Quelques notions sur la commande non linéaire par modes glissants et la commande non linéaire de type Backstepping

Tarek Ahmed-Ali, Ecole nationale supérieure des ingénieurs de Caen :
tel : 02-31 -45 - 27 -14, email : tarek.ahmed-ali@greyc.ensicaen.fr

January 28, 2011

Contents

0.1 Introduction

La commande à structure variable aussi connue sous le nom de commande à modes glissants a été initiée par des chercheurs russes au debut des années 60. Il s'agit principalement de Emelyanov, Filippov, et Utkin. Les concepts de structure variable présentent des propriétés très intéressantes qui sont liées à la convergence en temps fini et à la robustesse. C'est pour cela qu'ils sont beaucoup utilisés dans la synthèse des lois de commande et dans l'observation des systèmes non linéaires incertains. Cependant cette commande présente aussi des inconvénients et notamment le problème de discontinuité qui induit un phénomène de broutement pouvant être très dangereux pour les systèmes. Nous allons voir dans ce cours comment calculer une commande par modes glissants et sur quelles classes de systèmes elle peut être utile. Nous verrons également la commande non linéaire de type *Backstepping*. Cette méthode, dont le principe consiste à calculer la commande stabilisante du système par étape, est extrêmement utile pour commander une large classe de systèmes non linéaires, comme par exemple les systèmes triangulaires (*Strict-feedforward*). Notons également qu'elle est utilisée actuellement dans la commande de plusieurs procédés comme (les convertisseurs et les machines électriques ainsi que les robots manipulateurs).

0.2 Equations différentielles à second membre discontinu

Le problème développé dans ce cours s'inscrit dans le cadre des *problèmes dynamiques non linéaires* régis par des équations différentielles discontinues, dans le sens où le second membre est une fonction non linéaire, discontinue a travers une hypersurface $\mathcal{S}$ définie par une équation du type suivant :

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid s(x) = 0\} \tag{1}$$

où x appartient à l'espace des états X. La surface $\mathcal{S}$ sépare deux régions de l'espace : $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ (lorsque $S(x)$ est respectivement positif et négatif), dans lesquelles la dynamique est différente.

Nous aurons à considérer des modèles de la forme :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f^+(x(t)) & \text{si } x(t) \in \mathcal{E}^+ \\ f^-(x(t)) & \text{si } x(t) \in \mathcal{E}^- \end{cases} \tag{2}$$

f^+ et f^- étant continues sur $\mathcal{E}$, ou encore de façon plus synthétique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

avec f quelconque et discontinue en général à travers $\mathcal{S}$ (lorsque f^+ et f^- ne coïncident pas). Dans la cadre de la commande de systèmes contrôlés, nous allons voir dans les pages qui suivent que la commande dite en mode glissant introduit des discontinuité dans la loi de commande elle même : Soit

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \tag{3}$$

un système contrôlé non linéaire, et supposons que

$$u(t) = u(x(t)) = \begin{cases} u^+(x(t)) & \text{si } s(x(t)) > 0 \\ u^-(x(t)) & \text{si } s(x(t)) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

et l'équation (1) définit l'hypersurface $\mathcal{S}$ sur laquelle la "bascule" du contrôle a lieu. L'étude du système (4) se ramène à celle de (2) lorsque le contrôle est en boucle fermée.

0.2.1 Solutions d'une équation différentielle discontinue

Definition 1 *Une fonction absolument continue $x(t) : [0, T] \to X$ est solution de*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{5}$$

où $f : X \to X$ est non continue si pour presque tout t dans $[0, T]$ on a:

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{\mathrm{Mes}(N)=0, \delta>0} \overline{\mathrm{co}} f(B(x, \delta) \setminus N) \tag{6}$$

où $\overline{\mathrm{co}}$ désigne l'enveloppe convexe et B désigne la boule de rayon δ contenue dans l'espace X.

