ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2018–2019

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – Partiel, vendredi 9 novembre 2018

Durée : 1h

Documents et calculatrices interdits
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1. *(4,5 points)*

Soit f une fonction de deux variables x et y, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathscr{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x - y > 0\}$. On suppose que f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 7(x - y)f(x, y) = 0.$$

a. On cherche la solution sous la forme $f(x, y) = g(u, v)$ avec $u = xy$, $v = x + y$, et g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert que l'on ne cherchera pas à préciser. Montrer que cela implique l'égalité

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 7g(u, v).$$

b. En déduire les solutions f de l'équation initiale.

Exercice 2. *(4,5 points)*

Soit la fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

a. Préciser son ensemble de définition.

b. Chercher ses points critiques.

c. Déterminer d'éventuels extrema locaux.

Exercice 3. *(4,5 points)*

a. Dessiner le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, x+y \leq 1\}$.

b. On considère la transformation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}.$$

A l'aide des inégalités définissant D, déterminer le domaine Δ pour lequel $D = \Phi(\Delta)$. Dessiner ce second domaine.

c. Rappeler la formule de changement de variables pour l'intégrale double, et calculer

$$I = \iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{e}^{x^2-y^2} \, dxdy.$$

Exercice 4. *(4 points)*

Dans l'exercice, on considère des surfaces à symétrie de révolution autour de l'axe des z. L'intersection d'une telle surface avec un plan horizontal est un cercle centré sur l'axe, dont le rayon $r = \sqrt{x^2+y^2}$ dépend de l'altitude z. Soient la surface S_1 définie par la relation $r = \sqrt{z-2}$, et la surface S_2 définie par $r = (8-z)^{1/4}$.

a. L'intersection de S_1 et de S_2 est un cercle C, horizontal et centré sur l'axe. Déterminer son rayon r_c et l'altitude z_c à laquelle il se trouve.

b. Donner l'altitude minimale de S_1 et l'altitude maximale de S_2. Dessiner les intersections de ces surfaces avec le plan vertical Oxz.

c. Calculer le volume V du domaine de $\mathbb{R}^3$ compris entre ces deux surfaces.

Exercice 5. *(2,5 points)*

En passant en coordonnées cylindriques, calculer l'intégrale I de la fonction

$$f(x,y,z) = 1 - 3z^2(x^2+y^2) + 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4$$

sur le domaine cylindrinque de hauteur $H > 0$ et de rayon $R > 0$

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \leq z \leq H, \, \sqrt{x^2+y^2} \leq R\right\}.$$