur l'axe, dont le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dépend de l'altitude z. Soient la surface S_1 définie par la relation $r = \sqrt{z-2}$, et la surface S_2 définie par $r = (8-z)^{1/4}$.

a. L'intersection de S_1 et de S_2 est un cercle C, horizontal et centré sur l'axe. Déterminer son rayon r_c et l'altitude z_c à laquelle il se trouve.

b. Donner l'altitude minimale de S_1 et l'altitude maximale de S_2. Dessiner les intersections de ces surfaces avec le plan vertical Oxz.

c. Calculer le volume V du domaine de $\mathbb{R}^3$ compris entre ces deux surfaces.

Solution 4.

a. L'intersection de S_1 et de S_2 est un cercle de rayon r_c et à l'altitude z_c. Ce cercle vérifie à la fois la relation de S_1 et la relation de S_2, soit

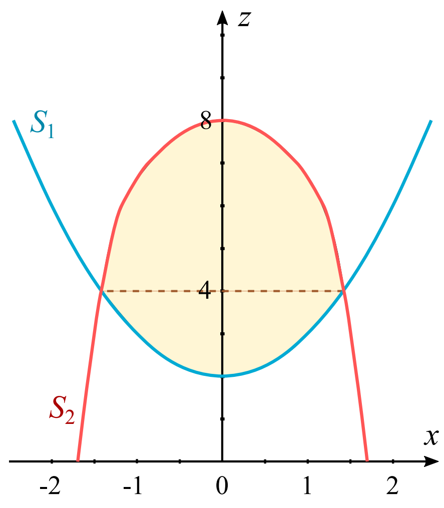
$$r_c = \sqrt{z_c - 2} = (8 - z_c)^{1/4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{z_c-2}\right)^4 = \left((8-z_c)^{1/4}\right)^4 \\ \iff \quad & (z_c-2)^2 = 8 - z_c \\ \iff \quad & z_c^2 - 4z_c + 4 = 8 - z_c \\ \iff \quad & z_c^2 - 3z_c - 4 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation du second degré sont $z_c = 4$ ou $z_c = -1$.
Or $(z_c - 2)$ doit être positif, donc $z_c = -1$ n'est pas possible. Et donc, $z_c = 4$ et $r_c = \sqrt{2}$.

b. Pour la surface S_1, on a nécessairement $(z-2) \geq 0$ donc son altitude minimale est $z = 2$.
Pour la surface S_2, on doit avoir $(8-z) \geq 0$ donc son altitude maximale est $z = 8$.
Les intersections de ces surfaces avec le plan Oxz :



c. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ compris entre ces deux surfaces.[‡] Le volume de D peut être

‡. Puisque ce sont des surfaces de révolution autour de l'axe Oz, la tranche $\Sigma(z)$ de D à l'altitude z est un disque. Pour $z \in [2;4]$, la tranche est délimitée par la surface S_1 donc son rayon est $r_1(z) = \sqrt{z-2}$. Et pour $z \in [4;8]$, la tranche est délimitée par S_2 donc son rayon est $r_2(z) = (8-z)^{1/4}$.

calculé en faisant une intégration par tranche :

$$V = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \int_2^8 \left(\iint_{\Sigma(z)} dx\,dy \right) dz.$$

La tranche $\Sigma(z)$ est une disque de rayon $r(z)$ donc l'intégrale sur celle-ci est égale $\pi r(z)^2$.

$$\begin{aligned} V &= \int_2^4 \left(\iint_{\Sigma(z)} dx\,dy \right) dz + \int_4^8 \left(\iint_{\Sigma(z)} dx\,dy \right) dz = \int_2^4 \pi r_1(z)^2 dz + \int_4^8 \pi r_2(z)^2 dz \\ &= \pi \left(\int_2^4 (z-2)\,dz + \int_4^8 \sqrt{8-z}\,dz \right) = \pi \left(\left[\frac{1}{2}(z-2)^2 \right]_2^4 + \left[-\frac{2}{3}(8-z)^{\frac{3}{2}} \right]_4^8 \right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}\left(2^2 - 0\right) - \frac{2}{3}\left(0 - 4^{\frac{3}{2}}\right) \right) = \pi \left(2 + \frac{16}{3} \right) = \frac{22\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

En passant en coordonnées cylindriques, calculer l'intégrale I de la fonction

$$f(x,y,z) = 1 - 3z^2(x^2+y^2) + 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4$$

sur le domaine cylindrinque de hauteur $H > 0$ et de rayon $R > 0$

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \le z \le H,\ \sqrt{x^2+y^2} \le R \right\}.$$

Solution 5.

Puisque $(x^2+y^2) = r^2$ et $(2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4) = 2r^4$, on a $f(x,y,z) = 1 - 3z^2r^2 + 2r^4$. En se rappelant que l'élément d'intégration de volume est $dV = rdr\,d\varphi\,dz$, l'intégration en coordonnées cylindriques sur le domaine D donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{z=0}^{z=H} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \left(1 - 3z^2r^2 + 2r^4\right) rdr\,d\varphi\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^H \left(\int_0^R \left(r - 3z^2r^3 + 2r^5\right) dr \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^H \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{3z^2}{4}r^4 + \frac{1}{3}r^6 \right]_{r=0}^{r=R} dz \\ &= 2\pi \int_0^H \left(\frac{R^2}{2} - \frac{3z^2R^4}{4} + \frac{R^6}{3} \right) dz \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^6}{3} \right) z - \frac{R^4}{4} z^3 \right]_{z=0}^{z=H} \\ &= 2\pi \left(\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^6}{3} \right) H - \frac{R^4}{4} H^3 \right) \end{aligned}$$