Dans le cas particulier qui nous intéresse où $f(x)$ est continue partout sauf sur une surface S qui est de mesure nulle la solution s'écrira

$$\dot{x} \in \alpha f^+(x) + (1 - \alpha) f^-(x) \quad \alpha \in [0 \quad 1] \tag{7}$$

0.3 Principe des modes glissants

Le principe de la méthode des modes glissants est basé sur l'idée suivante.
Considérons la surface (1) et le système dynamique suivant

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^+(x) & \text{si} \quad S(x) > 0 \\ f^-(x) & \text{si} \quad S(x) < 0 \end{cases} \tag{8}$$

On dit que le système est en régime glissant si toutes les trajectoires convergent vers la surface S et y demeurent.

0.3.1 Condition d'existence des modes glissants

Pour pouvoir affirmer qu'un régime glissant peut apparaître sur une surface, une condition suffisante existe en littérature, elle est appelée **condition d'attractivité** et s'écrit comme suit

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S^2 = S(x) \dot{S}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n / S. \tag{9}$$

Le principe de cette méthode repose sur l'idée suivante. Considérons la dérivée de la surface par rapport au temps qui représente la vitesse de S

$$\lambda = \dot{S}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(x) = \frac{\partial S}{\partial x} f(x) = \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} f^+(x) & \text{si} \quad S(x) > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} f^-(x) & \text{si} \quad S(x) < 0 \end{cases}$$

Pour que les trajectoires convergent vers la surface S, il faut que les vecteurs S et $\dot{S}$ soient de signe opposés, ce qui se veut dire que

$$\begin{array}{ll} \text{si} & S(x) > 0 \Longrightarrow \lambda^+(x) = \frac{\partial S}{\partial x} f^+(x) < 0 \\ \text{si} & S(x) < 0 \Longrightarrow \lambda^-(x) = \frac{\partial S}{\partial x} f^-(x) > 0, \end{array}$$

d'où on peut énoncer le théorème suivant

Theorem 1 *On dit que le système (3)converge vers une surface S si la condition suivante est verifiée*

$$S(x)\dot{S}(x) < 0$$

0.3.2 Convergence en temps fini

Dans la partie précédente on a vu que si le système satisfait la condition d'attractivité alors toutes les trajectoires vont converger vers la surface. Nous allons voir dans cette partie comment on peut assurer que les trajectoires convergent en temps fini.

Theorem 2 *On dit que le système (3)converge en temps fini vers une surface S si la condition suivante est vérifiée*

$$S(x)\dot{S}(x) \leq -\eta|S|$$

avec $\eta > 0$.

Preuve
Supposons par exemple que $S(x(t_0)) > 0$ (le raisonnement est identique dans le cas où $S(x(t_0)) < 0$.) Dans ce cas on peut écrie

$$\frac{dS(x(t))}{dt} < -\eta$$

Soit

$$\tau = \inf t \geq t_0, \quad S(x(t)) = 0$$

Montrons que τ est fini. En intégrant l'inéquation précédente, on obtient :

$$\int_{t_0}^{\tau} \frac{dS(x(t))}{dt}\ dt = S(x(\tau)) - S(x(t_0)) < -\eta(\tau - t_0)$$

d'où l'on tire :

$$\tau < \frac{S(x(t_0))}{\eta} + t_0$$

Donc τ est fini. Ainsi, le système rejoint la surface S en temps fini. D'après la proposition précédente, le système demeure sur S à tous les instants ultérieurs à τ. Remarquons que le coefficient η permet de déterminer le temps nécessaire au système pour rejoindre la surface S. En ce sens, il joue le rôle d'un gain de stabilisation sur S. Plus η est élevé, plus rapidement le système rejoint $\mathcal{S}$.

0.3.3 Etude du comportement du système en régime glissant

Quand le système atteint la surface de glissement, sa solution sera définie au sens de Fillipov, ce qui se traduit par

$$\dot{x} \in f_0(x) = \alpha f^+(x) + (1-\alpha)f^-(x) \tag{10}$$

où $\alpha \in [0 \quad 1]$. Quand le système est en régime glissant, la surface de glissement vérifie la condition $\dot{S}(x) = 0$, d'où l'on peut écrie que

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} f_0(x) = \frac{\partial S}{\partial x}(\alpha f^+(x) + (1-\alpha)f^-(x)) = 0$$

en résolvant cette équation, on obtient

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x} f^{-}(x)}{\frac{\partial S}{\partial x}(f^{+}(x) - f^{-}(x))}. \tag{11}$$

On peut donc dire que la solution en régime glissant est unique. Contrairement aux solutions de Fillipov qui définissent un ensemble de solutions. Notons que cette dynamique traduit uniquement le comportement idéal du système qui correspond à des commutations instantanées autour de la surface de glissement, ce qui est impossible à vérifier en pratique.

0.4 Commande par modes glissants

Considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{12}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$ et $u \in \mathbf{R}^m$.
Considérons le vecteur surface suivant $S(x)$ définie

$$S(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ S_m(x) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Le but de la commande par modes glissants est de ramener toutes les trajectoires du système dans l'espace d'état sur le vecteur de surfaces $S(x)$. Elle est composée de deux parties, la première appelée commande équivalente est continue. La deuxième est discontinue. Les fonctions de chacune de ces deux commandes seront détaillées dans ce qui suit.

0.4.1 Commande équivalente

La commande équivalente assure le maintien du système sur la surface $S(x) = 0$ dans le cas où il s'y trouvait déja. Elle doit donc vérifier la condition $\dot{S}(x) = 0$.

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u_{eq}) = 0 \tag{14}$$

d'où l'on peut déduire la commande équivalente.

$$u_{eq} = -[\frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x)]^{-1} \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x). \tag{15}$$

Remarquons que cette commande n'existe que dans le cas où la condition

$$\det[\frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x)] \neq 0$$

est verifiée.

0.4.2 Commande discontinue

Cette commande assure la convergence de toutes les trajectoires du système vers la surface de glissement $S(x) = 0$. Pour la calculer, il suffit de vérifier la condition d'existence des régimes glissants.

$$S^T(x)\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)(u_{eq} + u_n)) \tag{16}$$

cette egalité devient

$$S^T(x)\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}(g(x)u_n) \tag{17}$$

En posant

$$u_n = -\beta[\frac{\partial S(x)}{\partial x}g(x)]^{-1}sign(S(x)) \tag{18}$$

on aura

$$\dot{S}^T(x)S(x) = \beta|S(x)| = -\beta\sum_{i=1}^{m}|S_i(x)|$$

Finallement la commande par modes glissants sera

$$u = u_n + u_{eq} = -[\frac{\partial S(x)}{\partial x}g(x)]^{-1}\frac{\partial S(x)}{\partial x}f(x) - \beta[\frac{\partial S(x)}{\partial x}g(x)]^{-1}sign(S(x)). \tag{19}$$

Cette commande assure la convergence en temps fini vers la surface $S(x) = 0$.

0.5 Lissage de la commande par modes glissants

Nous avons vu que la commande par modes glissants contient un terme discontinu sur la surface. Cette discontinuité suppose que les commutations entre les deux parties de l'espace d'état délimitées par la surface de glissement se font instantanément. Cette hypothèse n'est malheureusement pas vérifiée en pratique car il n'existe pas d'organe de commande ayant cette performance. C'est pour cette raison qu'un phénomène de broutement appelé aussi (Chattering) apparaît sur la surface de glissement. Pour éviter ce phénomène dangereux pour les systèmes, la fonction signe est remplacée par la fonction saturation

$$Sat(x) = \begin{cases} sgn(x) & \text{si} \quad |x| \geq \epsilon \\ \frac{x}{\epsilon} & \text{si} \quad |x| \leq \epsilon \end{cases}$$

En considérant la classe de système suivante

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

et en remplaçant la fonction $sgn(x)$ par la fonction $sat(x)$. La commande s'écrira

$$u = [\frac{\partial S(x)}{\partial x}g(x)]^{-1}\frac{\partial S(x)}{\partial x}f(x) - \beta[\frac{\partial S(x)}{\partial x}g(x)]^{-1}sat(S(x))$$

Si $|S| \geq \epsilon$, on aura $S\dot{S} \leq -\beta|S|$. Si $|S| < \epsilon$ on aura $S\dot{S} \leq -\frac{\beta}{\epsilon}S^2$, ce qui veut dire que la convergnce vers $S = 0$ sera exponentielle et non pas en temps fini.

0.6 Poursuite de trajectoire par modes glissants

Pour appliquer la commande par modes glissants dans le cas d'une poursuite de trajectoire, on utilise le concept de degrés relatif qui peut être très utile dans ce cas.

0.6.1 Degrés relatif

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x). \end{aligned} \tag{20}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$, $u, y \in \mathbf{R}$.

Definition 2 *Le degrés relatif r du système est le plus petit nombre de fois qu'on dérive la sortie pour faire apparaître l'entrée, ce qui se traduit par la condition suivante*

$$\frac{\partial y^{(r)}(t)}{\partial u} \neq 0 \tag{21}$$

Ce nombre est très important dans le cas de la poursuite de trajectoire car il permet de définir un changement de variable qui permet de calculer aisément la commande. Nous allons commencer d'abord par le cas ou le degrés relatif est égal à l'ordre du système.

0.6.2 Poursuite de trajectoire dans le cas où $r = n$

Considérons le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \qquad\qquad (22) \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1 \qquad\qquad (23) \end{aligned}$$

On désire que la sortie y suivent asymptotiquement une trajectoire de référence $y_r(t)$. Pour calculer la commande correspondante on définit la surface de glissement suivante

$$S(x) = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \tag{24}$$

où $e_i = x_i - y_r^{(i)}(t)$ représente l'erreur et c_i sont des coefficients d'un polynôme stable.

Calcul de la commande équivalente

la commande équivalente doit vérifier la condition $\dot{s}(x) = 0$.

$$\dot{S}(x) = \dot{e}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i \tag{25}$$

en remplaçant les e_i par leurs valeurs

$$\dot{S}(x) = f(x) + g(x)u - y_r^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1} = 0 \tag{26}$$

d'où l'on déduit la commande

$$u_{eq} = -\frac{f(x) - y_r^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1}}{g(x)} \tag{27}$$

Calcul de la commande discontinue

La partie discontinue doit satisfaire la condition $S\dot{S} \leq -\beta|S|$ où $\beta > 0$.

$$S(x)\dot{S}(x) = S(x)[f(x) + g(x)(u_{eq} + u_n) - y_r^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1}] \tag{28}$$

on peut dire aussi que

$$\dot{S}(x)S(x) = S(x)[g(x)u_n] \tag{29}$$

en choisissant

$$u_n = -\frac{\beta sign(S(x))}{g(x)} \tag{30}$$

on aura

$$S(x)\dot{S}(x) = -\beta|S(x)| \tag{31}$$

0.6.3 Pousuite de trajectoire dans le cas $r < n$

Dans ce cas, on suppose que le degrés relatif est plus petit que la dimension du vecteur d'état. En utilisant le degrés relatif r, on introduit le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r(t) \\ z_2 &= \dot{y} - \dot{y}_r(t) && (32) \\ &\vdots && (33) \\ z_r &= y^{(r-1)} - y_r^{(r-1)}(t) \end{aligned}$$

ce qui conduit aux équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= \alpha(x) + \beta(x)u - y_r^{(r)}(t) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, z, u, t). && (34) \end{aligned}$$

pour calculer la commande par modes glissants qui assure que la sortie du système suive asymptotiquement la trajectoire $y_r(t)$, on définit la surface de glissement suivante

$$S(x) = z_r + a_{r-1}z_{r-1} + \ldots + a_1 z_1 \tag{35}$$

où les a_i sont determiner pour le polynôme.

$$p^{r-1} + \sum_{i=1}^{r-1} a_i p^{i-1} = (p - \lambda_{r-1}) \dots (p - \lambda_1) \quad (36)$$

soit de Hurwitz. Nous supposerons également que le système est à minimum de phase. ceci veut dire que la dynamique des zéros representées par $\xi = \eta(\xi, z, u, t)$ vérifie la propriété d'un système à entrée bornée-état borné. La commande équivalente doit vérifier la condition $\dot{s}(x) = 0$.

$$\dot{S}(x) = \dot{z}_r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i \dot{z}_i \quad (37)$$

en remplaçant les z_i par leurs valeurs

$$\dot{S}(x) = \alpha(x) + \beta(x)u - y_r^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^{r-1} a_i z_{i+1} = 0 \quad (38)$$

d'où l'on déduit la commande

$$u_{eq} = -\frac{\alpha(x) - y_r^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^{r-1} a_i z_{i+1}}{\beta(x)} \quad (39)$$

La partie discontinue doit satisfaire la condition $S\dot{S} \leq -\gamma|S|$ où $\gamma > 0$.

$$S(x)\dot{S}(x) = S(x)[\alpha(x) + \beta(x)(u_{eq} + u_n) - y_r^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^{r-1} a_i z_{i+1}] \quad (40)$$

on peut dire aussi que

$$\dot{S}(x)S(x) = S(x)[\beta(x)u_n] \quad (41)$$

en choisissant

$$u_n = -\frac{\gamma}{\beta(x)} sign(S(x)) \quad (42)$$

on aura

$$S(x)\dot{S}(x) = -\gamma|S(x)| \quad (43)$$

ce qui permet de conclure que la poursuite de trajectoire est assurée

0.6.4 Poursuite de trajectoires de plusieurs sorties

Dans cette partie, on va voir le cas ou l'on a plusieurs entrées et sorties. Considérons la classe de système suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases} \quad (44)$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ avec m et le nombre d'entrées et de sorties, n est le nombre d'états et $m \leq n$. L'objectif de commande et que chaque sortie y_i suivent une sortie $y_{id}(t)$ bornées et suffisamment lisses. Pour cela on doit choisir un vecteur surfaces $S(x) = [S_1(x) \dots S_m(x)]^t$. La commande sera la même que celle en (19), on se contentera juste d'expliquer comment se fait le choix des surfaces $S_i(x)$. Tout d'abord on doit calculer un degrés relatif r_i par rapport à chaque sortie. L'ensemble des degrés relatifs sont les plus petits nombres r_i qui doivent satisfaire la relation suivante

$$\det[\frac{\partial(y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)})}{\partial(u_1 \dots u_m)}] \neq 0 \tag{45}$$

la matrice $Q = [\frac{\partial(y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)})}{\partial(u_1 \dots u_m)}]$ est appelée aussi matrice de decouplage entrées/sorties. A partir de cela on peut proposer les surfaces suivantes

$$\begin{aligned}
S_1 &= \alpha_{11}(y_1^{(r_1-1)} - y_{1d}^{(r_1-1)}(t)) + \dots + \alpha_{1r_1}(y_1 - y_{1d}(t)) && (46)\\
&\vdots && (47)\\
S_m &= \alpha_{m1}(y_m^{(r_m-1)} - y_{md}^{(r_m-1)}(t)) + \dots + \alpha_{mr_m}(y_m - y_{md}(t)) && (48)
\end{aligned}$$

où les coefficients α sont choisies de Hurwitz pour chaque surface. En utilisant la commande (19) on pourra dire que le régime glissant se produira sur chaque surface $S_i(x)$ ce qui implique que la poursuite de trajectoire est assurée pour chaque sortie y_i.

0.7 Etude de la robustesse

Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés de robustesse de la commande par modes glissants. Considérons la classe de systèmes suivants

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(x,t) \tag{49}$$

On suppose que les conditions suivantes soient vérifiées

- Il existe une fonction positive connue $\eta(x,t)$ telle que $|d(x,t)| \leq \eta(x,t)$.

Supposons aussi qu'il existe une surface $S(x) = 0$ et une commande par modes glissants

$$\alpha(x) = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x} f(x)}{\frac{\partial S}{\partial x} g_1(x)} - \frac{\beta(x,t)}{\frac{\partial S}{\partial x} g_1(x)} sign(S(x))$$

telles que le système

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)\alpha(x)$$

soit en régime glissant sur la surface $S(x) = 0$. Maintenant, considérons la dérivé de la surface le long du système perturbé, on aura donc

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial x}(f(x) + g_1(x)\alpha(x) + g_2(x)d(x,t))$$

En remplaçant $\alpha(x)$, on aura

$$S\dot{S} = -\beta(x,t)|S(x)| + S(x)\frac{\partial S}{\partial x} g_2(x)d(x,t) \tag{50}$$

ceci conduit à dire que

$$S\dot{S} \leq -\beta(x,t)|S(x)| + |S(x)|.|\frac{\partial S}{\partial x}g_2(x)|\eta(x,t). \tag{51}$$

En choisissant,

$$\beta(x,t) = \gamma + |\frac{\partial S}{\partial x}g_2(x)|\eta(x,t) \tag{52}$$

où γ est une constante strictement positive, on aura

$$S\dot{S} \leq -\gamma|S(x)| \tag{53}$$

ce qui assure une convergence en temps fini vers la surface $S(x)$ en présence des perturbation. Ceci prouve que la commande par mode glissant assure la robustesse par rapport à la perturbation. Cette propriété est très importante car plusieurs systèmes physique peuvent se mettre sous cette forme.

0.8 Commande de type Backstepping

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \tag{54}$$

où $\eta \in \mathbf{R}^n$ et $\xi \in \mathbf{R}$ sont les états du système. La commande du système est représentée par la grandeur $u \in \mathbf{R}$. On souhaite trouver une commande non linéaire qui assure que le système non linéaire en boucle fermée soit globalement asymptotiquement stable. Pour ce faire, nous allons supposer que le système

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \tag{55}$$

peut être stabilisé par un retour d'état non linéaire $\xi = \phi(\eta)$ qui vérifie $\phi(0) = 0$, et nous supposons également qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(\eta)$ qui vérifie

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta) \tag{56}$$

où $W(\eta)$ est une fonction définie positive.
Afin de trouver la commande non linéaire qui stabilise le système complet, nous introduisons le changement de variable suivant

$$z = \xi - \phi(\eta). \tag{57}$$

Ceci nous conduit à écrire le système (54) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \\ \dot{z} = u - \dot{\phi} \end{cases} \tag{58}$$

Introduisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_c(\eta,\xi) = W(\eta) + \frac{1}{2}z^2 \tag{59}$$

nous obtenons alors,

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi] + z[u - \dot{\phi}] \tag{60}$$

Si on rajoute et on retranche le terme $\phi(\eta)$, nous obtenons

$$\dot{V}_c = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z + z[u - \dot{\phi}] \tag{61}$$

En choisissant

$$u = \dot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta) - kz \quad k > 0 \tag{62}$$

où

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi]$$

nous obtenons

$$\dot{V}_c = -W(\eta) - kz^2 \tag{63}$$

En utilisant le théorème de LaSalle, on peut facilement montrer que l'origine $(\eta, \xi) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Bibliography

[1] V.Utkin, *Variable structure systems with sliding modes*, IEEE Trans . Auto . Control, Vol 22, 212-222, 1977.

[2] J.J.E Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control* Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, 1991.

[3] K. Khalil, *Nonlinear systems* Macmillan Publishing Company, New-York, 1992.

[4] H. Sira-Ramirez, Differential geometric method in variable structure control, *International Journal of Control* Vol 48 1359–1390, 1988.